УДК 519.4

Л. П. Бедратюк, С. Л. Бедратюк

СИМЕТРИЧНІ ІНВАРІАНТИ ДЕЯКИХ МОДУЛЯРНИХ АЛГЕБР ЛІ ТИПУ КАРТАНА

L. P. Bedratyuk, S. L. Bedratiuk. *Symmetrical invariants of modular Lie algebras of Cartan type*, Matematychni Studii, **30** (2008) 3–8.

Let L be one of the finite dimensional Lie algebras $W_n(\mathbf{m})$, $S_n(\mathbf{m})$, $H_n(\mathbf{m})$ of Cartan type over an algebraically closed field of prime characteristic $p > 0$. For an element F of the symmetrcial algebra $S(L)$ we found necessary and sufficient conditions in order to hat the element

$$ad(\partial_1)^{p^{m_1}-1} ad(\partial_2)^{p^{m_2}-1} \cdots ad(\partial_n)^{p^{m_n}-1}(F)$$

belongs to the symmetrical invariants algebra $S(L)^L$. Also, for $p \in \{3,\ 5\}$ the algebra of symmetrical invariants $S(H_2)^{H_2}$ is calculated explicitly.

Л. П. Бедратюк, С. Л. Бедратюк. *Симметрические инварианты модулярных алгебр Ли картановского типа.* // Математичні Студії. – 2008. – Т.30, №1. – С.3–8.

Пусть L одна из конечномерных модулярных алгебр Ли картановского типа $W_n(\mathbf{m})$, $S_n(\mathbf{m})$, $H_n(\mathbf{m})$ над алгебраически замкнутым полем положительной характеристики p. Найдены необходимые и достаточные условия, которым должен удовлетворять элемент F симметрической алгебры $S(L)$ для того, чтобы элемент

$$ad(\partial_1)^{p^{m_1}-1} ad(\partial_2)^{p^{m_2}-1} \cdots ad(\partial_n)^{p^{m_n}-1}(F)$$

принадлежал алгебре симметричеких инвариантов $S(L)^L$. Также в явном виде найдена алгебра симметрических инвариантов $S(H_2)^{H_2}$ при $p \in \{3,\ 5\}$.

1. Нехай L одна із простих скінченновимірних алгебр Лі типу Картана $W_n(\mathbf{m})$, $S_n(\mathbf{m})$, $H_n(\mathbf{m})$, де $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$, $m_i \in \mathbb{Z}$, яка розглядається над алгебраїчно замкненим полем $\mathbb{K}$ додатньої характеристики p. Алгебра L градуйована

$$L = L_{-1} \oplus L_0 \oplus \cdots \oplus L_r, [L_i, L_j] \subset L_{i+j}.$$

Тут $r = n\sum_k (p^{m_i} - 1) - 1$ для $W_n(\mathbf{m})$ і $r = n\sum_k (p^{m_i} - 1) - 2$ для алгебр $S_n(\mathbf{m})$, $H_n(\mathbf{m})$. Компоненти відповідної фільтрації позначимо через $\mathcal{L}_i = L_i \oplus L_{i+1} \oplus \cdots \oplus L_r$, $\mathcal{L}_{-1} = L$ (див. всі деталі в [1]). Обчислення центру $Z(L)$ універсальної огортуючої алгебри $U(L)$ є однією із важливих задач у відкритій проблемі класифікації незвідних зображень алгебри L. На сьогоднішній день центр $Z(L)$ повністю описаний лише для алгебри $W_1(\mathbf{m})$ в [2]. Окремі центральні елементи для деяких алгебр знайдені в [3], [4].

Першим кроком в описі алгебри $Z(L)$ може бути знаходження алгебри інваріантів $S(L)^L$ симетричної алгебри $S(L)$ відносно приєднаної дії алгебри L. Алгебра $S(L)^L$ є скінченно породженою алгеброю над p-центром алгебри L. Мімальну кількість породжуючих елементів алгебри $S(L)^L$ обчислено в [5], проте явний вигляд цих елементів в загальному випадку невідомий. В [6], [7] дано опис алгебри $S(L)^{L_{-1}}$. Зокрема, доведено, що будь-який нетривіальний однорідний симетричний інваріант $S(L)^L$,

2000 *Mathematics Subject Classification:* 17B50;17B20.
Keywords: symetrical invariant, modular Lie algerba, Cartan type
doi:10.30970/ms.30.1.3-8

степінь якого не ділиться на характеристику поля, записується у вигляді $d^{(\delta)}(F)$, де $d^{(\delta)}: = ad(\partial_1)^{p^{m_1}-1} ad(\partial_2)^{p^{m_2}-1} \cdots ad(\partial_n)^{p^{m_n}-1}$, а $F \in S(L)$, $\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n$ — базис простору L_{-1}.

