

УДК 517.53

О Б. СКАСКІВ

ВИПАДКОВІ ЛАКУНАРНІ СТЕПЕНЕВІ РЯДИ І НЕРІВНІСТЬ ВІМАНА

О. Б. Skaskiv. *Random gap series and Wiman's inequality*, Matematychni Studii, **30** (2008) 101–106.

Let $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^{n_k}$ ($z \in \mathbb{C}$) be an entire function such that $(\exists \rho \in [1/2; 1])(\exists \Delta > 0, D > 0) : |k - \Delta n_k^\rho| < D$ ($k \geq k_0$), and $\mathcal{K}(f) = \{f(z, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k Z_k(t) z^{n_k} : t \in [0; 1]\}$, where $(Z_k(t))$ is a multiplicative system on $[0; 1]$. It is established that for all $\varepsilon > 0$ there exists a set $E \subset \mathbb{R}_+$, $\ln\text{-meas } E \stackrel{\text{def}}{=} \int_{E \cap [1, +\infty)} \frac{dr}{r} < +\infty$, such that for all $r \geq r_0(t), r \notin E$ the inequality

$$M_f(r, t) \leq \mu_f(r) (\ln \mu_f(r))^{(2\rho-1)/4+\varepsilon}$$

holds almost surely in $\mathcal{K}(f)$, where $M_f(r, t) = \max\{|f(z, t)| : |z| = r\}$, $\mu_f(r) = \max\{|a_k| r^{n_k} : k \geq 0\}$, $r \in \mathbb{R}_+$.

О. Б. Скасків. *Случайные лакунарные степенные ряды и неравенство Вимана* // Математичні Студії. – 2008. – Т.30, №1. – С.101–106.

Пусть $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^{n_k}$ ($z \in \mathbb{C}$) — целая функция, удовлетворяющая условию $(\exists \rho \in [1/2; 1])(\exists \Delta > 0, D > 0) : |k - \Delta n_k^\rho| < D$ ($k \geq k_0$), и $\mathcal{K}(f) = \{f(z, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k Z_k(t) z^{n_k} : t \in [0; 1]\}$, где $(Z_k(t))$ — мультипликативная система на $[0; 1]$. Доказано, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует множество $E \subset \mathbb{R}_+$, $\ln\text{-meas } E \stackrel{\text{def}}{=} \int_{E \cap [1, +\infty)} \frac{dr}{r} < +\infty$, такое, что для всех $r \geq r_0(t), r \notin E$, почти наверное в $\mathcal{K}(f)$ имеет место неравенство

$$M_f(r, t) \leq \mu_f(r) (\ln \mu_f(r))^{(2\rho-1)/4+\varepsilon},$$

где $M_f(r, t) = \max\{|f(z, t)| : |z| = r\}$, $\mu_f(r) = \max\{|a_k| r^{n_k} : k \geq 0\}$, $r \in \mathbb{R}_+$.

1. Вступ. Добре відомо (див., наприклад, [1, 2]), що для кожної цілої функції $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ існує множина $E = E(f)$ скінченної логарифмічної міри ($\int_{E \cap [1; +\infty)} d \ln r < +\infty$) така, що для кожного $\varepsilon > 0$ і для всіх $r \in [r_0(\varepsilon); +\infty) \setminus E$ виконується нерівність Вімана

$$M_f(r) \leq \mu_f(r) \ln^{1/2+\varepsilon} \mu_f(r), \tag{1}$$

де $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, $\mu_f(r) = \max\{|a_n| r^n : n \geq 0\}$. В класі цілих функцій, зображуваних лакунарними степеневими рядами

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^{n_k}, \quad n_k \in \mathbb{Z}_+,$$

2000 *Mathematics Subject Classification*: 30D20.

Keywords: random gap series, Wiman's inequality, entire function

doi:10.30970/ms.30.1.101-106

© О Б. Скасків, 2008

нерівність (1) може бути уточнена (див., наприклад, [3, 4]). Зокрема, з отриманого в [3] для цілих рядів Діріхле результату випливає, що за умови

$$(\exists \Delta \in (0; +\infty))(\exists \rho \in [1/2; 1])(\exists D > 0) : |n(t) - \Delta t^\rho| \leq D \quad (t \geq t_0), \quad (2)$$

де $n(t) = \sum_{n_k \leq t} 1$ – лічильна функція послідовності (n_k) , нерівність

$$M_f(r) \leq \mu_f(r) \ln^{(2\rho-1)/2+\varepsilon} \mu_f(r), \quad (3)$$

виконується для кожного $\varepsilon > 0$ і для всіх $r \in [1; +\infty) \setminus E_1$, $E_1 = E_1(\varepsilon)$ – скінченної логарифмічної міри. При $\rho = 1$ з нерівності (3) отримуємо нерівність Вімана, а для $\rho < 1$ – її уточнення.

