

УДК 517.956

В. М. КИРИЛИЧ, А. М. ФИЛИМОНОВ¹

ОБОБЩЕННАЯ НЕПРЕРЫВНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ С НЕИЗВЕСТНЫМИ ГРАНИЦАМИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

V. M. Kyrylych, A. M. Filimonov. *Generalized continuous solvability of the problem with unknown boundaries for singular hyperbolic systems of quasilinear equations*, Matematychni Studii, **30** (2008) 42–60.

Applying the contracting mapping method, the local correcting solvability of the task was determined with internally free boundaries for hyperbolic systems of quasilinear equations of new order in the case when the part of sets of characteristics is perpendicular to the time axis.

В. М. Кирилич, А. М. Филимонов. *Обобщенная непрерывная разрешимость задачи с неизвестными границами для сингулярных гиперболических систем квазилинейных уравнений*. // Математичні Студії. – 2008. – Т.30, №1. – С.42–60.

С помощью метода сжимающих отображений установлена локальная корректна разрешимость задачи с внутренними свободными границами для гиперболических систем квазилинейных уравнений первого порядка в случае, когда часть семейств характеристик перпендикулярна оси времени.

Одной из наиболее распространенных и изученных постановок задач для гиперболических уравнений и систем является смешанная задача. Однако, возможны и иные постановки задач. Так, например, в работах Л. Чезари [19] рассмотрены аналоги многоточечной задачи Валле-Пуссена по временной переменной для гиперболических уравнений. В этом случае дополнительная информация задается на нескольких горизонтальных прямых, перпендикулярных оси времени. Обзор относящихся к этой тематике работ содержится во второй главе книги Б. И. Пташника [5]. С точки зрения приложений такую постановку задачи можно интерпретировать как задание информации о системе в нескольких различных моментах времени. Однако, более распространенным и естественным с точки зрения приложений представляется аналог многоточечной задачи Валле-Пуссена по пространственной переменной. При этом дополнительная информация обычно задается не на прямых, перпендикулярных пространственной оси (как можно было бы предположить по аналогии с задачей по временной переменной), а на некоторых неизвестных линиях, подлежащих определению и зависящих от решений рассматриваемой системы уравнений.

2000 *Mathematics Subject Classification*: 35L50.

¹Для А.М.Филимонова эта работа поддержана РФФИ, грант 06-01-00356а.

Keywords: generalized continuous solvability, unknown boundary, singular hyperbolic system, quasilinear equation
doi:10.30970/ms.30.1.42-60

© В. М. Кирилич, А. М. Филимонов, 2008

Подобно тому, как обычную краевую задачу для обыкновенных дифференциальных уравнений можно считать частным случаем двухточечной задачи Валле-Пуссена, обычную смешанную задачу для гиперболических систем можно трактовать, как частный случай упомянутого аналога задачи Валле-Пуссена по пространственной переменной, если дополнительные условия заданы на двух линиях — прямых, перпендикулярных пространственной оси. Если же эти две линии не обязательно прямые, и, более того, они неизвестны, то мы приходим к задаче Стефановского типа для гиперболических систем. В общем случае таких неизвестных линий, на которых задается дополнительная информация, может быть и более двух.

Отметим, что упомянутые выше задачи особенно характерны для так называемых сингулярных гиперболических систем. Так называются гиперболические системы уравнений с частными производными первого порядка, у которых часть характеристик перпендикулярна оси времени. В приложениях такие системы стали встречаться относительно недавно. При этом такие уравнения и системы могут возникать как непосредственно, в качестве математических моделей физических процессов, так и в качестве промежуточных уравнений, получающиеся при анализе других, например, многомерных задач.

Так, например, при изучении движения жидкости, вращающейся с постоянной угловой скоростью и текущей вдоль оси вращения с постоянной линейной скоростью (винтовое течение), для давления возникает уравнение ([1], [2]), которое в линейном приближении (в безразмерных переменных) имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \Delta_{N+1} u + \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u = 0, \quad (1)$$

где $\Delta_{N+1} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sum_{n=1}^N \frac{\partial^2}{\partial y_n^2}$, $N = 2$, а ось вращения совпадает с осью x . При $N = 1$ то же самое уравнение описывает двумерные малые колебания идеальной невращающейся стратифицированной жидкости, текущей с постоянной скоростью перпендикулярно направлению стратификации ([1], [3]). При решении уравнения (1) методом Фурье возникает уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \lambda_k\right) a_k(t, x) + \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} a_k(t, x) = f_k(t, x). \quad (2)$$

Здесь $a_k(t, x)$ — коэффициенты Фурье в разложении $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t, x) v_k(y)$ по соответствующим собственным функциям $v_k(y)$.

Уравнение (2) имеет два двукратных семейства характеристик, причем одно из них состоит из прямых $t = \text{const}$.

Примером задачи, в которой непосредственно возникают уравнения с характеристиками, перпендикулярными оси времени (для краткости, в дальнейшем будем называть такие характеристики горизонтальными), является задача о распространении одномерных (или сферически симметричных) ионно-звуковых волн в немагнитной плазме ([1]). Это уравнение в безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{\partial^4}{\partial t^2 \partial x^2} u - \frac{\partial^2}{\partial t^2} u + \frac{\partial^2}{\partial x^2} u = 0,$$

где значение $u(x, t)$ интерпретируется как концентрация ионов. Это уравнение также имеет двукратное семейство горизонтальных характеристик.

Достаточно много уравнений с особенностями такого типа возникает в одномерной теории вязко-упругости. Так, при изучении колебаний сред типа гелей, описываемых реологическим соотношением Кельвина - Фойхта, возникает уравнение

$$b_1 \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} u + b_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u - \eta \frac{\partial}{\partial t} u = 0.$$

При изучении движений сред типа золь Лесерсичем ([4]) была предложена реологическая схема, которая приводит к уравнению

$$b_2 \frac{\partial^4}{\partial t^2 \partial x^2} u + b_1 \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} u - a_1 \rho \frac{\partial^3}{\partial t^3} u - (a_0 \rho + a_1 \eta) \frac{\partial^2}{\partial t^2} u - a_0 \eta \frac{\partial}{\partial t} u = 0.$$

Такое же уравнение возникает и при изучении движений земной коры в соответствии с реологической схемой, предложенной Джеффрисом ([4]).

Все предыдущие уравнения были линейными. Однако, в физике твердого тела изучаются и гиперболические системы квазилинейных уравнений, часть семейств характеристик которых перпендикулярна оси времени. Примером может служить задача о распространении ионов примесей в кристаллической решетке под действием электрического поля ([6]). Поскольку для нашей работы эта задача может рассматриваться как одна из модельных, опишем ее несколько подробнее.

После преобразований система уравнений, описывающая эту задачу (в безразмерных переменных), имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{sh} E \frac{\partial u}{\partial x} = -u^2 \operatorname{ch} E, \quad (3)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = pu, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -qE, \quad (5)$$

где u означает концентрацию примеси, E — напряженность электрического поля, φ — потенциал, p, q — некоторые коэффициенты.

Отметим, что для уравнений (4) и (5) семейства характеристик горизонтальны.

Начальные и краевые условия для системы (3)-(5) задаются следующим образом

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= g(x), u(0, t) - r \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \\ u(\ell(t), t) &= g(\ell(t)), E(\ell(t), t) = 0, \\ \varphi(0, t) &= \varphi_0, \varphi(\ell(t), t) = 0, \end{aligned}$$

где $\ell(t)$ — неизвестная функция, определяющая положение правой границы области. Путем простых преобразований для этой функции можно получить уравнение

$$\ell'(t) = -b \int_0^{\ell(t)} u \operatorname{sh} E dx / (g(\ell(t)) \ell(t)).$$

Начальное условие для неизвестной линии $\ell(t)$ определяется из соотношения

$$\int_0^{\ell(0)} x g(x) dx = -\frac{\varphi_0}{pq}.$$

Отметим, что такие сингулярные гиперболические системы можно интерпретировать, как математические модели одномерных сплошных сред, в которых часть возмущений распространяется с ограниченными скоростями, а часть — с бесконечными. Разумеется, такая модель (как, впрочем, и любая модель) является определенной идеализацией реальных процессов. Однако, при правильном анализе результатов не возникает противоречий. Например, уравнение теплопроводности также обладает характеристиками, перпендикулярными оси времени, что не мешает широкому использованию этого уравнения при математическом моделировании. По-существу, в случае уравнения теплопроводности перпендикулярность характеристик оси времени есть следствие

определенной идеализации, связанной с тем, что при выводе этого уравнения пренебрегают массой молекул вещества, а само вещество считают непрерывной сплошной средой. Таким образом, перпендикулярность характеристик оси времени может быть, например, результатом предельного перехода от случая характеристик с не вертикальным расположением по отношению к оси времени.

Для гиперболических систем квазилинейных уравнений вопрос о корректной разрешимости задачи в случае, когда часть семейств характеристик перпендикулярна оси времени, до настоящего времени был *открыт*, хотя к моделям такого вида, как указывалось выше, приводят некоторые задачи физики твердого тела.

Гиперболические системы, у которых часть характеристик горизонтальна, будем называть *вырожденными или сингулярными*. При их исследовании воспользуемся методом характеристик.

Метод характеристик для систем квазилинейных гиперболических уравнений по существу встречается в работе Б. Римана, посвященной распространению волн в нелинейных средах ([20]), а в общем виде этот метод был рассмотрен Г. Леви ([7]). Позднее, в работах А. Дуглиса ([8]), Ф. Хартмана и А. Винтнера ([9]) рассматривались вопросы построения локального классического решения задачи Коши для гиперболических систем квазилинейных уравнений с двумя независимыми переменными. Несколько иное доказательство этих же результатов приведено в книге Б. Л. Рождественского и Н. Н. Яненко ([10]). Заметим, что все сказанное относительно квазилинейных систем относится к локальной разрешимости задачи Коши. Трудности, возникающие при построении глобального решения, связаны с возможностью пересечения характеристик и образования разрывов решения. Это явление, рассмотрено в довольно общем виде в работах П. Лакса ([12]) и Ф. Джона ([11]).

Сказанное выше относилось к изучению задачи Коши. В работе В. Э. Аболиня и А. Д. Мышкиса [13], в частности, были доказаны теоремы существования и единственности решения смешанной задачи для гиперболических систем полулинейных уравнений. Позднее, в работах А. Д. Мышкиса и А. М. Филимонова [14], [17], была рассмотрена смешанная задача для гиперболических систем квазилинейных уравнений, доказана теорема существования и единственности решения, а также получены некоторые достаточные условия глобальной разрешимости этой задачи.

Задаче определения решения, у которого имеется не заданная заранее линия разрыва, известной как задача Стефана, посвящена обширная литература, особенно для параболических и эллиптических уравнений. Пожалуй, наиболее близкой к теме нашей работы является работа К. Ю. Казакова и С. Ф. Морозова [15], в которой исследуется вопрос локальной разрешимости системы квазилинейных гиперболических уравнений с двумя независимыми переменными в криволинейном четырехугольнике с неизвестной внутренней границей. В этой работе при достаточной гладкости исходных функций системы была доказана теорема о существовании и единственности в малом кусочно-гладкого решения смешанной задачи. Результаты работы [15] были обобщены на случай функционально-дифференциальных уравнений П. Баззанини и Я. Туро [21]. Близкой к теме нашей работы является работа Р. В. Андрусяка, В. М. Кирилича и А. Д. Мышкиса [16], в которой изучается гиперболическая задача Стефана для одномерной квазилинейной системы. В этой работе, в частности, доказана теорема о локальном существовании и единственности обобщенного (липшицевого по обоим переменным) решения этой задачи. Получены достаточные условия глобальной разрешимости задачи.