В даній статті встановлено умови, яким повинен задовольняти елемент $F \in S(L)$ для того, щоб елемент $d^{(\delta)}(F)$ був симетричним інваріантом алгебри L. Доведено, що для алгебр $S_n(\mathbf{m})$, $H_n(\mathbf{m})$, $\overline{H}_n(\mathbf{m})$, $(W_n(\mathbf{m}))$ елемент F має бути інваріантом (відповідно напівінваріантом) максимальної підалгебри $\mathcal{L}_0$. Використовуючи отриманий критерій, обчислено алгебру симетричних інваріантів для $H_2: = H_2(\mathbf{m})$, при $\mathbf{m} = (1, 1, \ldots, 1)$ і $p \in \{3,\ 5\}$.

2. Нагадаємо означення алгебр Лі $W_n(\mathbf{m}), S_n(\mathbf{m}), H_n(\mathbf{m})$. Зафіксуємо позначення для наборів з $\mathbb{Z}_+^n$ — $\delta: = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n), \delta_i = p^{m_i-1}$, $\epsilon_i: = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$. Приймемо $|\alpha|: = \sum_i \alpha_i$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.

Алгеброю розділених степенів $\mathbb{K}_n(\mathbf{m})$ називається комутативна алгебра, яка задана твірними $x_1, x_2, \ldots, x_n$, співвідношеннями $x_1^{p^{m_1}} = 0, \ldots x_n^{p^{m_n}} = 0$ і правилом множення

$$x^{(\alpha)} x^{(\beta)} = \binom{\alpha+\beta}{\alpha} x^{(\alpha+\beta)}, \binom{\alpha}{\beta} = \prod_i \binom{\alpha_i}{\beta_i}, \text{ тут } x^{(\alpha)}: = x_1^{\alpha_1} \ldots, x_n^{\alpha_n},\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n,\ \alpha \leq \delta.$$

Загальна алгебра $W_n(\mathbf{m})$ породжується всіма спеціальними диференціюваннями алгебри $\mathbb{K}_n(\mathbf{m})$ вигляду $D = \sum\limits_i f_i \partial_i, f_i \in k_n(\mathbf{m})$.

Спеціальна алгебра $S_n(\mathbf{m}), n \geq 2$ є підалгеброю алгебри $W_n(\mathbf{m})$, яка породжена диференціюваннями $\mathcal{D}_{i,j}(\alpha) = \partial_i(x^{(\alpha)})\partial_j - \partial_j(x^{(\alpha)})\partial_i, i < j \leq n, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Гамільтонова алгебра $H_n(\mathbf{m})$, n-парне, складається з диференціювань

$$D(\alpha) = \textstyle\sum_{i=1}^n a_{i,\pi i} \partial_i(x^{(\alpha)}) \partial_{\pi i}, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \alpha < \delta,$$

де π — інволютивна перестановка без нерухомих точок множини $\{1, 2, \ldots, n\}$, причому $a_{i,\pi i} = \pm 1$, $a_{i,\pi i} + a_{\pi i, i} = 0$. Всі означені вище алгебри є простими алгебрами Лі. Крім вказаних алгебр ми також будемо працювати з алгеброю $\overline{H}_n(\mathbf{m}): = H_n(\mathbf{m}) \oplus \langle D(\delta) \rangle$. Алгебра симетричних інваріантів $S(L)^L$ визначається як анулятор L-модуля $S(L)$.

3. Для кожної алгебри $W_n(\mathbf{m}), S_n(\mathbf{m}), H_n(\mathbf{m}), \overline{H}_n(\mathbf{m})$ компонента L_{-1} породжена комутуючими диференціюваннями $\partial_1, \ldots, \partial_n$, тому оператор $d^{(\delta)}$ визначений коректно для всіх типів алгебр.

Означення. Елемент $F \in S(L)$ називається *генератором* симетричного інваріанта z, якщо виконується рівність $z = d^{(\delta)}(F)$.

Знання генератора симетричного інваріанта важливе з обчислювальної точки зору, оскільки, генератор має набагато простіший вигляд, ніж відповідний йому симетричний інваріант. В роботі [6] встановлено, що для кожного однорідного симетричного інваріанта z, алгебри Лі L, для якого $\deg(z) \neq 0 \mod p$, існує єдиний, з точністю до ядра оператора $d^{(\delta)}$, генератор. Наступна теорема встановлює якими властивостями володіє генератор симетричного інваріанта.