З іншого боку (див., наприклад, [5, 6, 7]) у нерівності (1) майже напевно (м.н.) у ймовірнісному просторі Штейнгауса $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ показник $1/2$ можна замінити на $1/4$. Тут $\Omega = [0; 1]$, $\mathcal{A}$ – σ -алгебра борелевих підмножин $[0; 1]$, а P – міра Лебега. Власне, в [6] доведено, що в класі випадкових цілих функцій $\mathcal{K}_0(f, \mathcal{Z}) = \{f(z, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n Z_n(t) z^n : t \in [0; 1]\}$, де $\mathcal{Z} = (Z_n(t))$ – мультиплікативна система (МС, означення див. [6]) така, що $|Z_n(t)| = 1$ м.н., а (a_n) – послідовність тейлорових коефіцієнтів довільної фіксованої цілої функції f , для кожного $\varepsilon > 0$ існує множина $E_2 = E_2(\varepsilon, t)$ скінченної логарифмічної міри така, що для всіх $r \geq r_0(\varepsilon, t)$ ($r \notin E_2$) м.н. виконується нерівність

$$M_f(r) \leq \mu_f(r) \ln^{1/4+\varepsilon} \mu_f(r),$$

де $M_f(r, t) = \max\{|f(z, t)| : |z| = r\}$. Тобто, як і у випадку лакунарного степеневому ряду, що задовольняє умову (2) з $\rho \in [1/2; 1]$, у випадку випадкового степеневому ряду класична нерівність Вімана допускає істотне уточнення. У цьому зв'язку виникає *запитання* про взаємний вплив випадкової компоненти та лакуарності на нерівність Вімана. У цій статті знайдемо відповідь на сформульоване запитання у випадку класу

$$\mathcal{K}(f, \mathcal{Z}) = \{f(z, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k Z_k(t) z^{n_k} : t \in [0; 1]\},$$

де $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^{n_k}$ – ціла функція, що задовольняє умову (2) з $\rho \in (1/2; 1)$.

2. Основний результат. Доведемо таку теорему.

Теорема 1. Нехай f ціла функція, $\mathcal{Z} \in \text{МС}$ і $|Z_n(t)| = 1$ м.н. Тоді м.н. в $\mathcal{K}(f, \mathcal{Z})$ для всіх $r \in (1; +\infty)$ зовні деякої множини $E(\varepsilon, t, f)$ скінченної логарифмічної міри правильна нерівність

$$M_f(r, t) \leq \mu_f(r) (\ln \mu_f(r))^{(2\rho-1)/4+\varepsilon}.$$

Доведення. Як і в [7] розглянемо

$$\mathfrak{M}_f(r) = \sum_k^{+\infty} |a_k| r^{n_k}, \quad g(r) = \ln \mathfrak{M}_f(r), \quad A(r) = \frac{dg(r)}{d \ln r}, \quad B^2(r) = \frac{dA(r)}{d \ln r}.$$

Для випадкової величини ξ з розподілом ймовірностей $\mathbf{P}\{\xi = n_k\} = |a_k| r^{n_k} / \mathfrak{M}_f(r)$ математичне сподівання $\mathbf{M}\xi = A(r)$, а дисперсія $\mathbf{D}\xi = B^2(r)$. Тому за нерівністю Чебишова для $C > 0$ отримаємо

$$\Sigma(r, C) := \sum_{|n_k - A(r)| \geq C} |a_k| r^{n_k} \leq \mathfrak{M}_f(r) \left(\frac{B(r)}{C} \right)^2. \quad (4)$$

Нам будуть потрібні такі допоміжні твердження (див. [7], леми 2–5, 7).