1. Постановка задачи. В прямоугольнике $\Pi(T_0) = \{(x, t) | 0 \leq x \leq \ell, 0 \leq t \leq T_0\}$, где

$\ell > 0$, $T_0 > 0$ — некоторые константы, рассмотрим систему

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x, t, u, v) \frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(x, t, u, v), \quad i = 1, \dots, m, \quad (6)$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial x} = q_j(x, t, u, v), \quad j = 1, \dots, n, \quad (7)$$

$$\dot{s}_j = r_j(t, s(t), u(s_j(t), t), v(s_j(t), t)), \quad j = 1, \dots, n, \quad (8)$$

где $u = (u_1, \dots, u_m)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$, $s = (s_1, \dots, s_n)$, а точка над s_j , как обычно, означает дифференцирование по t .

Начальные и краевые условия имеют вид

$$u(x, 0) = \alpha(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (9)$$

$$s_j(0) = c_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad 0 \leq c_j \leq \ell, \quad (10)$$

$$u_i(0, t) = \gamma_i^0(t, u(0, t)), \quad i \in I_+^0 = \{i \mid \operatorname{sgn}(\lambda_i(0, 0, 0, 0)) = 1\}, \quad (11)$$

$$u_i(\ell, t) = \gamma_i^\ell(t, u(\ell, t)), \quad i \in I_-^\ell = \{i \mid \operatorname{sgn}(\lambda_i(\ell, 0, 0, 0)) = -1\}. \quad (12)$$

Дополнительные условия на неизвестных линиях имеют вид

$$v_j(s_j(t), t) = \beta_j(t), \quad j = 1, \dots, n, \quad (13)$$

где функции $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, γ_i^0 ($i \in I_+^0$), γ_i^ℓ ($i \in I_-^\ell$) и константы c_j ($j = 1, \dots, n$) являются заданными.

Обозначив $w = (u, v)$, введем в рассмотрение следующие множества

$$D(T_0, P_0) = \Pi(T_0) \times \{w \mid w \in \mathbb{R}^{m+n}, \|w\| \leq P_0\},$$

$$D^1(T_0, P_0) = [0, T_0] \times \{w \mid w \in \mathbb{R}^{m+n}, \|w\| \leq P_0\},$$

$$D^2(T_0, P_0) = [0, T_0] \times [0, \ell]^n \times \{w \mid w \in \mathbb{R}^{m+n}, \|w\| \leq P_0\},$$

где $P_0 > 0$ — некоторая константа, $[0, \ell]^n \subset \mathbb{R}^n$. Введем обозначения $|u| = \max_i |u_i|$, $|v| = \max_j |v_j|$, $|s| = \max_j |s_j|$, $|w| = \max\{|u|, |v|\}$.

Будем считать выполненными следующие предположения

A1. В области $D^1(T_0, P_0)$ для $i = 1, \dots, m$ выполнено

$$\operatorname{sgn}(\lambda_i(0, t, u, v)) = \operatorname{const}, \quad \operatorname{sgn}(\lambda_i(\ell, t, u, v)) = \operatorname{const}.$$

A2. Функции $\lambda_i(x, t, w)$, $f_i(x, t, w)$ для $i = 1, \dots, m$, $q_j(x, t, w)$ для $j = 1, \dots, n$, определены в области $D(T_0, P_0)$, а функции $r_j(x, t, w)$ для $j = 1, \dots, n$ определены в области $D^2(T_0, P_0)$. Все эти функции ограничены по модулю некоторыми константами Λ, F, Q, R соответственно. Кроме того, функции $q_j(x, t, w)$ для $j = 1, \dots, n$ непрерывны по t .

A3. Существуют неотрицательные, суммируемые на $[0, T_0]$ (и $[0, \ell]$ соответственно) функции $\Lambda_1(t), \Lambda_2(t), F_1(t), F_2(t), R_1(t), R_2(t), Q_2(x)$, причем $Q_2(x)$ кроме того суммируема в квадрате) такие, что почти для всех $t \in [0, T_0]$ ($x \in [0, \ell]$) при $(x_1, t, w_1) \in D(T_0, P_0)$, $(x_2, t, w_2) \in D(T_0, P_0)$, $(x^1, t, w_1) \in D^2(T_0, P_0)$, $(x^2, t, w_2) \in D^2(T_0, P_0)$ (и при $(x, t, w_1) \in D(T_0, P_0)$, $(x, t, w_2) \in D(T_0, P_0)$ соответственно) для $i = 1, \dots, m$ и $j = 1, \dots, n$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} |\lambda_i(x_1, t, w_1) - \lambda_i(x_2, t, w_2)| &\leq \Lambda_1(t)|x_1 - x_2| + \Lambda_2(t)|w_1 - w_2|, \\ |f_i(x_1, t, w_1) - f_i(x_2, t, w_2)| &\leq F_1(t)|x_1 - x_2| + F_2(t)|w_1 - w_2|, \\ |r_j(x^1, t, w_1) - r_j(x^2, t, w_2)| &\leq R_1(t)|x^1 - x^2| + R_2(t)|w_1 - w_2|, \end{aligned} \quad (14)$$

$$|q_j(x, t, w_1) - q_j(x, t, w_2)| \leq Q_2(x)|w_1 - w_2|.$$

A4. Функции $\lambda_i(x, t, w)$, $f_i(x, t, w)$, $r_j(x, t, w)$, $q_j(x, t, w)$ измеримы в области $D(T_0, P_0)$ для всех $i = 1, \dots, m$ и $j = 1, \dots, n$ соответственно.

Из условий A2, A3, A4 следует, что в области $D(T_0, P_0)$ функции $\lambda_i(x, t, w)$, $f_i(x, t, w)$ для $i = 1, \dots, m$ (и функции $r_j(x, t, w)$, $q_j(x, t, w)$ при $j = 1, \dots, n$ соответственно) непрерывны по совокупности x, w (по t, w) для почти всех $t \in [0, T_0]$ ($x \in [0, \ell]$) и суммируемы по t (по x) на $[0, T_0]$ ($[0, \ell]$) при фиксированных x, w (и t, w соответственно). Отсюда и из известной леммы ([18], с.121) следует, что если $w : \Pi(T_0) \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ и $x : [0, T_0] \rightarrow [0, \ell]$ — непрерывные функции, то функции $\lambda_i(x(t), t, w(x(t), t))$, $f_i(x(t), t, w(x(t), t))$, $i = 1, \dots, m$ и $r_j(x(t), t, w(x(t), t))$ $j = 1, \dots, n$ будут суммируемыми на $[0, T_0]$.

A5. Выполнены условия согласования нулевого порядка

$$\gamma_i^0(0, \alpha(0)) = \alpha_i(0), \quad i \in I_+^0, \quad \gamma_i^\ell(0, \alpha(\ell)) = \alpha_i(\ell), \quad i \in I_-^\ell.$$

A6. Функции $(x, t, u, v) \rightarrow q_j(x, t, u, v)$, $j = 1, \dots, n$ не зависят от тех v_k , для которых $c_k \neq c_j$.

A7. Функции $r_j(t, 0, u, v) \geq 0$ при $c_j = 0$, а при $c_j = \ell$ пусть $r_j(t, \ell, u, v) \leq 0$.

A8. Пусть существует неотрицательная суммируемая на $[0, \ell]$ функция $x \rightarrow M(x)$ такая, что

$$|q_j(x, t, w)| \leq M(x)|v|, \quad j = 1, \dots, n.$$

Кроме того предположим что квадрат $M(x)$ тоже является суммируемой функцией.

A9. Функции $x \rightarrow \alpha_i(x)$, $i = 1, \dots, m$ липшицевы с константой A_1 и ограничены по модулю сверху константой A .

A10. Функции $(t, u) \rightarrow \gamma_i^0(t, u)$ ($i \in I_+^0$), $(t, u) \rightarrow \gamma_i^\ell(t, u)$ ($i \in I_-^\ell$), $t \rightarrow \beta_j(t)$ будем предполагать локально липшицевыми по t, u с константами Γ_1, Γ_2 и B_1 соответственно.

A11. Пусть $\gamma_i^0(t, u)$, $i \in I_+^0$ не зависит от тех u_k , для которых $k \in I_+^0$, а $\gamma_i^\ell(t, u)$, $i \in I_-^\ell$ не зависит от тех u_k , для которых $k \in I_-^\ell$. Пусть $T \in (0, T_0]$.

Введем обозначение $\delta = \min_j \min\{c_j, \ell - c_j\}$ $c_j \neq 0, c_j \neq \ell$.

Если $c_j \neq 0$ и $c_j \neq \ell$, то для таких j положим

$$D_j^0 = \{(x, t) \in \Pi(T) \mid 0 \leq x \leq c_j - RT; 0 \leq t \leq T\},$$

$$D_j^\ell = \{(x, t) \in \Pi(T) \mid c_j + RT \leq x \leq \ell; 0 \leq t \leq T\},$$

$$D_j^c = \Pi(T) \setminus (D_j^0 \cup D_j^\ell) = \{(x, t) \in \Pi(T) \mid c_j - RT \leq x \leq c_j + RT; 0 \leq t \leq T\}.$$

Если же $c_j = 0$, то полагаем

$$D_j^0 = \emptyset, \quad D_j^\ell = \{(x, t) \in \Pi(T) \mid c_j + RT \leq x \leq \ell; 0 \leq t \leq T\}, \quad D_j^c = \Pi(T) \setminus D_j^\ell.$$

Аналогично поступаем при $c_j = \ell$. Обозначим

$$\|v\| = \max_j \max\{\max_{D_j^0}(|v_j(x, t)| \exp(-H(c_j - RT - x))), \max_{D_j^c} |v_j(x, t)|, \max_{D_j^\ell}(|v_j(x, t)| \exp(-H(x - c_j - RT)))\},$$

$$\|u\| = \max_{\Pi(T)} |u|, \quad \|w\| = \max\{\|u\|, \|v\|\}, \quad \|s\| = \max_{\Pi(T)} |s|,$$

где константа $H > 0$ будет выбрана позже.

Замечание 1. Очевидно, что

$$\|v\| \leq \max_{\Pi(T)} |v(x, t)|, \quad \|w\| \leq \max_{\Pi(T)} |w(x, t)| \leq \|w\| \exp(H\ell).$$

Замечание 2. Пусть $U > 0$ — некоторая константа. Предположим, что $\|u\| \leq U$. Из (7), (8) и свойств функций q_j, r_j , с помощью леммы Гронуолла, сразу получаем априорные оценки: $\|v\| \leq V$, $\|s\| \leq S$, где V, S — некоторые константы.

Действительно из формулы (7) и предположения A8 получаем

$$|v_j(x, t)| \leq |\beta_j(t)| + \int_{s_j(t, w)}^x q_j(\xi, t, w(\xi, t)) d\xi \leq B + \int_0^\ell M(\xi) |v(\xi, t)| d\xi.$$

Следовательно $|v(x, t)| \leq B + \int_0^\ell M(\xi) |v(\xi, t)| d\xi$. Поэтому $|v(x, t)| \leq B \exp(\int_0^\ell M(\xi) d\xi)$,

откуда, используя замечание 1, получаем требуемый результат. Для функций s_j оценка может быть получена аналогично.

Рассмотрим пространство $\mathbb{E}$ непрерывных функций $w: \Pi(T) \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$, причем функции $(x, t) \rightarrow u(x, t)$ будем предполагать липшицевыми по x, t , а функции $(x, t) \rightarrow v(x, t)$ — липшицевыми по x . Пусть $\mathbb{E}_0(T)$ — шар $\|w\| \leq P_0 = \max\{U, V\}$ в этом пространстве.

Через $\mathbb{E}_1(T, L)$ обозначим множество функций $(u, v) \in \mathbb{E}_0(T)$ таких, что константы Липшица для функции $(x, t) \rightarrow u(x, t)$ (по x, t) и для функции $(x, t) \rightarrow v(x, t)$ (по x) ограничены сверху величиной $L > 0$.

Решение задачи

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_i(x, t, w(x, t)), \quad i = 1, \dots, m, \quad x(\check{t}) = \check{x}, \quad w \in \mathbb{E}_0(T), \quad (15)$$

(где равенство понимается в смысле равенства почти всюду) будем называть характеристикой i -ого семейства, соответствующей функции w , и обозначать через $\varphi_i(t; \check{x}, \check{t}, w)$. Решение задачи

$$\frac{ds_j}{dt} = r_j(t, s(t), w(s_j(t), t)), \quad j = 1, \dots, n, \quad s_j(0) = c_j, \quad w \in \mathbb{E}_0(T) \quad (16)$$

(где равенство понимается в смысле равенства почти всюду) будем обозначать через $s_j(t; w)$ и называть j -ой (внутренней) границей.