Теорема 1. *Нехай z — нетривіальний симетричний однорідний інваріант алгебри L, $\deg(z) \neq 0 \mod p$, і F — його генератор. Тоді: (i) якщо $L = W_n(\mathbf{m})$ то $\mathcal{L}_1(F) = 0$ і $ad(-x_i\partial_j)(F) = \delta_{i,j} F$, $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера; (ii) якщо $L = S_n(\mathbf{m})$ або $L = \overline{H}_n(\mathbf{m})$, то $\mathcal{L}_0(F) = 0$.*

Доведення. (i) У статті [7] встановлено, що елемент F можна подати у вигляді $F = z_1 A_1 + z_2 A_2 + \cdots + z_n A_n$, де $z_i = x^{(\delta)} \partial_i$, $A_i \in S(L)$, а векторний простір A, натягнутий на елементи $A_1, A_2, \ldots A_n$, є $\mathcal{L}_1$-модулем з нульовою дією. Крім того A є незвідним L_0-модулем з наступною дією: $D_{i,j}(A_k) = -\delta_{j,k} A_i$, $\ D_{i,j}: = -ad(x_i \partial_j)$.

Враховуючи те, що $D_{i,j}(z_k) = \delta_{i,j} z_k + \delta_{i,k} z_j$ отримаємо

$$\begin{aligned} D_{i,j}(F) &= D_{i,j}\Big(\sum_k z_k A_k\Big) = \sum_k \Big(D_{i,j}(z_k)A_k + z_k D_{i,j}(A_k)\Big) = \\ &= \sum_k \Big((\delta_{i,j} z_k + \delta_{i,k} z_j A_k + z_k(-\delta_{j,k} A_i)\Big) = \delta_{i,j} F + z_j \sum_k \delta_{i,k} A_k - A_i \sum_k \delta_{j,k} z_k = \\ &= \delta_{i,j} F + z_j A_i - z_j A_i = \delta_{i,j} F. \end{aligned}$$

Оскільки, для всіх i маємо $\mathcal{L}_1(z_i) = 0$ і $\mathcal{L}_1(A) = 0$, то і $\mathcal{L}_1(F) = 0$.

(ii_a) Нехай $L = S_n(\mathbf{m})$. В [6] встановлено, що довільний однорідний симетричний інваріант $z \in S(L)^L$, $\deg(z) \neq 0 \mod p$ записується у спеціальному вигляді $z = d^{(\delta)}(F)$, причому $F = \sum_{i<j} z_{i,j}(\delta) A_{i,j}$, де $A_{i,j} \in S(L)$ і $z_{i,j} \colon = \partial_i(x^{(\delta)})\partial_j - \partial_j(x^{(\delta)})\partial_i$. Покладемо $D_{i,j} = ad(x_i\partial_j)$, $T_{i,j} = ad(x_i\partial_j - x_j\partial_j)$. Як і в [7] можна довести таке твердження

Лема 1. *Векторний простір A, породжений елементами $A_{i,j}$, є $\mathcal{L}_0$-модулем з наступною дією: $D_{s,t}(A_{i,j}) = \delta_{t,j} A_{i,s} + \delta_{i,t} A_{s,t}$, $T_{s,t}(A_{i,j}) = (\delta_{j,s} + \delta_{i,s} - \delta_{i,t} - \delta_{j,t})A_{i,j}$, — і $\mathcal{L}_1(A) = 0$*

Прямими обчисленнями в алгебрі L отримуємо

$$\begin{aligned} D_{s,t}(z_{i,j}) &= [x_s\partial_t, \partial_i(x^{(\delta)})\partial_j - \partial_j(x^{(\delta)})\partial_i] = \delta_{i,s} z_{j,t} + \delta_{j,s} z_{t,i}, \\ T_{s,t}(z_{i,j}) &= [x_s\partial_s - x_t\partial_t, \partial_i(x^{(\delta)})\partial_j - \partial_j(x^{(\delta)})\partial_i] = (\delta_{i,s} + \delta_{j,s} - \delta_{i,t} - \delta_{j,t}) z_{j,i}. \end{aligned}$$