Лема 1. Для кожного $\varepsilon > 0$ існує множина $E \subset [1; +\infty)$ скінченної логарифмічної міри така, що $E \supset E_1$ (E_1 – множина зовні якої виконується нерівність (3)) і для всіх $r \in [1; +\infty) \setminus E$

$$A(r) \leq g_0(r)(\ln g_0(r))^{1+\varepsilon}, \quad A(r) \leq \ln \mu_f(r)(\ln \ln \mu_f(r))^{1+\varepsilon},$$

$$B^2(r) \leq A(r)(\ln A(r))^{1+\varepsilon}, \quad B^2(r) \leq A(r)(\ln \ln \mu_f(r))^{1+\varepsilon/2}, \quad B^2(r) \leq \ln \mu_f(r)(\ln \ln \mu_f(r))^{2+\varepsilon}.$$

Зауважимо, що, у випадку, коли $\alpha(t) = o(t)$ ($t \rightarrow +\infty$), за умовою (2)

$$n(t + \alpha(t)) - n(t - \alpha(t)) = (2 + o(1))\Delta \rho t^{\rho-1} \alpha(t) \quad (t \rightarrow +\infty).$$

Вибираючи в (4) спочатку $C(r) = \sqrt{2}B(r)$, отримуємо при $r \rightarrow +\infty$ ($r \notin E$)

$$\mathfrak{M}_f(r) \leq \sum_{|n_k - A(r)| < \sqrt{2}B(r)} + \Sigma(r, C(r)) \leq n(A(r) + \sqrt{2}B(r)) - n(A(r) - \sqrt{2}B(r))\mu_f(r) + \frac{\mathfrak{M}_f(r)}{2},$$

звідки,

$$\mathfrak{M}_f(r) \leq (1 + o(1))4\Delta\rho\mu_f(r)(A(r))^{\rho-1}\sqrt{2}B(r) < 6\Delta\rho\mu_f(r)(A(r))^{\rho-1}B(r).$$

Застосовуючи останню нерівність до (4), отримуємо при $r \rightarrow +\infty$ ($r \notin E$)

$$\Sigma(r, C_1(r)) \leq 6\Delta\rho\mu_f(r)(A(r))^{\rho-1}(B(r))^3(C_1(r))^{-2}, \quad (5)$$

де $C_1(r)$ – довільна додатна функція. Якщо тепер $C_1(r)$ вибрати так, щоб $C_1^2(r) > 6\Delta\rho(A(r))^{\rho-1}(B(r))^3$, то при $r \rightarrow +\infty$ ($r \notin E$) отримаємо

$$\Sigma(r, C_1(r)) < \mu_f(r). \quad (6)$$

Нехай $C_1^2(r) = (\ln \mu_f(r))^{\rho+1/2}(\ln \ln \mu_f(r))^{(\rho+2)(1+\varepsilon)}$. За лемою 1 при $r \rightarrow +\infty$ ($r \notin E$) маємо

$$\begin{aligned} 6\Delta\rho\mu_f(r)(A(r))^{\rho-1}(B(r))^3 &< (A(r))^{\rho+1/2}(\ln \ln \mu_f(r))^{3/2(1+\varepsilon)} \leq \\ &\leq (\ln \mu_f(r))^{\rho+1/2}(\ln \ln \mu_f(r))^{(\rho+2)(1+\varepsilon)} = C_1^2(r), \end{aligned}$$

тому (6) виконується з $C_1^2(r) = (\ln \mu_f(r))^{\rho+1/2}(\ln \ln \mu_f(r))^{(\rho+2)(1+\varepsilon)}$.

Нехай $N = N(r) = n(A(r) + C_1(r)) - n(A(r) - C_1(r))$. Тоді, з одного боку, за умовою (2) і за лемою 1 при $r \rightarrow +\infty$ ($r \notin E$) маємо

$$N(r) \geq 2\Delta\rho C_1(r)(A(r) + C_1(r))^{\rho-1} - 2D \geq \Delta\rho(\ln \mu_f(r))^{\frac{3}{2}\rho - \frac{3}{4}}(\ln \ln \mu_f(r))^{\frac{3}{2}\rho(1+\varepsilon)}, \quad (7)$$

а з іншого боку,

$$N(r) \leq n(A(r) + C_1(r)) \leq \Delta(A(r) + C_1(r))^\rho + D < 2\Delta(\ln \mu_f(r))^\rho(\ln \ln \mu_f(r))^{\rho(1+\varepsilon)},$$

тобто

$$\ln N(r) \leq \ln \ln \mu_f(r) \quad (r \rightarrow +\infty, \quad r \notin E), \quad (8)$$

позаяк $\rho < 1$.