В силу условий A2-A4 и при условии, что $w \in \mathbb{E}_0(T)$, функции λ_i, r_j удовлетворяют условиям Каратеодори, а поэтому обобщенные (абсолютно непрерывные) решения задач (15), (16) существуют, единственны и могут быть продолжены до границы прямоугольника $\Pi(T)$.

Замечание 3. При $T \leq \frac{1}{R} \min\{\min_{j; c_j \neq 0} c_j, \ell - \max_{j; c_j \neq \ell} c_j\} := \frac{1}{R} \delta$ решение задачи (16) достигает границы $t = T$.

Действительно $|\int_0^t \frac{ds_j}{d\tau} d\tau| = |\int_0^t r_j(\tau, s(\tau), w(s_j(\tau), \tau)) d\tau|$, то $c_j - RT \leq s_j(t; w) \leq c_j + RT$, а следовательно из-за свойств функций r_j имеем $\min_{j; c_j \neq 0} c_j - RT \leq |s| \leq \max_{j; c_j \neq \ell} c_j + RT$; таким образом при $\min_{j; c_j \neq 0} c_j - RT \geq 0$, $\max_{j; c_j \neq \ell} c_j + RT \leq \ell$ решение задачи (16) достигает границы $t = T$. Отсюда получаем требуемое утверждение.

Через $\chi_i(\check{x}, \check{t}, w)$ обозначим то наименьшее значение аргумента t , для которого решение задачи (16) $\varphi_i(t; \check{x}, \check{t}, w)$ определено. При этом там, где это не может вызвать недоразумений, величины $\varphi_i(t; \check{x}, \check{t}, w)$, $\chi_i(\check{x}, \check{t}, w)$ будем иногда кратко обозначать как $\varphi_i^{\check{x}}(t)$, $\chi_i^{\check{x}}$ или $\varphi_i^{\check{t}}(t)$, $\chi_i^{\check{t}}$, или $\varphi_i^w(t)$, χ_i^w (верхний индекс подчеркивает зависимость либо от начального условия, либо от выбора функции w).

Для $i = 1, \dots, m$ введем множества

$$\begin{aligned} \Pi_i^\alpha(w) &= \{(x, t) \in \Pi(T) \mid \chi_i(x, t, w) = 0\}, \\ \Pi_i^0(w) &= \{(x, t) \in \Pi(T) \mid \chi_i(x, t, w) > 0, \varphi_i(\chi_i(x, t, w); x, t, w) = 0\}, \\ \Pi_i^\ell(w) &= \{(x, t) \in \Pi(T) \mid \chi_i(x, t, w) > 0, \varphi_i(\chi_i(x, t, w); x, t, w) = \ell\}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\mathfrak{R}_i[w](x, t) = \begin{cases} \alpha_i(\varphi_i(0; x, t, w)), & i = \overline{1, m}, \quad (x, t) \in \Pi_i^\alpha(w), \\ \gamma_i^0(\chi_i(x, t, w), u(0, \chi_i(x, t, w))), & i \in I_+^0, \quad (x, t) \in \Pi_i^0(w), \\ \gamma_i^\ell(\chi_i(x, t, w), u(\ell, \chi_i(x, t, w))), & i \in I_-^\ell, \quad (x, t) \in \Pi_i^\ell(w), \end{cases} \quad (17)$$

$$\mathfrak{I}_i[w](x, t) = \int_{\chi_i(x, t, w)}^t f_i(\varphi_i(\tau; x, t, w), \tau, w(\varphi_i(\tau; x, t, w), \tau)) d\tau, \quad (18)$$

$$\mathfrak{A}_i[w](x, t) = \mathfrak{R}_i[w](x, t) + \mathfrak{I}_i[w](x, t), \quad i = 1, \dots, m, \quad (19)$$

$$\mathfrak{B}_j[w](x, t) = \beta_j(t) + \int_{s_j(t; w)}^x q_j(\xi, t, w(\xi, t)) d\xi, \quad j = 1, \dots, n. \quad (20)$$

Замечание 4. В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что замечание 3 выполнено, что гарантирует определенность формулы (20) для любых $(x, t) \in \Pi(T)$.

Определение. Пусть непрерывная функция $w = (u, v) : \Pi(T) \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ удовлетворяет системе

$$\begin{cases} u_i(x, t) = \mathfrak{A}_i[w](x, t), & i = 1, \dots, m, \\ v_j(x, t) = \mathfrak{B}_j[w](x, t), & j = 1, \dots, n, \end{cases}$$

причем u — липшицева по x, t , а v — липшицева по x .

Тогда w будем называть обобщенным непрерывным решением задачи (6)-(13).

Легко проверяется интегрированием вдоль характеристик, что классическое решение является в то же время и обобщенным непрерывным.

2. Локальная разрешимость задачи. Покажем, что если выполнены сформулированные в п.1 предположения, то при достаточно большом значении L и достаточно малой величине $T > 0$ оператор $\mathfrak{S} = (\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_m, \mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_n)$ имеет неподвижную точку, которая и является обобщенным непрерывным решением. Доказательство этого утверждения разобьем на ряд лемм.

Замечание 5. Поскольку постановка задачи для $i \in I_+^0$ вполне аналогична случаю $i \in I_-^\ell$, то мы в дальнейшем, как правило, будем рассматривать только одну область, например $\bar{\Pi}_i^0(w)$ (надчеркиванием обозначено замыкание), считая что в области $\bar{\Pi}_i^\ell(w)$ рассуждения аналогичны.

Замечание 6. Поскольку $|\lambda_i(x, t, w)| \leq \Lambda$, то область $\bar{\Pi}_i^0(w)$ принадлежит области Δ , ограниченной линиями $x = 0$, $x = \Lambda t$, $t = T$.

Допустим, что выполняется следующее предположение:

A12. Существуют такие постоянные $\varepsilon_0 \in (0, \ell)$ и $\Lambda_0 > 0$, что все значения $\lambda_i(x, t, w)$ ($i \in I_+^0$) при $0 \leq x \leq \varepsilon_0$ и $-\lambda_i(x, t, w)$ ($i \in I_-^\ell$) при $\ell - \varepsilon_0 \leq x \leq \ell$ не меньше величины Λ_0 при $(t, w) \in D^1(T_0, P_0)$.

Замечание 7. Если условие () выполнено (для функций λ_i) с $\Lambda_1 = \text{const}$, то для $w \in \mathbb{E}_0(T)$, $(x, t) \in \bar{\Pi}_i^0(w) \cup \bar{\Pi}_i^\ell(w)$ и достаточно малом $T > 0$ справедливы неравенства

$$\lambda_i(x, t, w) \geq \Lambda_0 \quad (i \in I_+^0), \quad \lambda_i(x, t, w) \leq -\Lambda_0 \quad (i \in I_-^\ell),$$

где $\Lambda_0 > 0$ — некоторая константа, т.е. выполнено условие A12.

Доказательство. Так как $|\lambda_i| \leq \Lambda$, то при $0 < 2\Lambda T < \ell$ будет $\bar{\Pi}_i^0(w) \cap \bar{\Pi}_i^\ell(w) = \emptyset$. Из сохранения знака и непрерывности $\lambda_i(x, t, w)$ ($i \in I_+^0$) следует, что $\lambda_i(0, t, w) \geq 2\Lambda_0 > 0$ для некоторого Λ_0 . Из липшицевости функции $\lambda_i(x, t, w)$ ($i \in I_+^0$) следует, что при $x \leq \Lambda_0/\Lambda_1$ будет выполняться первое из рассматриваемых неравенств. Однако если $T < \Lambda_0/(\Lambda_1\Lambda)$ то $x \leq \Lambda_0/\Lambda_1$ и $\Delta \subseteq \square$ так что $\bar{\Pi}_i^0(w) \subseteq \square$, где $\square$ — область, ограниченная линиями $x = 0$, $t = 0$, $x = \Lambda_0/\Lambda_1$. Поэтому при такой величине T для $(x, t) \in \bar{\Pi}_i^0(w)$ выполнено первое из доказываемых неравенств. Второе неравенство доказывается аналогично.

Замечание 8. Далее через M_h ($h = 1, \dots$) обозначаются константы, не возрастающие с ростом L . При этом отметим, что поскольку мы всегда будем выбирать величину $T > 0$ достаточно малой, то интегралы вида $\int_0^T L F_2(\tau) d\tau$ можно считать ограниченными. Поэтому в выражения для констант M_h могут входить и эти интегралы.

Обозначим $\nu_0 = \exp(H\ell) \int_0^T \Lambda_2(\tau) d\tau$.

Лемма 1. Если $w^1, w^2 \in \mathbb{E}_1(T, L)$, то для $i = 1, \dots, m$, $(x^1, t^1), (x^2, t^2) \in \Pi(T)$, $t \leq \min\{t^1, t^2\}$ и t принадлежит области определения $\varphi_i(\tau; x^1, t^1, w^1)$ и $\varphi_i(\tau; x^2, t^2, w^2)$ справедлива оценка

$$|\varphi_i(t; x^1, t^1, w^1) - \varphi_i(t; x^2, t^2, w^2)| \leq M_1(|x^1 - x^2| + \Lambda|t^1 - t^2| + \nu_0\|w^1 - w^2\|).$$

Доказательство. Предполагая для определенности, что $t^1 \geq t^2 \geq t$, из (15) получаем

$$|\varphi_i(t; x^1, t^1, w^1) - \varphi_i(t; x^2, t^2, w^2)| \leq |x^1 - x^2| + \Lambda|t^1 - t^2| + \int_t^{t^2} (\Lambda_1(\tau) + L\Lambda_2(\tau)) |\varphi_i(\tau; x^1, t^1, w^1) - \varphi_i(\tau; x^2, t^2, w^2)| d\tau + \max_{\Pi(T)} |w^1(x, t) - w^2(x, t)| \int_t^{t^2} \Lambda_2(\tau) d\tau.$$

Отсюда с помощью леммы Гронуолла имеем $|\varphi_i(t; x^1, t^1, w^1) - \varphi_i(t; x^2, t^2, w^2)| \leq (|x^1 - x^2| + \Lambda|t^1 - t^2| + \exp(H\ell)\|w^1 - w^2\| \int_0^T \Lambda_2(\tau) d\tau) \exp(\int_0^T (\Lambda_1(\tau) + L\Lambda_2(\tau)) d\tau)$, что доказывает лемму с $M_1 = \exp(\int_0^T (\Lambda_1(\tau) + \Lambda_2(\tau)L) d\tau)$.

Лемма 2. Если $w^1, w^2 \in \mathbb{E}_1(T, L)$, то для $i \in I_+^0$, $\max\{x^1, x^2\} \leq \varepsilon_0$, и для любого x^3 такого, что $0 \leq x^3 \leq \min\{x^1, x^2\}$ справедлива оценка

$$|\tau^1 - \tau^2| \leq (|x^1 - x^2| + \nu_0\|w^1 - w^2\|)M_2,$$

где $t^0 \geq \tau^1 \geq \tau^2$ связаны условием $x^3 = \varphi_i(\tau^1; x^1, t^0, w^1) = \varphi_i(\tau^2; x^2, t^0, w^2)$.

Доказательство. С одной стороны, в силу условия A12 имеем

$$|\varphi_i(\tau^1; x^2, t^0, w^2) - x^3| = \int_{\tau^2}^{\tau^1} \lambda_i(\varphi_i^{w^2}(\tau), \tau, w^2(\varphi_i^{w^2}(\tau), \tau)) d\tau \geq \Lambda_0|\tau^1 - \tau^2|;$$

С другой стороны, в силу леммы 1 получаем $|\varphi_i(\tau^1; x^2, t^0, w^2) - x^3| = |\varphi_i(\tau^1; x^2, t^0, w^2) - \varphi_i(\tau^1; x^1, t^0, w^1)| \leq M_1(|x^1 - x^2| + \nu_0\|w^1 - w^2\|)$. Поэтому $\Lambda_0|\tau^1 - \tau^2| \leq M_1(|x^1 - x^2| + \nu_0\|w^1 - w^2\|)$, откуда и вытекает требуемая оценка с $M_2 = M_1/\Lambda_0$.