Знаходимо

$$\begin{aligned} D_{s,t}(F) &= D_{s,t}\Big(\sum_{i<j} z_{i,j} A_{i,j}\Big) = \sum_{i<j} \Big(\big(\delta_{i,s} z_{j,t} + \delta_{j,s} z_{t,i} A_{i,j} + z_{i,j}(\delta_{t,j} A_{i,s} + \delta_{i,t} A_{s,t})\big)\Big) = \\ &= \sum_{i<j} \delta_{i,s} z_{j,t} A_{i,\,j} + \sum_{i<j} \delta_{j,s} z_{t,i} A_{i,j} + \sum_{i<j} \delta_{t,j} z_{i,j} A_{i,s} + \sum_{i<j} \delta_{i,t} A_{s,t} z_{i,j} = \\ &= \sum_{s<j} z_{j,t} A_{s,\,j} + \sum_{i<s} z_{t,i} A_{i,s} + \sum_{i<t} z_{i,t} A_{i,s} + \sum_{t<j} A_{s,j} z_{t,j} = \\ &= \sum_{s<i} z_{i,t} A_{s,i} + \sum_{i<s} z_{t,\,i} A_{i,s} + \sum_{i<t} z_{i,t} A_{i,\,s} + \sum_{t<i} A_{s\,,i} z_{t,i} = \\ &= \sum_i z_{t,i} A_{i,s} + \sum_i z_{i,t} A_{i,s} = \sum_i (z_{t,i} + z_{i,t}) A_{i,s} = 0. \end{aligned}$$

та $T_{s,t}\Big(\sum_{i<j} z_{i,j} A_{i,j}\Big) = \sum_{i<j} \big((\delta_{i,s} + \delta_{j,s} - \delta_{i,t} - \delta_{j,t}) z_{j,i} A_{i,j} + z_{i,j}(\delta_{j,s} + \delta_{i,s} - \delta_{i,t} - \delta_{j,t}) A_{i,j}\big) =$
$= \sum_{i<j} (\delta_{j,s} + \delta_{i,s} - \delta_{i,t} - \delta_{j,t})(z_{j,i} A_{i,j} + z_{i,j} A_{i,j}) = 0.$

Оскільки, диференціювання $x_s\partial_t$ і $x_s\partial_s - x_t\partial_t$ породжують алгебру L_0 то $L_0(F) = 0$. Врахувавши $\mathcal{L}_1(A) = 0$ і $\mathcal{L}_1(z_{i,j}(\delta)) = 0$ отримаємо, що $\mathcal{L}_1(F) = 0$. Тому і $\mathcal{L}_0(F) = 0$.

(ii_b) Нехай $L = \overline{H}_n(\mathbf{m})$. З роботи [6] випливає що $F \in \overline{H}_n(\mathbf{m})$, причому $F = uA$, $A \in S(\overline{H}_n(\mathbf{m}))$, тут $u = x^{(\delta)}$. Тоді, врахувавши $\binom{\delta}{\alpha} \equiv (-1)^{|\alpha|} \mod p$, отримаємо

$$z \colon = d^{(\delta)}(F) = d^{(\delta)}(uA) = \textstyle\sum_\alpha (-1)^{|\alpha|} d^{(\alpha)}(u) d^{(\delta-\alpha)}(A).$$

Оскільки елементи $\{d^{(\alpha)}(u), 0 \leq \alpha < \delta,\}$ очевидно, утворюють базис алгебри $H_n(\mathbf{m})$, то елементи $\{d^{(\delta-\alpha)}(A), 0 \leq \alpha < \delta\}$, утворюють базис спряженого модуля $H_n(\mathbf{m})^*$. Але для гамільтонової алгебри існує ізоморфізм $H_n(\mathbf{m})$-модулів $\varphi \colon H_n(\mathbf{m}) \to H_n(\mathbf{m})^*$, який продовжується до гомоморфізму $\varphi \colon \overline{H}_n(\mathbf{m}) \to \overline{H}_n(\mathbf{m})^*$, причому $\varphi(u) = A$. Оскільки $\mathcal{L}_0(u) = 0$ то і $\mathcal{L}_0(A) = 0$ звідки отримаємо $\mathcal{L}_0(F) = 0$.

$\square$

Перехід від знаходження симетричного інваріанта до знаходження його генератора є важливим з обчислювальної точки зору, оскільки симетричні інваріанти в розгорнутому вигляді задаються дуже громіздкими виразами.

Доведемо обернену теорему.