Наступну лему ([7], лема 8) застосовуватимемо до функції

$$l(r) = \mu_f(r)(\ln \mu_f(r))^{\frac{1}{2}(\rho - \frac{1}{2}) + \frac{2}{3}\varepsilon}.$$

Зауважимо, що

$$\ln l(r) = (1 + o(1)) \ln \mu_f(r) \quad (r \rightarrow +\infty).$$

Лема 2 ([7], лема 8). Нехай $l(r)$ — неперервна, зростаюча до $+\infty$ на $(1; +\infty)$ функція, а $E \subset (1; +\infty)$ множина така, що її доповнення містить відкриту необмежену на $(1; +\infty)$ множину. Тоді існує нескінченна послідовність $1 < r_1 \leq \dots \leq r_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow +\infty$) така, що:

- (1) $(\forall n \in \mathbb{N}) : r_n \notin E$;
- (2) $(\forall n \in \mathbb{N}) : \ln l(r_n) \geq \frac{n}{2}$;
- (3) якщо $(r_n; r_{n+1}) \cap E \neq (r_n, r_{n+1})$, то $l(r_{n+1}) \leq el(r_n)$;
- (4) множина тих індексів, для яких виконується твердження п.(3), є необмеженою.

Нехай надалі E — множина з лема 1, (r_n) — послідовність з лема 2, а F_n — множина тих $t \in [0; 1]$, для яких при $r = r_n$

$$W(r, t) \equiv \max \left\{ \left| \sum_{-C_1(r) < n_k - A(r) \leq C_1(r)} a_k r^{n_k} e^{in_k \psi} Z_k(t) \right| : 0 \leq \psi \leq 2\pi \right\} \geq A_\beta S_{N(r)} \ln^{1/2} N(r),$$

де $S_{N(r)}^2 = \sum_{-C_1(r) < n_k - A(r) \leq C_1(r)} |a_k|^2 r^{2n_k}$. Застосуємо тепер таку лему.

Лема 3 ([6], лема 4). Нехай $Z = (Z_k(t)) \in MC$, яка рівномірно обмежена числом 1. Тоді для кожної послідовності комплексних чисел (b_k) і для кожного $\beta > 0$

$$\mathbf{P} \left(\max_{0 \leq \psi \leq 2\pi} \left| \sum_{k=0}^n b_k e^{ik\psi} Z_k(t) \right| \geq A_\beta \sigma_n \ln^{1/2} n \right) \leq \frac{1}{n^\beta}, \quad n \geq 2,$$

де A_β — стала, залежна лише від β , а $\sigma_n^2 = \sum_{k=0}^n |b_k|^2$.

За допомогою нерівності (7) з β таким, що $1/\beta = \frac{1}{2}(\frac{3}{2}\rho - \frac{3}{4})$, за лемою 2 для всіх досить великих n отримуємо

$$N^\beta(r_n) \geq \Delta \rho (\ln \mu_f(r_n))^2 (\ln \ln \mu_f(r_n))^{\frac{3}{2}\beta\rho(1+\varepsilon)} \geq (\ln l(r_n))^2 \geq \left(\frac{n}{2}\right)^2, \text{ тому } \sum_{n=1}^{+\infty} N^{-\beta}(r_n) < +\infty.$$

Скориставшись тепер лемою 3, отримаємо, що $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(F_n) < +\infty$. За лемою Бореля-Кантелі (див. також [7]) звідси випливає, що серед подій F_n з ймовірністю, що дорівнює одиниці, відбувається лише скінченна кількість подій. Тобто, майже напевно за $t \in [0; 1]$ існує таке $n_0(t)$, що для всіх $n \geq n_0(t)$ отримуємо $t \notin F_n$. Отже, майже напевно за $t \in [0; 1]$ при $n \geq n_0(t)$

$$W(r_n, t) < A_\beta S_{N(r_n)} \ln^{1/2} N(r_n) \leq A_\beta (\mu_f(r_n) \mathfrak{M}(r_n))^{1/2} \ln^{1/2} N(r_n),$$

звідки за нерівностями (3) і (8) отримуємо

$$W(r_n, t) < A_\beta \mu_f(r_n) (\ln \mu_f(r_n))^{1/2(\rho-1/2+\varepsilon)} (\ln \ln \mu_f(r_n))^{1/2} \equiv V(r_n).$$

Звідси за нерівністю (6), для майже всіх $t \in [0; 1]$ і всіх $n \geq n_1(t)$, де $n_1(t) \geq n_0(t)$, маємо

$$\begin{aligned} M(r_n, t) &\leq W(r_n, t) + \Sigma(r_n, C_1(r_n)) < V(r_n) + \mu_f(r_n) \leq \\ &\leq \mu_f(r_n) (\ln \mu_f(r_n))^{1/2(\rho-1/2)+2\varepsilon/3} = l(r_n). \end{aligned} \tag{9}$$