Следствие 1. Пусть величина T такова, что выполняется неравенство

$$\Lambda T \leq \varepsilon_0. \quad (21)$$

Тогда для $(x^1, t) \in \bar{\Pi}_i^0(w^1)$, $(x^2, t) \in \bar{\Pi}_i^0(w^2)$ справедлива оценка

$$|\chi_i(x^1, t, w^1) - \chi_i(x^2, t, w^2)| \leq M_2(|x^1 - x^2| + \nu_0\|w^1 - w^2\|).$$

Следствие 2. Пусть $(x^1, t) \in \bar{\Pi}_i^0(w^1)$, $(x^2, t) \in \bar{\Pi}_i^\alpha(w^2)$ и пусть $x^3 = \varphi_i(t^3; x^1, t^0, w^1) = \varphi_i(0; x^2, t^0, w^2)$. Заметим, что $\chi_i(x^1, t^0, w^1) \leq t^3$. Поэтому, полагая $\tau^1 = t^3$, $\tau^2 = 0$, в силу леммы 2 получаем, что

$$|\chi_i(x^1, t^0, w^1)| \leq t^3 - 0 \leq M_2(|x^1 - x^2| + \nu_0\|w^1 - w^2\|).$$

Лемма 3. Для $w^1, w^2 \in \mathbb{E}_1(T, L)$ справедлива оценка

$$\max_{1 \leq j \leq n} |s_j(t; w^1) - s_j(t; w^2)| \leq M_3\|w^1 - w^2\|.$$

Доказательство. Из (16) следует, что $|s_j(t; w^1) - s_j(t; w^2)| \leq \int_0^t (R_1(\tau) \max_k |s_k(\tau; w^1) - s_k(\tau; w^2)| + R_2(\tau) |w^1(s_j(\tau; w^1), \tau) - w^2(s_j(\tau; w^2), \tau)|) d\tau \leq \int_0^t (\max_k |s_k(\tau; w^1) - s_k(\tau; w^2)| \times (R_1(\tau) + LR_2(\tau)) + R_2(\tau) \|w^1 - w^2\| e^{H\ell}) d\tau$. Отсюда с помощью леммы Гронуолла получаем требуемую оценку с постоянной

$$M_3 = \int_0^T R_2(\tau) d\tau \cdot \exp\left(\int_0^T (R_1(\tau) + LR_2(\tau)) d\tau + H\ell\right).$$

Перейдем теперь к изучению свойств функции $(x, t) \rightarrow \mathfrak{S}[w](x, t)$.

Лемма 4. Пусть $w \in \mathbb{E}_1(T, L)$. Тогда функция $\mathfrak{S}[w](x, t)$ является непрерывной в $\Pi(T)$.

Доказательство. Непрерывность функции $\mathfrak{A}_i[w](x, t)$ ($i = 1, \dots, m$) в каждом из множеств $\Pi_i^\alpha(w)$, $\Pi_i^0(w)$, $\Pi_i^\ell(w)$ сразу следует из (17)-(19). Осталось лишь проверить непрерывность функции $\mathfrak{A}_i[w](x, t)$ на линиях $x = \varphi_i(t; 0, 0, w)$ и $x = \varphi_i(t; \ell, 0, w)$. Для определенности рассмотрим линию $x = \varphi_i(t; 0, 0, w)$. Очевидно, что для точек (x, t) , принадлежащих этой линии, $\chi_i(x, t, w) = 0$, поэтому, используя (18), получаем, что для этих точек выполняется соотношение $[\mathfrak{I}_i[w](x, t)]_{\text{лев}} - [\mathfrak{I}_i[w](x, t)]_{\text{пр}} = 0$. Далее используя (17) и условия согласования A5 получаем

$$\begin{aligned} [\mathfrak{R}_i[w](x, t)]_{\text{лев}} - [\mathfrak{R}_i[w](x, t)]_{\text{пр}} &= \gamma_i^0(0, u(0, 0)) - \alpha_i(\varphi_i(0; x, t, w)) = \\ &= \gamma_i^0(0, u(0, 0)) - \alpha_i(0) = 0, \end{aligned}$$

т.к. $\varphi_i(0; x, t, w) = 0$ для точек (x, t) , лежащих на данной линии. Отсюда окончательно получаем $[\mathfrak{A}_i[w](x, t)]_{\text{лев}} - [\mathfrak{A}_i[w](x, t)]_{\text{пр}} = 0$.

Случай точек, лежащих на линии $x = \varphi_i(t; \ell, 0, w)$, рассматривается аналогично.

Непрерывность функции $\mathfrak{B}_j[w](x, t)$ ($j = 1, \dots, n$) во всем прямоугольнике $\Pi(T)$ сразу следует из (20).

Лемма 5. Если $(x^1, t^1), (x^2, t^2) \in \bar{\Pi}_i^\alpha(w)$, $w \in \mathbb{E}_1(T, L)$, то

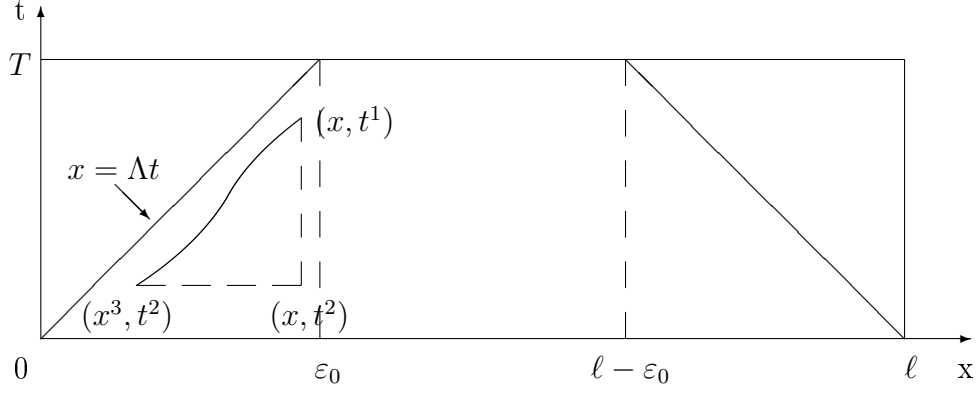
$$|\mathfrak{A}_i[w](x^1, t^1) - \mathfrak{A}_i[w](x^2, t^2)| \leq M_5(|x^1 - x^2| + |t^1 - t^2|).$$

Доказательство. Используем лемму 1 при $t^1 = t^2 = t$

$$\begin{aligned} |\mathfrak{A}_i[w](x^1, t) - \mathfrak{A}_i[w](x^2, t)| &\leq A_1 M_1 |x^1 - x^2| + \int_0^t (F_1(\tau) + LF_2(\tau)) |\varphi_i^{x^1}(\tau) - \varphi_i^{x^2}(\tau)| d\tau \leq \\ &\leq (A_1 M_1 + M_1 \int_0^T (F_1(\tau) + LF_2(\tau)) d\tau) |x^1 - x^2| \leq M_4 |x^1 - x^2|, \end{aligned}$$

где $M_4 = A_1 M_1 + M_1 \int_0^T (F_1(\tau) + LF_2(\tau)) d\tau$.

Далее, пусть $x = x^1 = x^2$, $t^1 \geq t^2$. Тогда существует точка $(x^3, t^2) \in \bar{\Pi}_i^\alpha(w)$ такая, что $x^3 = \varphi_i(t^2; x, t^1, w)$ (рис.1).

Рис.1. Случай, когда $(x, t^1), (x, t^2) \in \Pi_i^\alpha(w)$

Поэтому $|\mathfrak{A}_i[w](x, t^1) - \mathfrak{A}_i[w](x, t^2)| \leq |\mathfrak{A}_i[w](x, t^1) - \mathfrak{A}_i[w](x^3, t^2)| + |\mathfrak{A}_i[w](x^3, t^2) - \mathfrak{A}_i[w](x, t^2)| \leq M_4|x - x^3| + |\int_{t^2}^{t^1} F d\tau|$, но, поскольку $|x - x^3| = |x - \varphi_i(t^2; x, t^1, w)| \leq |\int_{t^2}^{t^1} \lambda_i(\varphi_i^{t^1}(\tau), \tau, w(\varphi_i^{t^1}(\tau), \tau)) d\tau| \leq \Lambda|t^1 - t^2|$, отсюда получаем требуемую оценку с постоянной $M_5 = M_4 \max\{1, \Lambda\} + F$.

Лемма 6. Если $(x^1, t), (x^2, t) \in \bar{\Pi}_i^0(w)$, $w \in \mathbb{E}_1(T, L)$, то

$$|\mathfrak{R}_i[w](x^1, t) - \mathfrak{R}_i[w](x^2, t)| \leq \Gamma_1 M_2 |x^1 - x^2| + \Gamma_2 \max_{k \notin I_+^0} |u_k(0, \chi_i^{x^1}) - u_k(0, \chi_i^{x^2})|.$$

Доказательство. Пусть $\chi_i(x^2, t, w) \leq \chi_i(x^1, t, w)$. Тогда с помощью следствия 1 из леммы 2 получаем $|\mathfrak{R}_i[w](x^1, t) - \mathfrak{R}_i[w](x^2, t)| = |\gamma_i^0(\chi_i^{x^1}, u(0, \chi_i^{x^1})) - \gamma_i^0(\chi_i^{x^2}, u(0, \chi_i^{x^2}))| \leq \Gamma_1 |\chi_i^{x^1} - \chi_i^{x^2}| + \Gamma_2 \max_{k \notin I_+^0} |u_k(0, \chi_i^{x^1}) - u_k(0, \chi_i^{x^2})|$, откуда и вытекает требуемая оценка.

Следствие 1. В условиях леммы 6 справедлива оценка

$$|\mathfrak{R}_i[w](x^1, t) - \mathfrak{R}_i[w](x^2, t)| \leq (\Gamma_1 + L\Gamma_2)M_2|x^1 - x^2|.$$

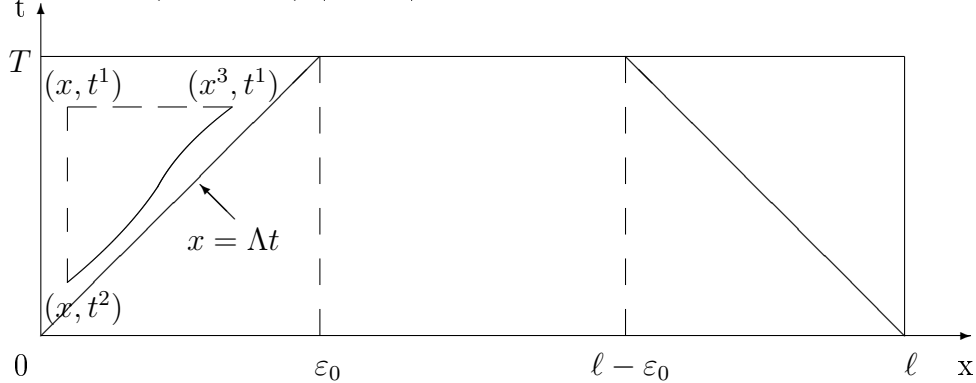
Следствие 2. Если $(x^1, t^1), (x^2, t^2) \in \bar{\Pi}_i^0(w)$, то из (18) вытекает, что при $t = t^1 = t^2$ справедлива оценка

$$|\mathfrak{I}_i[w](x^1, t) - \mathfrak{I}_i[w](x^2, t)| \leq \int_{\chi_i^{x^1}}^t |f_i(\varphi_i^{x^1}(\tau), \tau, w(\varphi_i^{x^1}(\tau), \tau)) - f_i(\varphi_i^{x^2}(\tau), \tau, w(\varphi_i^{x^2}(\tau), \tau))| d\tau + F|\chi_i^{x^1} - \chi_i^{x^2}| \leq M_6|x^1 - x^2|,$$

где $M_6 = M_1 \int_0^T (F_1(\tau) + LF_2(\tau)) d\tau + FM_2$.