Теорема 2. *Нехай* $F \in S(L)$ *причому: (i) для* $L = W_n(\mathbf{m})$ *виконується* $\mathcal{L}_1(F) = 0$ *і* $ad(x_i\partial_j)(F) = -\delta_{i,j}F$, *(ii) для* $L = S_n(\mathbf{m})$, *або* $L = \overline{H}_n(\mathbf{m})$, *виконується* $\mathcal{L}_0(F) = 0$. *Тоді елемент* $d^{(\delta)}(F)$ *є симетричним інваріантом.*

Доведення. Алгебра Лі L породжується як алгебра диференціюваннями з L_{-1} і L_r. Диференціювання $d_i = ad(\partial_i), \partial_i \in L_{-1}$ комутують між собою, і, врахувавши $d_i^{p^{m_i}} = 0$, отримаємо, що $d_i(d^{(\delta)}(F)) = 0$. Отже, для перевірки того, що елемент $d^{(\delta)}(F)$ є симетричним інваріантом достатньо показати, що $L_r(d^{(\delta)}(F)) = 0$.

Нехай $L = W_n(\mathbf{m})$. Компонента L_r породжена диференціюваннями вигляду $x^{(\delta)}\partial_i$. Покладемо $D_i = ad(x^{(\delta)}\partial_i)$ і покажемо що в умовах теореми $D_i(d^{(\delta)}(F)) = 0$ для всіх $i \leq n$. Маємо, $D_i\big(d^{(\delta)}(F)\big) = \sum_\gamma (-1)^{|\gamma|}\binom{\delta}{\gamma} d^{(\delta-\gamma)}\big(d^{(\gamma)}(D_i)(F)\big)$.

Для тих значеннь γ для яких $d^{(\gamma)}(D_i) \in \mathcal{L}_1$ відповідні доданки суми дорівнюють нулю. Тому

$$D_i\big(d^{(\delta)}(F)\big) = (-1)^{|\delta|}\binom{\delta}{\delta} d^{(\epsilon_k)}(F) + \sum_j (-1)^{|\delta-\epsilon_j|}\binom{\delta}{\delta-\epsilon_j} d^{(\delta-\epsilon_k)}(D_i)(F) =$$
$$= (-1)^n d^{(\epsilon_k)}(F) + \sum_j (-1)^{n-1}(-1)^{|\epsilon_j|} d^{(\epsilon_j)}((ad(x^{(\epsilon_j)}\partial_k)(F)) =$$
$$= (-1)^n d^{(\epsilon_k)}(F) + (-1)^n d^{(\epsilon_k)}(ad(x^{(\epsilon_k)}\partial_k)(F)) = d^{(\epsilon_k)}(F)((-1)^n + (-1)^{n+1}) = 0.$$

Отже, $d^{(\delta)}(F) \in S(L)^L$.

Нехай $L = S_n(\mathbf{m})$. У цьому випадку компонента L_r породжена всіма диференціюваннями вигляду $\partial_i(x^{(\delta)})\partial_j - \partial_j(x^{(\delta)})\partial_i$. Доведемо, що коли F задовольняє умови теореми, то $D_{i,j}(\delta)\big(d^{(\delta)}(F)\big) = 0$, для всіх $i < j \leq n$, $D_{i,j}(\delta) = ad(\partial_i(x^{(\delta)})\partial_j - \partial_j(x^{(\delta)})\partial_i))$. Маємо

$$D_{i,j}(\delta)\big(d^{(\delta)}(F)\big) = \sum_\gamma (-1)^{|\gamma|}\binom{\delta}{\gamma} d^{(\delta-\gamma)}\big(d^{(\gamma)}(D_{i,j}(\delta))(F))\big).$$

Якщо, $|\gamma| > 1$, то за умовою $d^{(\gamma)}(D_{i,j})(F) = 0$. Тому ненульові доданки будуть лише при таких наборах — $\delta, \delta-\epsilon_1, \ldots, \delta-\epsilon_n$. Але $d^{(\delta)}(D_{i,j}(\delta)) = D_{i,j}(0) = 0$. Тому

$$D_{i,j}(\delta)\big(d^{(\delta)}(F)\big) = \sum_k (-1)^{(\delta-\epsilon_k)} d^{\epsilon_k}\big(d^{(\delta-\epsilon_k)}(\delta)(F)\big) = \sum_k (-1)^{n-1} d^{(\epsilon_k)} D_{i,j}(\epsilon_k)(F) =$$
$$= (-1)^{n-1}\sum_k d^{(\epsilon_k)}\big(ad(\partial_i(x^{\epsilon_k})\partial_j - \partial_j(x^{\epsilon_k})\partial_i)(F)\big) = (-1)^{n-1}\sum_k d^{(\epsilon_k)}(ad(\delta_{i,k}\partial_j - \delta_{j,k}\partial_i)(F)) =$$
$$= (-1)^{n-1}\big(d^{(\epsilon_i)}(\partial_j(F)) - d^{(\epsilon_j)}(\partial_i(F))\big) = (-1)^{n-1}\big(d^{(\epsilon_i)}d^{(\epsilon_j)}(F) - d^{(\epsilon_j)}d^{(\epsilon_i)}(F)\big) = 0.$$

Тому $d^{(\delta)}(F) \in S(L)^L$.