Нехай тепер $r \notin E$, $r \geq r_{n_1(t)}$. Тоді існує n , для якого $r \in (r_n, r_{n+1})$. Оскільки $(r_n, r_{n+1}) \cap E \neq (r_n, r_{n+1})$, то за лемою 2, $l(r_{n+1}) \leq el(r_n) \leq el(r)$. Тому для всіх досить великих $r \notin E$ і майже напевно за $t \in [0; 1]$, за нерівністю (9) отримуємо

$$M_f(r, t) \leq M_f(r_{n+1}, f) \leq l(r_{n+1}) \leq el(r) \leq \mu_f(r)(\ln \mu_f(r))^{1/2(\rho-1/2)+\varepsilon}.$$

Теорему 1 доведено. $\square$

3. Непокращуваність теореми 1. Правильне таке твердження.

Теорема 2. Нехай послідовність натуральних чисел (n_k) задовольняє умову (2), а $\mathcal{Z} = (Z_k) \in MC$ і $|Z_k| = 1$ м.н. за $t \in [0; 1]$. Тоді існує ціла функція вигляду $f(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k z^{n_k}$ така, що м.н. в $\mathcal{K}(f, \mathcal{Z})$ для всіх $r \geq r_0$ є правильною нерівність

$$M_f(r, t) \geq \mu_f(r)(\ln \mu_f(r))^{1/2(\rho-1/2)}.$$

Доведення. Зауважимо спочатку, що для послідовності $(2n_k)$ виконується умова $|n_2(t) - 2^{-\rho}\Delta| \leq D$, де $n_2(t)$ – лічильна функція послідовності $(2n_k)$. а також, що

$$t^{-(\rho-1/2)}(n_2(t + \sqrt{t \ln^2(t+1)}) - n_2(t - \sqrt{t \ln^2(t+1)})) \rightarrow +\infty \quad (t \rightarrow +\infty).$$

У цьому випадку з результату, доведеного в [4] для цілих рядів Діріхле випливає, що існує ціла функція $g(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} g_k z^{2n_k}$, $g_k \geq 0$ ($k \geq 1$), для якої

$$\frac{M_g(r)}{\mu_g(r)}(\ln \mu_g(r))^{-(\rho-1/2)} \rightarrow +\infty \quad (r \rightarrow +\infty). \quad (10)$$

Вибираючи $f_k = \sqrt{g_k}$ і розглядаючи цілу функцію $f(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k z^{n_k}$, за рівністю Парсеваля отримуємо

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |Z_k(t)|^2 (f_k)^2 r^{2n_k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi}, t)|^2 d\varphi \leq (M_f(r, t))^2.$$

Звідси, позаяк $|Z_k(t)| = 1$ м.н., а $\mu_g(r) = (\mu_f(r))^2$, за нерівністю (10) отримуємо, що м.н. за $t \in [0; 1]$ при $r \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \frac{M_f(r, t)}{\mu_f(r)}(\ln \mu_f(r))^{-1/2(\rho-1/2)} &\geq \sqrt{M_g(r)\mu_f(r)}(\ln \mu_f(r))^{-1/2(\rho-1/2)} = \\ &= 2^{1/2(\rho-1/2)} \sqrt{\frac{M_g(r)}{\mu_g(r)}(\ln \mu_g(r))^{-(\rho-1/2)}} \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

при $r \rightarrow +\infty$. Теорему 2 доведено. $\square$

ЛІТЕРАТУРА

1. Valiron G. Fonctions analytiques. – Paris: Press. Univer. de France, 1954.
2. Wittich H. Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen. – Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag, 1955.
3. Шеремета М.Н. *Метод Вимана-Валирона для целых функций, заданных рядами Дирихле* // Докл. АН СССР. – 1978. – Т.240, №5. – С.1036–1039.
4. Скасків О.Б. *Про класичну нерівність Вімана для цілих рядів Діріхле* // Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. – 1999. – Вип.54. – С.180–182.
5. Lévi P. *Sur la croissance des fonctions entières* // Bull. Soc. Math. France. – 1930. – V.58. – P.29–59; P.127–149.
6. Філевич П.В. *Співвідношення між максимумом модуля і максимальним членом для випадкових цілих функцій* // Мат. студії. – 1997. – Т.7, №2. – С.165–174.
7. Скасків О.Б., Зрум О.В. *Про виняткову множину у нерівностях типу Вімана для цілих функцій* // Математичні студії. – 2004. – Т.21, №1. – С.13–24.

Львівський національний університет ім. Івана Франка,
механіко-математичний факультет

Надійшло 1.02.2008