Поэтому с учетом следствия 1 из леммы 6 получаем $|\mathfrak{A}_i[w](x^1, t) - \mathfrak{A}_i[w](x^2, t)| \leq (1 + L)M_7|x^1 - x^2|$, где $M_7 = \max\{\Gamma_1, \Gamma_2\}M_2 + M_6$.

Далее, полагая $x = x^1 = x^2$, $t^1 \geq t^2$ и вводя промежуточную точку $(x^3, t^1) \in \bar{\Pi}_i^0(w)$, такую, что $x^3 = \varphi_i(t^1; x, t^2, w)$ (рис.2.)

Рис.2. Случай, когда $(x, t^1), (x, t^2) \in \Pi_i^0(w)$

(существование этой точки легко доказывается исходя из свойств функции λ_i и предположения A12) получим

$$\begin{aligned} |\mathfrak{A}_i[w](x, t^1) - \mathfrak{A}_i[w](x, t^2)| &\leq |\mathfrak{A}_i[w](x, t^2) - \mathfrak{A}_i[w](x^3, t^1)| + |\mathfrak{A}_i[w](x^3, t^1) - \\ &\quad - \mathfrak{A}_i[w](x, t^1)| \leq F|t^1 - t^2| + M_7(1 + L)|x^3 - x| \leq \\ &\leq F|t^1 - t^2| + M_7(1 + L)\Lambda|t^1 - t^2| \leq M_8(1 + L)|t^1 - t^2|, \text{ где } M_8 = F + \max\{1, \Lambda\}M_7. \end{aligned}$$

Следовательно, при $(x^1, t^1), (x^2, t^2) \in \bar{\Pi}_i^0(w)$ справедлива оценка

$$|\mathfrak{A}_i[w](x^1, t^1) - \mathfrak{A}_i[w](x^2, t^2)| \leq M_8(1 + L)(|x^1 - x^2| + |t^1 - t^2|).$$

Следствие 3. Если $(x^1, t^1) \in \bar{\Pi}_i^0(w)$, $(x^2, t^2) \in \bar{\Pi}_i^\alpha(w)$, то при $t = t^1 = t^2$ вводя промежуточную характеристику $\varphi_i(t; 0, 0, w)$ и, соответственно, промежуточную точку $x^3 = \varphi_i(t; 0, 0, w)$ (рис.3)

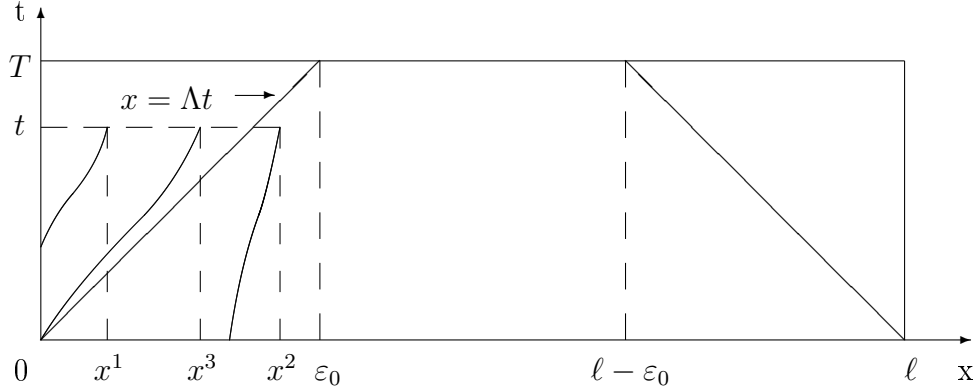


Рис.3. Случай, когда $(x^1, t) \in \Pi_i^0(w)$, $(x^2, t) \in \Pi_i^\alpha(w)$

пользуясь следствием 2 из леммы 2, а также леммами 5 и 6, получаем

$$\begin{aligned} |\mathfrak{A}_i[w](x^1, t) - \mathfrak{A}_i[w](x^2, t)| &\leq |\mathfrak{A}_i[w](x^1, t) - \mathfrak{A}_i[w](x^3, t)| + \\ &\quad |\mathfrak{A}_i[w](x^3, t) - \mathfrak{A}_i[w](x^2, t)| \leq ((1 + L)M_7 + M_5)|x^1 - x^2|. \end{aligned}$$

Аналогично при $x = x^1 = x^2$ вводя промежуточную точку t^3 , такую что $x = \varphi_i(t^3; 0, 0, w)$ (рис.4)

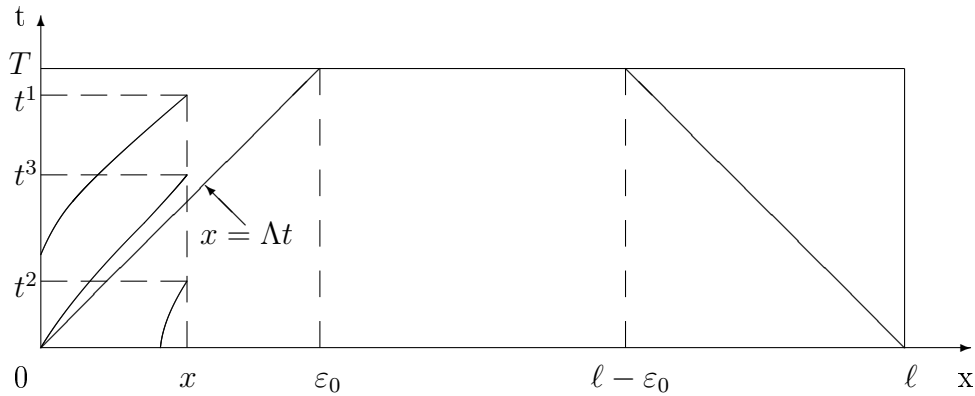


Рис.4. Случай, когда $(x, t^1) \in \Pi_i^0(w)$, $(x, t^2) \in \Pi_i^\alpha(w)$

пользуясь предыдущими следствиями из леммы 6 получаем

$$|\mathfrak{A}_i[w](x, t^1) - \mathfrak{A}_i[w](x, t^2)| \leq (M_8(1 + L) + M_5)|t^1 - t^2|.$$

Следовательно, при $(x^1, t^1) \in \bar{\Pi}_i^0(w)$, $(x^2, t^2) \in \bar{\Pi}_i^\alpha(w)$ справедлива оценка

$$|\mathfrak{A}_i[w](x^1, t^1) - \mathfrak{A}_i[w](x^2, t^2)| \leq (M_8 + M_5)(1 + L)(|x^1 - x^2| + |t^1 - t^2|).$$

Следствие 4. Если $(x^1, t^1) \in \bar{\Pi}_i^0(w)$, $(x^2, t^2) \in \bar{\Pi}_i^\ell(w)$, то при $t = t^1 = t^2$ вводя промежуточную характеристику $\varphi_i(t; \ell, 0, w)$ и, соответственно, точку $x^3 = \varphi_i(t; \ell, 0, w)$, пользуясь предыдущими следствиями из леммы 6 получаем

$$\begin{aligned} |\mathfrak{A}_i[w](x^1, t) - \mathfrak{A}_i[w](x^2, t)| &\leq |\mathfrak{A}_i[w](x^1, t) - \mathfrak{A}_i[w](x^3, t)| + \\ &+ |\mathfrak{A}_i[w](x^3, t) - \mathfrak{A}_i[w](x^2, t)| \leq ((1+L)M_7 + M_5)|x^1 - x^3| + \\ &+ (1+L)M_7|x^3 - x^2| \leq ((1+L)M_7 + M_5)|x^1 - x^2|. \end{aligned}$$

Далее, пусть для определенности $t^1 > t^2$, тогда для $(x^1, t^1) \in \bar{\Pi}_i^0(w)$, $(x^2, t^2) \in \bar{\Pi}_i^\ell(w)$ вводя промежуточную точку $(x^2, t^1) \in \bar{\Pi}_i^\ell(w)$ получаем

$$\begin{aligned} |\mathfrak{A}_i[w](x^1, t^1) - \mathfrak{A}_i[w](x^2, t^2)| &\leq |\mathfrak{A}_i[w](x^1, t^1) - \mathfrak{A}_i[w](x^2, t^1)| + \\ &+ |\mathfrak{A}_i[w](x^2, t^1) - \mathfrak{A}_i[w](x^2, t^2)| \leq ((1+L)M_7 + M_5)|x^1 - x^2| + \\ &+ (M_8(1+L) + M_5)|t^1 - t^2| \leq (M_8(1+L) + M_5)(|x^1 - x^2| + |t^1 - t^2|). \end{aligned}$$

Итак, во всем прямоугольнике $\Pi(T)$ функция $(x, t) \rightarrow \mathfrak{A}[w](x, t)$ удовлетворяет условию Липшица по обоим аргументам с константой $M_9(1+L)$, где $M_9 = M_8 + M_5$.

Лемма 7. В прямоугольнике $\Pi(T)$ функция $(x, t) \rightarrow \mathfrak{B}[w](x, t)$ липшицева по x .

Доказательство. Липшицевость по x с константой Q для функции $(x, t) \rightarrow \mathfrak{B}[w](x, t)$ сразу следует из (20).

Лемма 8. Пусть $\mathbb{E}_2(T, L, P) = \{w \in \mathbb{E}_1(T, L) \mid \max\{\|v\|, \|u - \alpha(x)\|\} \leq P\}$, где $\max\{A, B, \Gamma\} < P \leq P_0 - A$ - некоторая константа, причем функции $(x, t) \rightarrow w(x, t)$ удовлетворяют условиям (9)-(13). Тогда при достаточно большом значении H и достаточно малой величине $T > 0$ имеем

$$\mathfrak{S} : \mathbb{E}_2(T, L, P) \rightarrow \mathbb{E}_2(T, M_{10}(1+L), P), \quad M_{10} = \max\{M_9, Q\}.$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что при $w \in \mathbb{E}_2(T, L, P)$ выполняется неравенство $\|u(x, t)\| \leq P + A \leq P_0$. Далее, пусть $(x, t) \in \bar{\Pi}_i^\alpha(w)$, тогда

$$|\mathfrak{A}_i[w](x, t) - \alpha_i(x)| \leq A_1|\varphi_i(0; x, t, w) - x| + \int_0^t F d\tau \leq A_1\Lambda T + FT = (A_1\Lambda + F)T.$$

Если же $(x, t) \in \bar{\Pi}_i^0(w)$ (для $(x, t) \in \bar{\Pi}_i^\ell(w)$ доказательство аналогично), то

$$\begin{aligned} |\mathfrak{A}_i[w](x, t) - \alpha_i(x)| &= |\gamma_i^0(\chi_i(x, t, w), u(0, \chi_i(x, t, w))) - \alpha_i(x)| \leq \\ &\leq |\gamma_i^0(\chi_i(x, t, w), u(0, \chi_i(x, t, w))) - \gamma_i^0(0, u(0, 0))| + |\gamma_i^0(0, u(0, 0)) - \alpha_i(x)| \leq \\ &\leq (\Gamma_1 + \Gamma_2 L)\chi_i(x, t, w) + |\alpha_i(0) - \alpha_i(x)| \leq (\Gamma_1 + \Gamma_2 L)T + A_1x \leq (\Gamma_1 + \Gamma_2 L + A_1\Lambda)T. \end{aligned}$$

Отсюда получаем $|\mathfrak{A}_i[w](x, t) - \alpha_i(x)| \leq (\Gamma_1 + \Gamma_2 L + A_1\Lambda + F)T$. Следовательно, для $(x, t) \in \Pi(T)$ справедливо неравенство $\|\mathfrak{A}[w] - \alpha_i(x)\| \leq (A_1\Lambda + \Gamma_1 + \Gamma_2 L + F)T$.