Для алгебри $L = \overline{H}_n(\mathbf{m})$ доведення аналогічне. □

Зауважимо, що з даного доведення зовсім не випливає нетривіальність симетричного інваріанта $d^{(\delta)}(F)$, навіть якщо F задовольняє умови теореми. Тому при обчисленнях потрібно окремо перевіряти чи елемент $d^{(\delta)}(F)$ відмінний від нуля.

Отже, проблему обчислення симетричних інваріантів ми звели до еквівалентної задачі обчислення генераторів симетричних інваріантів, яка є простішою з обчислювальної точки зору.

4. Використаємо теорему 2 для знаходження серії нетривіальних симетричних інваріантів алгебр $\overline{H}_n(\mathbf{m})$ і $H_n(\mathbf{m})$.

Лема 2. *Елементи $\Delta_i = d^{(\delta)}(u^i)$, $i = 2, \ldots, p-1$, $u\colon =D(\delta)$ є нетривіальними, симетричними інваріантами алгебри $\overline{H}_n(\mathbf{m})$.*

Доведення. Оскільки, $\mathcal{L}_0(u) = 0$ то і $\mathcal{L}_0(u^i) = 0$. Тому, з теореми 2 випливає, що в елементи $d^{(\delta)}(u^i)$ є симетричними інваріантами. Доведемо їхню нетривіальність за індукцією. Елемент другого степеня Δ_2 є елементом Казиміра алгебри $H_n(\mathbf{m})$ (див. [4], [8]) і не дорівнює нулю. Елемент Δ_i запишемо у вигляді

$$\Delta_i = d^{(\delta)}(u^i) = u\Big(\sum_{k=1}^{i-2} \binom{i}{k} u^{k-1} d^{(\delta)}(u^{i-k})\Big) + \Delta_i' = u\Big(\sum_{k=1}^{i-2} \binom{i}{k} u^{k-1}\Delta_{i-k}\Big) + \Delta_i'.$$

Тут $\Delta_i' = \Delta_i\big|_{u=0} \in S(H_n(\mathbf{m}))$. Оскільки, за припущенням індукції, всі Δ_k, $k < i$ відмінні від нуля і є алгебраїчно незалежними над $\mathbb{K}[u]$, то і Δ_i відмінний від нуля симетричний інваріант. □

Оскільки, $\overline{H}_n(\mathbf{m}) = H_n(\mathbf{m}) \oplus \langle D(\delta)\rangle$, то кожен елемент z з $S(\overline{H}_n(\mathbf{m}))$ однозначно записується у вигляді суми $z = uz_1 + z_2$, де $z_1 \in S(\overline{H}_n(\mathbf{m}))$, $z_2 \in S(H_n(\mathbf{m}))$. Якщо ж z — симетричний інваріант алгебри $\overline{H}_n(\mathbf{m})$, то, очевидно, що $z_2 = z\big|_{u=0}$ є симетричним інваріантом максимальної підалгебри алгебри $H_n(\mathbf{m})$. Тому, елемент $\Delta_i\big|_{u=0} \in S(H_n(\mathbf{m}))$ задовольняє умови теореми 2 і, отже, є генератором симетричного інваріанта алгебри $H_n(\mathbf{m})$. Якщо ж елемент $\Delta_i\big|_{u=0}$, дорівнює нулю над полем $\mathbb{K}$, то розглянемо відображення $\varphi\colon S(L) \to S(L)$ визначене так: $\varphi(a)\colon = \frac{\tau(a)}{p^m} \mod p$, де τ є вкладення кільця $S(L) = \mathbb{K}[L]$ в кільце $\mathbb{Z}[L]$, а m — максимальний степінь з яким p входить до розкладу найбільшого спільного дільника коефіцієнтів многочлена $\tau(a) \in \mathbb{Z}[L]$. Генератори симетричних інваріантів шукатимемо у вигляді $\varphi\big(\big(\Delta_i\big|_{u=0}\big)\big)$.

Нехай $\mathbb{K}_n^p$ — p-центр алгебри $H_n\colon = H_n(1, 1, \ldots, 1)$, тобто підалгебра в $S(H_n)^{H_n}$ породжена p-ми степенями елементів з $S(H_n)$. Покладемо $u_{i,j} = x_1^i x_2^j$, $(i,j) < (p-1, p-1)$. Неважко переконатися, що для поля характеристики $p = 3$ алгебра симетричних інваріантів алгебри H_2 збігається з $\mathbb{K}_2^3[\Delta_2]$, де
$\Delta_2 = d^{(\delta)}(u^2) = (\mathrm{ad}(\partial_1))^2(\mathrm{ad}(\partial_2))^2(u) = 2\,u_{0,1}\,u_{2,1} + 2\,u_{1,0}\,u_{1,2} + {u_{1,1}}^2 + 2\,u_{2,0}\,u_{0,2}$.

Наступна теорема описує алгебру симетричних інваріантів алгебри H_2, $p = 5$.

Теорема 3. *$S(H_2)^{H_2} = \mathbb{K}_2^5[\Delta_2, \Delta_4^*, \Delta_6^*]$, де $\Delta_i^* = d^{(\delta)}\big(\varphi\big(\big(\Delta_i\big|_{u=0}\big)\big)\big)$.*

Доведення. Прямими обчисленнями в Maple переконуємося, що вказані елементи є симетричними інваріантами, які складаються відповідно із 12, 78 і 708 доданків. Через громіздськість випишемо лише їхні генератори. $u_{4,4}^2$ — генератор симетричного інваріанта Δ_2. Генератори симетричних інваріантів Δ_4^* , Δ_6^* мають відповідно вигляд

$$\begin{aligned}
&{u_{2,3}}^2\,{u_{4,3}}^2 + 2\,u_{4,2}\,{u_{4,3}}^2\,u_{0,4} + 4\,u_{0,3}\,{u_{4,3}}^3 + 2\,u_{1,2}\,{u_{4,3}}^2\,u_{3,4} + 2\,u_{1,3}\,u_{3,3}\,{u_{4,3}}^2\\
&+ 2\,u_{2,1}\,u_{4,3}\,{u_{3,4}}^2 + 2\,u_{2,2}\,{u_{4,3}}^2\,u_{2,4} + 2\,u_{2,2}\,u_{4,2}\,{u_{3,4}}^2 + 2\,u_{2,3}\,{u_{3,3}}^2\,u_{4,3}\\
&+ 2\,u_{2,3}\,u_{4,1}\,{u_{3,4}}^2 + 2\,u_{3,1}\,u_{3,3}\,{u_{3,4}}^2 + 2\,u_{3,2}\,{u_{4,3}}^2\,u_{1,4} + 2\,u_{3,2}\,{u_{3,3}}^2\,u_{3,4}\\
&+ 2\,{u_{3,3}}^2\,u_{4,2}\,u_{2,4} + 2\,u_{4,0}\,u_{2,4}\,{u_{3,4}}^2 + 2\,u_{4,1}\,u_{4,3}\,{u_{2,4}}^2 + 2\,{u_{4,2}}^2\,u_{1,4}\,u_{3,4}\\
&+ 4\,u_{1,3}\,u_{4,2}\,u_{4,3}\,u_{3,4} + 4\,u_{2,2}\,u_{3,3}\,u_{4,3}\,u_{3,4} + 4\,u_{2,3}\,u_{4,2}\,u_{4,3}\,u_{2,4} + 4\,u_{2,3}\,u_{3,2}\,u_{4,3}\,u_{3,4}\\
&+ 4\,u_{2,3}\,u_{3,3}\,u_{4,2}\,u_{3,4} + 4\,u_{3,1}\,u_{4,3}\,u_{2,4}\,u_{3,4} + 4\,u_{3,2}\,u_{3,3}\,u_{4,3}\,u_{2,4} + 4\,u_{3,2}\,u_{4,2}\,u_{2,4}\,u_{3,4}\\
&+ 4\,u_{3,3}\,u_{4,1}\,u_{2,4}\,u_{3,4} + 4\,u_{3,3}\,u_{4,2}\,u_{4,3}\,u_{1,4} + 4\,u_{4,1}\,u_{4,3}\,u_{1,4}\,u_{3,4} + {u_{3,3}}^4 + 4\,u_{3,0}\,{u_{3,4}}^3\\
&+ {u_{3,2}}^2\,{u_{3,4}}^2 + {u_{4,2}}^2\,{u_{2,4}}^2
\end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned}
&4\,u_{3,3}\,u_{4,2}\,u_{4,3}\,{u_{3,4}}^3 + 4\,u_{3,3}\,{u_{4,3}}^3\,u_{2,4}\,u_{3,4} + 2\,u_{2,3}\,{u_{4,3}}^3\,{u_{3,4}}^2 + 2\,u_{3,2}\,{u_{4,3}}^2\,{u_{3,4}}^3\\
&+ 3\,{u_{3,3}}^2\,{u_{4,3}}^2\,{u_{3,4}}^2 + u_{4,1}\,u_{4,3}\,{u_{3,4}}^4 + {u_{4,3}}^4\,u_{1,4}\,u_{3,4} + u_{4,2}\,{u_{4,3}}^2\,u_{2,4}\,{u_{3,4}}^2\\
&+ 3\,{u_{4,2}}^2\,{u_{3,4}}^4 + 3\,{u_{4,3}}^4\,{u_{2,4}}^2.
\end{aligned}$$