Рассмотрим теперь оператор $\mathfrak{B}$. Пусть $(x, t) \in D_j^c$, тогда

$$|\mathfrak{B}_j[w](x, t)| \leq B + \left| \int_x^{s_j(x; w)} q_j(\xi, t, w(\xi, t)) d\xi \right| \leq B + \int_{c_j - RT}^{c_j + RT} Q d\xi \leq B + 2QRT.$$

Пусть, теперь $(x, t) \in D_j^\ell$ (случай $(x, t) \in D_j^0$ рассматривается аналогично), тогда, пользуясь условием A8, получаем

$$\begin{aligned} |\mathfrak{B}_j[w](x, t)| &\leq B + \left| \int_{s_j(x; w)}^x q_j(\xi, t, w(\xi, t)) d\xi \right| \leq B + \int_{s_j(x; w)}^{c_j + RT} |q_j(\xi, t, w(\xi, t))| d\xi + \\ &+ \int_{c_j + RT}^x |q_j(\xi, t, w(\xi, t))| d\xi \leq B + 2QRT + \int_{c_j + RT}^x M(\xi) \max_{k; c_k = c_j} |v_k(\xi, t)| d\xi \leq B + \\ &+ 2QRT + \int_{c_j + RT}^x M(\xi) [\max_{k; c_k = c_j} |v_k(\xi, t)| e^{-H(\xi - c_j - RT)}] e^{H(\xi - c_j - RT)} d\xi \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq B + 2QRT + \|v\| \int_{c_j+RT}^x M(\xi) e^{H(\xi-c_j-RT)} d\xi \leq B + 2QRT + \|v\| \times \\
 &\quad \times \left(\int_0^\ell (M(\xi))^2 d\xi \right)^{1/2} \left(\int_{c_j-RT}^x e^{2H(\xi-c_j-RT)} d\xi \right)^{1/2} = \\
 &= B + 2QRT + \nu_1 \|v\| \sqrt{\frac{1}{2} H^{-1}(e^{2H(x-c_j-RT)} - 1)}, \quad \text{где } \nu_1 = \left(\int_0^\ell (M(\xi))^2 d\xi \right)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Умножая полученное неравенство на $e^{-H(x-c_j-RT)}$ и переходя к максимуму по D_j^ℓ , получим

$$\begin{aligned}
 \max_{D_j^\ell} \{ |\mathfrak{B}_j[w](x, t)| e^{-H(x-c_j-RT)} \} &\leq B + 2QRT + \\
 + \|v\| \nu_1 (2H)^{-1/2} (1 - e^{-2H\ell})^{1/2} &\leq B + 2QRT + \nu_1 P_0 (2H)^{-1/2}.
 \end{aligned}$$

Таким образом для $(x, t) \in \Pi(T)$ справедлива оценка $\|\mathfrak{B}[w](x, t)\| \leq B + 2QRT + \nu_1 P_0 (2H)^{-1/2}$.

Следовательно, при выполнении неравенств

$$(A_1 \Lambda + \Gamma_1 + \Gamma_2 L + F)T < P, \quad B + 2QRT + \nu_1 P_0 (2H)^{-1/2} < P$$

шар $\mathbb{E}_2(T, L, P)$ отображается в шар $\mathbb{E}_2(T, M_{10}(1+L), P)$, что и завершает доказательство леммы.

Рассмотрим теперь результат действия квадрата оператора $\mathfrak{S}$, то есть свойства функции $(x, t) \rightarrow \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w](x, t)$. Так как аргументом оператора $\mathfrak{S}$ теперь являются не просто функции $w \in \mathbb{E}_2(T, L, P)$, а функции вида $\mathfrak{S}[w] \in \mathbb{E}_2(T, M_{10}(1+L), P)$, то можно уточнить константу Липшица для функции $\mathfrak{A}[\mathfrak{S}w](x, t)$.

Лемма 9. Для достаточно большого $L > 0$ и достаточно малого $T > 0$ оператор $\mathfrak{S}^2$ отображает шар $\mathbb{E}_2(T, L, P)$ в себя.

Доказательство. В самом деле, из леммы 5 следует, что для точек $(x^1, t^1), (x^2, t^2) \in \bar{\Pi}_i^\alpha(\mathfrak{S}w)$ выполняется неравенство $|\mathfrak{A}_i[\mathfrak{S}w](x^1, t^1) - \mathfrak{A}_i[\mathfrak{S}w](x^2, t^2)| \leq M_5(|x^1 - x^2| + |t^1 - t^2|)$.

Заметим, что здесь, а также в последующих оценках, в константе M_5 и других содержатся интегралы вида $\int_0^T F_2(\tau) L d\tau$, где в качестве L берется константа Липшица $M_{10}(1+L)$, которая вообще говоря больше чем L и, следовательно, величину T надо выбирать меньше, чем ранее, чтобы эти интегралы не возрастали с ростом L .

Если же $(x^1, t), (x^2, t) \in \bar{\Pi}_i^0(\mathfrak{S}w)$, то это означает, что $i \in I_+^0$. Но тогда $(0, t) \in \bar{\Pi}_k^\alpha(w)$ для $k \notin I_+^0$. Поэтому из леммы 5 и леммы 6 получаем $|\mathfrak{R}_i[\mathfrak{S}w](x^1, t) - \mathfrak{R}_i[\mathfrak{S}w](x^2, t)| \leq \Gamma_1 M_2 |x^1 - x^2| + \Gamma_2 \max_{k \notin I_+^0} |\mathfrak{A}_k[w](0, \chi_i^{x^1}) - \mathfrak{A}_k[w](0, \chi_i^{x^2})| \leq (\Gamma_1 M_2 + \Gamma_2 M_5 M_2) |x^1 - x^2|$. Поэтому, в силу следствия 2 из леммы 6 имеем $|\mathfrak{A}_i[\mathfrak{S}w](x^1, t) - \mathfrak{A}_i[\mathfrak{S}w](x^2, t)| \leq M_{11} |x^1 - x^2|$, где $M_{11} = M_6 + \Gamma_1 M_2 + \Gamma_2 M_5 M_2$.

Итак, во всем прямоугольнике $\Pi(T)$ функция $(x, t) \rightarrow \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w](x, t)$ удовлетворяет условию Липшица по x с константой $M_{12} = \max\{M_{11}, M_5, Q\}$, причем функция $(x, t) \rightarrow \mathfrak{A}[\mathfrak{S}w](x, t)$ удовлетворяет условию Липшица и по t с константой $M_{13} = M_{12} \max\{1, \Lambda\} + F$. Это проверяется с помощью того же приема, который был использован в следствиях из леммы 6.

Следовательно, если P, L фиксированы, то все интегралы вида $\int_0^T F_2(\tau) L d\tau \rightarrow 0$ ($T \rightarrow 0$), значит константа Липшица для функции $\mathfrak{A}[\mathfrak{S}w](x, t)$ стремится к величине $M_{13} \rightarrow \max\{1, \Lambda\} \max\{A_1 \max\{1, \Lambda\} + F; \Lambda_0^{-1}(\Gamma_1 + \Gamma_2(A_1 \max\{1, \Lambda\} + F) + F); Q\} + F$, а следовательно, если изначально взять в качестве константы Липшица L величину большую этого предельного значения, то при любом достаточно малом $T \in (0, T_0]$ выполняется $\mathfrak{S}^2 : \mathbb{E}_2(T, L, P) \rightarrow \mathbb{E}_2(T, L, P)$, что и завершает доказательство леммы 9.

Рассмотрим теперь сжимающие свойства оператора $\mathfrak{S}$. При этом через κ_k мы будем обозначать некоторые константы, характеризующие коэффициент сжатия этого оператора.

Лемма 10. Если $(x, t) \in \bar{\Pi}_i^\alpha(w^1) \cap \bar{\Pi}_i^\alpha(w^2)$, $w^1, w^2 \in \mathbb{E}_2(T, L, P)$, то

$$\|\mathfrak{A}[w^1](x, t) - \mathfrak{A}[w^2](x, t)\| \leq \kappa_1 \|w^1 - w^2\|. \quad (22)$$

Если же $(x, t) \in \bar{\Pi}_i^0(w^1) \cap \bar{\Pi}_i^0(w^2)$, $w^1, w^2 \in \mathbb{E}_2(T, L, P)$, $w^1 = (u^1, v^1)$, $w^2 = (u^2, v^2)$, то

$$|\mathfrak{R}_i[w^1](x, t) - \mathfrak{R}_i[w^2](x, t)| \leq \Gamma_1 M_2 \nu_0 \|w^1 - w^2\| + \Gamma_2 \max_{k \notin I_+^0} |u_k^1(0, \chi_i^{w^1}) - u_k^2(0, \chi_i^{w^2})|. \quad (23)$$

Доказательство. Используя лемму 1, получаем $|\mathfrak{A}_i[w^1](x, t) - \mathfrak{A}_i[w^2](x, t)| \leq \leq (A_1 M_1 \nu_0 + \int_0^T M_1 \nu_0 (F_1(\tau) + L F_2(\tau)) d\tau + \exp(H\ell) \int_0^T F_2(\tau) d\tau) \|w^1 - w^2\| \leq \kappa_1 \|w^1 - w^2\|$, где $\kappa_1 = A_1 M_1 \nu_0 + \int_0^T M_1 \nu_0 (F_1(\tau) + L F_2(\tau)) d\tau + \exp(H\ell) \int_0^T F_2(\tau) d\tau$, откуда и следует (22).

Далее, используя следствие 1 из леммы 2, получаем оценку (23).

Следствие 1. Пусть $(x, t) \in \bar{\Pi}_i^0(w^1) \cap \bar{\Pi}_i^0(w^2)$. Тогда из (23) следует, что

$$|\mathfrak{R}_i[w^1](x, t) - \mathfrak{R}_i[w^2](x, t)| \leq ((\Gamma_1 M_2 + \Gamma_2 L M_2) \nu_0 + \Gamma_2) \|w^1 - w^2\|.$$

Далее $|\mathfrak{I}_i[w^1](x, t) - \mathfrak{I}_i[w^2](x, t)| \leq \int_{\chi_i^{w^2}}^t ((F_1(\tau) + L F_2(\tau)) |\varphi_i^{w^1}(\tau) - \varphi_i^{w^2}(\tau)| + F_2(\tau) \times \times \exp(H\ell) \|w^1 - w^2\|) d\tau + \int_{\chi_i^{w^1}}^{\chi_i^{w^2}} F d\tau \leq (\int_0^T M_1 \nu_0 (F_1(\tau) + L F_2(\tau)) d\tau + \exp(H\ell) \int_0^T F_2(\tau) d\tau + + F M_2 \nu_0) \|w^1 - w^2\|$. Значит $|\mathfrak{A}_i[w^1](x, t) - \mathfrak{A}_i[w^2](x, t)| \leq (\kappa_2 + \Gamma_2 L M_2 \nu_0 + \Gamma_2) \|w^1 - w^2\|$, где $\kappa_2 = \Gamma_1 M_2 \nu_0 + \int_0^T M_1 \nu_0 (F_1(\tau) + L F_2(\tau)) d\tau + \exp(H\ell) \int_0^T F_2(\tau) d\tau + F M_2 \nu_0$.

Лемма 11. Пусть $(x, t) \in \bar{\Pi}_i^\alpha(w^1) \cap \bar{\Pi}_i^0(w^2)$, $w^1, w^2 \in \mathbb{E}_2(T, L, P)$. Тогда справедлива оценка $|\mathfrak{A}_i[w^1](x, t) - \mathfrak{A}_i[w^2](x, t)| \leq (\kappa_5 + \Gamma_2 L M_2 \nu_0) \|w^1 - w^2\|$.