Покажемо, що симетричні інваріанти Δ_2, Δ_4^*, Δ_6^* алгебраїчно незалежні. Алгебра H_2 породжується елементами вигляду $d^{(\alpha)}(u)$, $\alpha < \delta$. Визначимо числову адитивну функцію λ на $S(H_2)$ так: $\lambda(d^{(\alpha)}(u)) = |\alpha|$, $\lambda(h_1)\lambda(h_2) = \lambda(h_1) + \lambda(h_2)$, h_1, h_2 — мономи з $S(H_2)$. Очевидно, що на мономах елемента Δ_2 функція λ приймає значення $2(p-1) = 8$ для всіх i, а на мономах елемента Δ_4^* і Δ_6^* вона приймає значення $4(p-1) = 16$. Прямою перевіркою знаходимо, що елементи Δ_2^2 і Δ_4^* непропорційні. Елемент 6-го степеня Δ_6^* може належати алгебрі $k[\Delta_2, \Delta_4^*]$ лише у випадку, коли він є лінійною комбінацією мономів Δ_2^3 і $\Delta_2\Delta_4^*$. Але $\lambda(\Delta_2^3) = 6(p-1) = 24$ і $\lambda(\Delta_2\Delta_4^*) = 32$. Оскільки, маємо $\lambda(\Delta_6^*) = 16$, то Δ_6^* не належить до $k[\Delta_2, \Delta_4^*]$. Отже, вказані три симетричних інваріанти є алгебраїчно незалежними над $\mathbb{K}^p$.

Я.С. Крилюком в [5] пораховані індекси алгебр Лі типу Картана, тобто мінімальну кількість нетривіальних породжуючих елементів центра універсальної огортуючої алгебри. Зокрема для алгебри H_2 індекс дорівнює $p-2=3$. Тому знайдена система з трьох симетричних інваріантів Δ_2, Δ_4^*, Δ_6^* породжує над p-центром алгебру симетричних інваріантів алгебри H_2. □

Для випадку довільної характеристики поля p, висловимо таке припущення
Гіпотеза. $S(H_2)^{H_2} = \mathbb{K}_2^p[\Delta_2, \Delta_4^*, \ldots \Delta_{2(p-2)}^*]$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кострикин А. И., Шафаревич И. Р. *Градуированные алгебры Ли конечной характеристики*// Изв. АН СССР, серия матем. – 1969. – Т.66. – С. 251–322.
2. Ермолаев Ю. Б. *Центральный элемент универсальной обвертывающей алгебры алгебры Цассенхауса.*// Изв. вузов. Матем. – 1978. – №12. – С.46–59.
3. Корешков Н. А. *Об одном инварианте алгебры W_n*// Изв. вузов. Матем. – 1991. – №10. – С. 40–42.
4. Джумадильдаев А. С. *Обобщенные элементы Казимира*// Изв. АН СССР, сер. матем. – 1985. – Т.49, №5. – С. 1007-1017.
5. Крылюк Я. С. *Об индексе алгебр картановского типа в конечной характеристик.*// Изв. АН СССР, Сер. матем. – 1986. – Т.50, №2. – С. 393–412.
6. Бедратюк Л. П. *О симметрических инвариантах некоторых модулярных алгебр Ли*// Мат. сборник – 1993. – Т.184, №9. – С. 149–160.
7. Бедратюк Л. П. *Структура симметрических инвариантов алгебры Ли $W_n(\mathbf{m})$*// Вестник Москов. ун-та, Сер.1, Матем. Мех. – 1994. – №5. – С. 77–81.
8. Бедратюк Л. П. *Елементи Казиміра диференціювань кільця многочленів*// Математичні студії – 2007. – Т.27, №2. – С. 115– 119.

Хмельницький національний університет
bedratyuk@ief.tup.km.ua, leonid.uk@gmail.com

Надійшло 07.05.2007
Після переробки 07.02.08