Доказательство. Ясно, что

$$\begin{aligned} |\mathfrak{R}_i[w^1](x, t) - \mathfrak{R}_i[w^2](x, t)| &\leq |\mathfrak{R}_i[w^1](x, t) - \alpha_i(0)| + |\mathfrak{R}_i[w^2](x, t) - \gamma_i^0(0, u^2(0, 0))| \leq \\ &\leq |\alpha_i(\varphi_i^{w^1}(0)) - \alpha_i(0)| + |\gamma_i^0(\chi_i^{w^2}, u^2(0, \chi_i^{w^2})) - \gamma_i^0(0, u^2(0, 0))| \leq \\ &\leq A_1 |\varphi_i(0; x, t, w^1)| + (\Gamma_1 + L \Gamma_2) |\chi_i(x, t, w^2)|. \end{aligned}$$

Далее, в силу предположения A12 и формулы (21) имеем

$$\varphi_i^{w^1}(0) \leq \varphi_i^{w^1}(\chi_i^{w^2}) \quad (\text{рис. 5}),$$

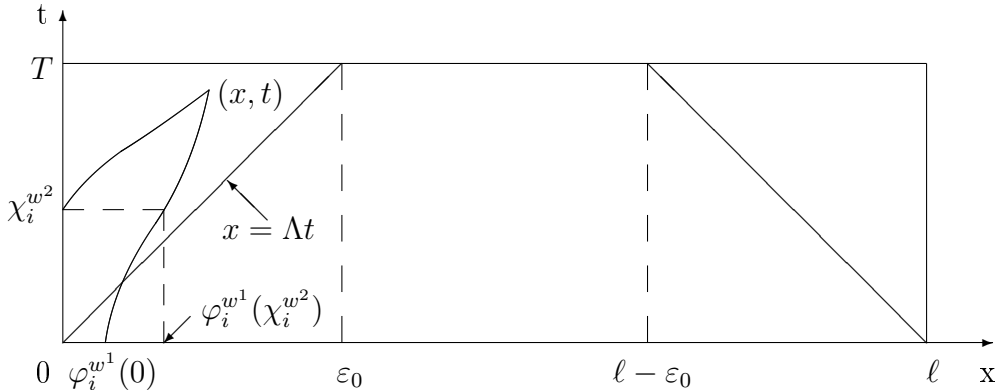


Рис.5. Случай, когда $(x, t) \in \Pi_i^\alpha(w^1) \cap \Pi_i^0(w^2)$

следовательно получим

$$\begin{aligned} |\mathfrak{R}_i[w^1](x, t) - \mathfrak{R}_i[w^2](x, t)| &\leq A_1 |\varphi_i^{w^1}(\chi_i^{w^2}) - 0| + (\Gamma_1 + L\Gamma_2) |\chi_i(x, t, w^2)| \leq \\ &\leq A_1 |\varphi_i^{w^1}(\chi_i^{w^2}) - \varphi_i^{w^2}(\chi_i^{w^2})| + (\Gamma_1 + L\Gamma_2) |\chi_i^{w^2}|. \end{aligned}$$

Но в силу леммы 1 и следствия 2 из леммы 2 мы получаем, что

$$\chi_i(x, t, w^2) \leq |t^3 - 0| \leq M_2 \nu_0 \|w^1 - w^2\| \quad \text{и} \quad |\varphi_i^{w^1}(\chi_i^{w^2}) - \varphi_i^{w^2}(\chi_i^{w^2})| \leq M_1 \nu_0 \|w^1 - w^2\|.$$

Таким образом

$$\begin{aligned} |\mathfrak{R}_i[w^1](x, t) - \mathfrak{R}_i[w^2](x, t)| &\leq (A_1 M_1 \nu_0 + (\Gamma_1 + L\Gamma_2) M_2 \nu_0) \|w^1 - w^2\| \leq \\ &\leq (\kappa_3 + \Gamma_2 L M_2 \nu_0) \|w^1 - w^2\|, \quad \text{где } \kappa_3 = (A_1 M_1 + \Gamma_1 M_2) \nu_0. \end{aligned}$$

$$\text{Далее, } |\mathfrak{I}_i[w^1](x, t) - \mathfrak{I}_i[w^2](x, t)| \leq \int_{\chi_i^{w^2}}^t (F_1(\tau) + LF_2(\tau)) |\varphi_i^{w^1}(\tau) - \varphi_i^{w^2}(\tau)| d\tau +$$

$$\begin{aligned} &+ \int_{\chi_i^{w^2}}^t F_2(\tau) |w^1 - w^2| d\tau + \int_0^{\chi_i^{w^2}} F d\tau \leq (\int_0^T (F_1(\tau) + LF_2(\tau)) M_1 \nu_0 d\tau + \\ &+ \exp(H\ell) \int_0^T F_2(\tau) d\tau + FM_2 \nu_0) \|w^1 - w^2\| \leq \kappa_4 \|w^1 - w^2\|, \end{aligned}$$

$$\text{где } \kappa_4 = \int_0^T (F_1(\tau) + LF_2(\tau)) M_1 \nu_0 d\tau + \exp(H\ell) \int_0^T F_2(\tau) d\tau + FM_2 \nu_0.$$

Итак, получаем требуемое утверждение

$$|\mathfrak{A}_i[w^1](x, t) - \mathfrak{A}_i[w^2](x, t)| \leq (\kappa_3 + \kappa_4 + \Gamma_2 L M_2 \nu_0) \|w^1 - w^2\|, \quad \kappa_5 = \kappa_3 + \kappa_4.$$

□

Следствие 1. Во всем прямоугольнике $\Pi(T)$ справедлива оценка

$$|\mathfrak{A}_i[w^1](x, t) - \mathfrak{A}_i[w^2](x, t)| \leq \kappa_6 \|w^1 - w^2\|, \quad \kappa_6 = \kappa_3 + \kappa_4 + \Gamma_2 L M_2 \nu_0 + \Gamma_2.$$

Лемма 12. Для $w^1, w^2 \in \mathbb{E}_2(T, L, P)$, $w^1 = (u^1, v^1)$, $w^2 = (u^2, v^2)$ в прямоугольнике $\Pi(T)$ справедлива оценка

$$\|\mathfrak{B}[w^1](x, t) - \mathfrak{B}[w^2](x, t)\| \leq (QM_3 + \nu_2 + \nu_3(2H)^{-1/2}) \|w^1 - w^2\|,$$

где вид ν_2, ν_3 будет указан позднее.

Доказательство. Пусть, для определенности, $s_j(t; w^1) \leq s_j(t; w^2)$.

1. Пусть $(x, t) \in D_j^c$ (рис.6):

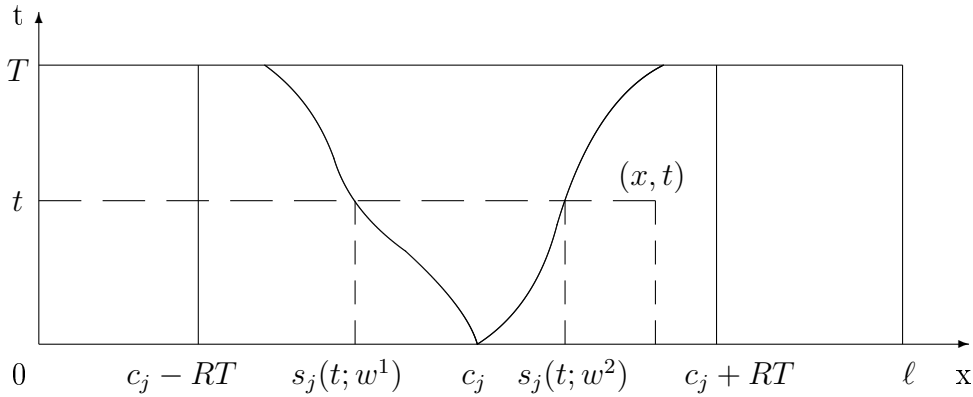


Рис.6. Случай, когда $(x, t) \in D_j^c$

а) Пусть $s_j(t; w^1) \leq s_j(t; w^2) \leq x$, тогда в силу леммы 3 имеем

$$\begin{aligned} |\mathfrak{B}_j[w^1](x, t) - \mathfrak{B}_j[w^2](x, t)| &\leq Q |s_j(t; w^1) - s_j(t; w^2)| + \\ &+ \int_{s_j(t; w^2)}^x Q_2(\xi) \max\{|u^1(\xi, t) - u^2(\xi, t)|; \max_{k; c_k = c_j} |v_k^1(\xi, t) - v_k^2(\xi, t)|\} d\xi \leq \end{aligned}$$

$$\leq QM_3\|w^1 - w^2\| + \int_{c_j-RT}^{c_j+RT} Q_2(x) \max\{|u^1(\xi, t) - u^2(\xi, t)|;$$

$$\max_{k, c_k=c_j} |v_k^1(\xi, t) - v_k^2(\xi, t)|\} d\xi \leq (QM_3 + \nu_2)\|w^1 - w^2\|, \text{ где } \nu_2 = \int_{c_j-RT}^{c_j+RT} Q_2(\xi) d\xi.$$

б) Пусть $s_j(t; w^1) \leq x \leq s_j(t; w^2)$, тогда в силу леммы 3 имеем

$$\begin{aligned} & |\mathfrak{B}_j[w^1](x, t) - \mathfrak{B}_j[w^2](x, t)| \leq \\ & \left| \int_{s_j(t; w^1)}^x q_j(\xi, t, w^1(\xi, t)) d\xi - \int_x^{s_j(t; w^2)} q_j(\xi, t, w^2(\xi, t)) d\xi \right| \leq \\ & \leq Q|x - s_j(t; w^1)| + Q|s_j(t; w^2) - x| = Q|s_j(t; w^1) - s_j(t; w^2)| \leq \\ & \leq QM_3\|w^1 - w^2\|. \end{aligned}$$

с) Пусть $x \leq s_j(t; w^1) \leq s_j(t; w^2)$, тогда аналогично пункту а) получим

$$|\mathfrak{B}_j[w^1](x, t) - \mathfrak{B}_j[w^2](x, t)| \leq (QM_3 + \nu_2)\|w^1 - w^2\|.$$

Итак, при $(x, t) \in D_j^c$ справедлива оценка

$$|\mathfrak{B}_j[w^1](x, t) - \mathfrak{B}_j[w^2](x, t)| \leq (QM_3 + \nu_2)\|w^1 - w^2\|.$$

2. Пусть $(x, t) \in D_j^\ell$ (рис. 7).

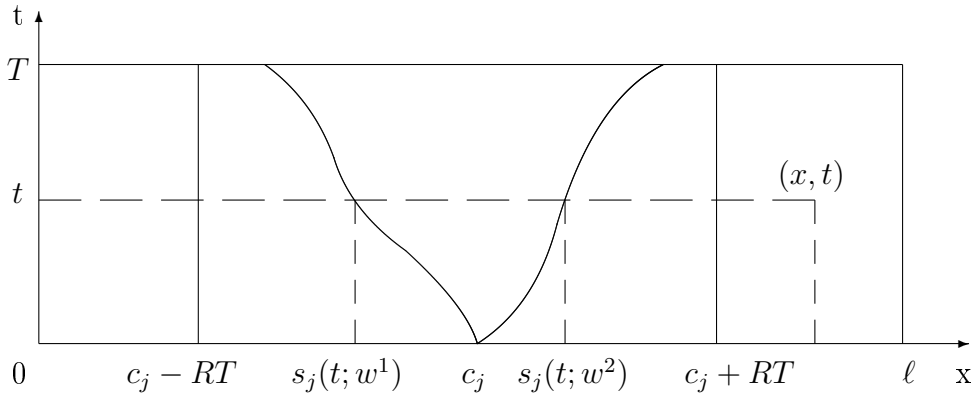


Рис.7. Случай, когда $(x, t) \in D_j^\ell$

Тогда, используя пункт 1 и лемму 3, имеем:

$$\begin{aligned} & |\mathfrak{B}_j[w^1](x, t) - \mathfrak{B}_j[w^2](x, t)| \leq QM_3\|w^1 - w^2\| + \\ & + \int_{s_j(t; w^2)}^x |q_j(\xi, t, w^1(\xi, t)) - q_j(\xi, t, w^2(\xi, t))| d\xi \leq QM_3\|w^1 - w^2\| + \\ & + \int_{c_j-RT}^{c_j+RT} Q_2(\xi) |w^1 - w^2| d\xi + \int_{c_j+RT}^x Q_2(\xi) \max\{|u^1(\xi, t) - u^2(\xi, t)|; \\ & \max_{k, c_k=c_j} |v_k^1(\xi, t) - v_k^2(\xi, t)|\} d\xi \leq \\ & \leq (QM_3 + \nu_2)\|w^1 - w^2\| + \int_{c_j+RT}^x Q_2(\xi) \max\{|u^1(\xi, t) - u^2(\xi, t)|; \\ & \max_{k, c_k=c_j} \{|v_k^1(\xi, t) - v_k^2(\xi, t)| e^{-H(\xi - c_j - RT)}\}\} e^{H(\xi - c_j - RT)} d\xi \leq \\ & \leq (QM_3 + \nu_2)\|w^1 - w^2\| + \\ & + \|w^1 - w^2\| \int_{c_j+RT}^x Q_2(\xi) e^{H(\xi - c_j - RT)} d\xi \leq (QM_3 + \nu_2)\|w^1 - w^2\| + \\ & + \|w^1 - w^2\| \left(\int_0^\ell (Q_2(\xi))^2 d\xi \right)^{1/2} \left(\int_{c_j+RT}^x e^{2H(\xi - c_j - RT)} d\xi \right)^{1/2} = \\ & = (QM_3 + \nu_2 + \nu_3 \sqrt{\frac{1}{2} H^{-1}(e^{2H(x - c_j - RT)} - 1)}) \|w^1 - w^2\|, \end{aligned}$$

где $\nu_3 = (\int_0^\ell (Q_2(\xi))^2 d\xi)^{1/2}$.

Умножая полученное неравенство на $\exp(-H(x - c_j - RT))$ и переходя к максимуму по D_j^ℓ , получаем: $\max_{D_j^\ell} \{|\mathfrak{B}_j[w^1](x, t) - \mathfrak{B}_j[w^2](x, t)|e^{-H(x-c_j-RT)}\} \leq (QM_3 + \nu_2 + \nu_3(2H)^{-1/2}(1 - e^{-2H\ell})^{1/2}\|w^1 - w^2\| \leq (QM_3 + \nu_2 + \nu_3(2H)^{-1/2})\|w^1 - w^2\|$.

Ясно, что аналогичная пункту 2 оценка справедлива и в области D_j^0 . Легко доказать, что для $c_j = 0$ и $c_j = \ell$ полученные оценки также справедливы в соответствующих областях. Поэтому во всем прямоугольнике $\Pi(T)$ справедливо неравенство:

$$\|\mathfrak{B}[w^1](x, t) - \mathfrak{B}[w^2](x, t)\| \leq (QM_3 + \nu_2 + \nu_3(2H)^{-1/2})\|w^1 - w^2\|,$$

что и завершает доказательство леммы 12.

Поскольку $M_3 \rightarrow 0$ при $T \rightarrow 0$, то из леммы 12 следует, что для достаточно малого $T > 0$ и достаточно большого $H > 0$ оператор $\mathfrak{B}$ сжимающий в $\mathbb{E}_2(T, L, P)$.

Следствие 2. Во всем прямоугольнике $\Pi(T)$ справедлива оценка

$$\|\mathfrak{S}[w^1] - \mathfrak{S}[w^2]\| \leq \kappa_7\|w^1 - w^2\|, \text{ где } \kappa_7 = \kappa_6 + (QM_3 + \nu_2 + \nu_3(2H)^{-1/2}).$$

Теорема. Для достаточно малого $T > 0$ и достаточно больших констант $L > 0$, $H > 0$ оператор $\mathfrak{S}^2$, отображающий шар $\mathbb{E}_2(T, L, P)$ в себя, сжимающий и имеет, тем самым, единственную неподвижную точку, которая является обобщенным непрерывным решением задачи (6)–(14).

Доказательство. В самом деле, в области $(\bar{\Pi}_i^\alpha(\mathfrak{S}w^1) \cap \bar{\Pi}_i^\alpha(\mathfrak{S}w^2)) \cup (\bar{\Pi}_i^\alpha(\mathfrak{S}w^1) \cap \bar{\Pi}_i^0(\mathfrak{S}w^2)) \cup (\bar{\Pi}_i^0(\mathfrak{S}w^1) \cap \bar{\Pi}_i^\alpha(\mathfrak{S}w^2))$ оценка (22) леммы 10 с учетом леммы 11 и следствия 2 имеет вид

$$\|\mathfrak{A}[\mathfrak{S}w^1] - \mathfrak{A}[\mathfrak{S}w^2]\| \leq$$

$$\leq (\kappa_1 + \kappa_5 + \Gamma_2 LM_2 \nu_0)\|\mathfrak{S}w^1 - \mathfrak{S}w^2\| \leq (\kappa_1 + \kappa_5 + \Gamma_2 LM_2 \nu_0)\kappa_7\|w^1 - w^2\|.$$

Если же $(x, t) \in \bar{\Pi}_i^0(\mathfrak{S}w^1) \cap \bar{\Pi}_i^0(\mathfrak{S}w^2)$, то это означает, что $i \in I_+^0$. Тогда точки вида $(0, t) \in \bar{\Pi}_k^\alpha(w^1) \cap \bar{\Pi}_k^\alpha(w^2)$ ($k \notin I_+^0$). Поэтому в силу леммы 10

$$|\mathfrak{R}_i[\mathfrak{S}w^1](x, t) - \mathfrak{R}_i[\mathfrak{S}w^2](x, t)| \leq$$

$$\leq \Gamma_1 M_2 \nu_0 \|\mathfrak{S}w^1 - \mathfrak{S}w^2\| + \Gamma_2 \max_{k \notin I_+^0} |\mathfrak{A}_k[w^1](0, \chi_i^{\mathfrak{S}w^1}) - \mathfrak{A}_k[w^2](0, \chi_i^{\mathfrak{S}w^2})| \leq$$

$$\leq \Gamma_1 M_2 \nu_0 \|\mathfrak{S}w^1 - \mathfrak{S}w^2\| + \Gamma_2 (M_5 |\chi_i^{\mathfrak{S}w^1} - \chi_i^{\mathfrak{S}w^2}| + \kappa_1 \|w^1 - w^2\|) \leq$$

$$\leq \Gamma_1 M_2 \nu_0 \kappa_7 \|w^1 - w^2\| + \Gamma_2 (M_5 M_2 \nu_0 \|\mathfrak{S}w^1 - \mathfrak{S}w^2\| + \kappa_1 \|w^1 - w^2\|) \leq$$

$$\leq (\Gamma_1 M_2 \kappa_7 \nu_0 + \Gamma_2 M_5 M_2 \kappa_7 \nu_0 + \Gamma_2 \kappa_1) \|w^1 - w^2\|.$$

Далее, с учетом леммы 11 получим $|\mathfrak{I}_i[\mathfrak{S}w^1](x, t) - \mathfrak{I}_i[\mathfrak{S}w^2](x, t)| \leq \kappa_4 \|\mathfrak{S}w^1 - \mathfrak{S}w^2\| \leq \kappa_4 \kappa_7 \|w^1 - w^2\|$. Поэтому, для $(x, t) \in \bar{\Pi}_i^0(\mathfrak{S}w^1) \cap \bar{\Pi}_i^0(\mathfrak{S}w^2)$ справедлива оценка $|\mathfrak{A}_i[\mathfrak{S}w^1](x, t) - \mathfrak{A}_i[\mathfrak{S}w^2](x, t)| \leq \kappa_8 \|w^1 - w^2\|$, где $\kappa_8 = (\Gamma_1 M_2 \nu_0 + \Gamma_2 M_5 M_2 \nu_0 + \kappa_4) \kappa_7 + \Gamma_2 \kappa_1$.

Итак, во всем $\Pi(T)$ выполняется неравенство $\|\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w^1](x, t) - \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w^2](x, t)\| \leq (\kappa_9 + QM_3 + \nu_2 + \nu_3(2H)^{-1/2})\|w^1 - w^2\|$, где $\kappa_9 = \kappa_8 + (\kappa_1 + \kappa_5) \kappa_7 + \Gamma_2 LM_2 \nu_0 \kappa_7$.

Поскольку M_3, ν_0, ν_2 , а также, все $\kappa_i, i = 1, \dots, 9$ стремятся к нулю при $T \rightarrow 0$, то отсюда следует, что при достаточно малом $T > 0$ и достаточно больших $H > 0, L > 0$ оператор $\mathfrak{S}^2$ является сжимающим на шаре $\mathbb{E}_2(T, L, P)$, что и доказывает теорему. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Габов С.А. Новые задачи математической теории волн. – М.: Наука, 1998. – 448 с.
2. Тикиляйнен А.А. *Об одной задаче, связанной с теорией планетарных волн*// ЖВМ и МФ. – 1988. – Т.28, №4. – С.534–548.
3. Trustrum K. *Rotating and stratified fluid flow*// J. Fluid Mech. – 1964. – V.19. – P.415–432.
4. Рейнер М. Реология. – М.: Наука, 1965. – 224 с.
5. Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наукова думка, 1984. – 264 с.
6. Верещагин И. К., Кокин С. М., Селезнев В. А. *Старение электролюминофоров*// Изв. АН СССР, Физика. – 1985. – Т.49, №10. – С.1940–1943.
7. Lewy H. *Über das Anfangswertproblem bei einer hyperbolischen nichtlinearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen*// Math. Annalen. – 1927. – Bd.98. – S.179–191.
8. Douglis A. *Some existence theorems for hyperbolic systems of partial differential equations in two independent variables*// Comm. Pure. Appl. Math. – 1952. – V.5, №1. – P.119–154.
9. Hartman F., Wintner A. *On hyperbolic differential equations*. // Amer. J. Math. – 1952. – V.5. – P.834–864.
10. Рождественский Б.Л., Яненко Н.И. Системы квазилинейных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 688 с.
11. John F. *Formation of singularities in one-dimensional nonlinear wave propagation*// Comm. Pure. Appl. Math. – 1974. – V.27, №2. – P.377–405.
12. Lax P. *Development of singularities of solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations*// J. Math. Phys. – 1964. – V.5, №5. – P.611–613.
13. Аболия В.Э., Мышкис А.Д. *Смешанная задача для почти линейной гиперболической системы на плоскости*// Мат.сборник. – 1960. – Т.50(92), №4. – С.423–442.
14. Мышкис А.Д., Филимонов А.М. *Непрерывные решения квазилинейных гиперболических систем с двумя независимыми переменными*// Диф. уравнения. – 1981. – Т.17, №3. – С.488–500.
15. Казаков К.Ю., Морозов С.Ф. *Об определении неизвестной линии разрыва решения смешанной задачи для квазилинейной гиперболической системы*// Укр. мат. журн. – 1985. – Т.37, №4. – С.443–450.
16. Андрусак Р.В., Кирилич В.М., Мышкис А.Д. *Локальная и глобальная разрешимость квазилинейной гиперболической задачи Стефана на прямой*// Диф. уравнения. – 2006. – Т.42, №4. – С.489–503.
17. Мышкис А.Д., Филимонов А.М. *О глобальной непрерывной разрешимости смешанной задачи для одномерных гиперболических систем квазилинейных уравнений*. // Диф. уравнения. – 2008. – Т.44, №3. – С.394–407.
18. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Иностр. лит., 1954. – Т.II, 416 с.
19. Cesari L. *A boundary value problem for quasilinear hyperbolic systems in the Schauder canonic form*// Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, (4). – 1974. – V.1. – P.311–358.
20. Риман Б. *О распространении волн конечной амплитуды*/ Сочинения. – М.-Л., 1948. – С.376–395.
21. Bassanini P., Turo J. *Generalized solutions to free boundary problems for hyperbolic systems of functional partial differential equations*// Annali di Mat. pura ed applic.(IV). – 1990. – V. CLVI. – P.211–230.

Львовский национальный университет имени Ивана Франко
 Московский университет путей сообщения

Поступило 01.12.2007