УДК 517.51

А. Ф. Конограй

ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАСІВ $B^{\Omega}_{p,\theta}$ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

A. F. Konogray. *Widths of classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic functions of several variables*, Matematychni Studii, **29** (2008) 192–206.

We obtain exact order estimates for the Kolmogorov and trigonometric widths of the classes $B^{\Omega}_{1,\theta}$ of periodic functions of several variables and the Kolmogorov widths of the classes $B^{\Omega}_{\infty,\theta}$ in the space L_q for $1 < q < \infty$.

А. Ф. Конограй. *Поперечники классов $B^{\Omega}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных* // Математичні Студії. – 2008. – Т.29, №2. – С.192–206.

Получены точные по порядку оценки колмогоровских и тригонометрических поперечников классов $B^{\Omega}_{1,\theta}$ периодических функций многих переменных, а также колмогоровских поперечников классов $B^{\Omega}_{\infty,\theta}$ в пространстве L_q, $1 < q < \infty$.

Вступ. Нехай $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod_{j=1}^{d}[-\pi;\pi]$, — простір 2π-періодичних за кожною змінною вимірних функцій $f(x) = f(x_1, ..., x_d)$ таких, що

$$||f||_p = \Big((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} < +\infty\ ,\ 1 \le p < \infty,\ ||f||_\infty = \operatorname{ess\,sup}\{|f(x)| :\ x \in \pi_d\} < +\infty,$$

причому функції, рівні майже скрізь, ототожнюються.

Скрізь нижче будемо розглядати ті функції $f \in L_p(\pi_d)$, які належать до простору

$$L^0_p(\pi_d) = \left\{ f \in L_p(\pi_d) \colon \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) dx_j = 0\ ,\ \ j \in \{1, \dots, d\} \right\}, \quad 1 \le p \le \infty.$$

Для того, щоб дати означення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$, розглянутих в роботі [1], наведемо необхідні позначення і означення.

Нехай $\Omega(t) = \Omega(t_1, \dots, t_d)$, — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови:

1) $\Omega(t) > 0$, $t_j > 0$, $j \in \{1, \dots, d\}$; $\Omega(t) = 0$, $\prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0$; 2) $\Omega(t)$ зростає за кожною змінною;

3) $\Omega(m_1t_1, \dots, m_dt_d) \le \Big(\prod\limits_{j=1}^{d} m_j\Big)^l \Omega(t)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, \dots, d\}$; 4) $\Omega(t)$ неперервна при $t_j \ge 0$, $j \in \{1, \dots, d\}$.

Також будемо вважати, що $\Omega(t)$ задовольняє умови (S), (S_l), які називають умовами Барі–Стєчкіна [2]. Це означає наступне.

Функція однієї змінної $\varphi(\tau) \ge 0$ задовольняє умову (S), якщо $\varphi(\tau)/\tau^{\alpha}$ майже зростає при деякому $\alpha > 0$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_1 > 0$, що

2000 *Mathematics Subject Classification:* 41A46, 42A10.

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^{\alpha}} \le C_1 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^{\alpha}}, \quad 0 < \tau_1 \le \tau_2 \le 1.$$

Функція $\varphi(\tau) \ge 0$ задовольняє умову (S_l), якщо $\varphi(\tau)/\tau^{\gamma}$ майже спадає при деякому $0 < \gamma < l$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^{\gamma}} \ge C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^{\gamma}}, \quad 0 < \tau_1 \le \tau_2 \le 1.$$

Будемо говорити, що $\Omega(t) = \Omega(t_1, ..., t_d)$ задовольняє умови (S) і (S_l), якщо $\Omega(t)$ задовольняє ці умови за кожною змінною t_j при фіксованих t_i, $i \ne j$.

Означимо деякі порядкові співвідношення, які будуть використовуватись далі. Для функцій $\mu_1(N)$ та $\mu_2(N)$ запис $\mu_1 \ll \mu_2$ означає, що існує стала $C > 0$ така, що $\mu_1(N) \le C\mu_2(N)$. Співвідношення $\mu_1 \asymp \mu_2$ рівносильне тому, що виконуються порядкові нерівності $\mu_1 \ll \mu_2$ та $\mu_1 \gg \mu_2$. Зауважимо, що всі сталі C_i, $i \in \{1, 2, \ldots\}$, які будуть зустрічатися в роботі, можуть залежати тільки від параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій вимірюється похибка наближення, та розмірності d простору $\mathbb{R}^d$.

Якщо $\mathcal{A}$ — скінченна множина, то через $|\mathcal{A}|$ будемо позначати кількість її елементів.

Кожному вектору $s = (s_1, ..., s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, \ldots, d\}$, поставимо у відповідність множину

$$\rho(s) = \left\{\, k = (k_1, \ldots, k_d)\colon \quad 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j},\ k_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\ j \in \{1, \ldots, d\}\right\}$$

і для $f \in L^0_p(\pi_d)$ позначимо $\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)}$, де $\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$ — коефіцієнти Фур'є функції f, $(k, x) = k_1 x_1 + \ldots + k_d x_d$.

Отже, нехай $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, а $\Omega(t) = \Omega(t_1, \ldots, t_d)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови 1 – 4, (S) і (S_l). Тоді $B^{\Omega}_{p,\theta} = \left\{ f \in L^0_p(\pi_d)\colon \ ||f||_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \le 1 \right\}$, де

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\theta}} = \Big\{ \sum_s \Omega^{-\theta}(2^{-s}) ||\delta_s(f, \cdot)||_p^{\theta} \Big\}^{\frac{1}{\theta}}, \ \ 1 \le \theta < \infty, \tag{1}$$

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\infty}} = \sup_s \frac{||\delta_s(f, \cdot)||_p}{\Omega(2^{-s})}, \tag{2}$$

де $\Omega(2^{-s}) = \Omega(2^{-s_1}, ..., 2^{-s_d})$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, \ldots, d\}$.

Зазначимо, що при $\theta = \infty$ класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ збігаються з класами H^{Ω}_p, розглянутими у роботі [3], а при $\Omega(t) = \prod_{j=1}^d t_j^{r_j}$, $r_j > 0$, — з класами Бєсова $B^r_{p,\theta}$ (див., наприклад, [4]).

Означення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ можна розповсюдити на крайні випадки $p = 1$ і $p = +\infty$, дещо видозмінивши в (1) і (2) "блоки" $\delta_s(f, x)$.

Нехай $V_n(t)$ — ядро Валле Пуссена порядку $2n - 1$, тобто

$$V_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos kt + 2\sum_{k=n+1}^{2n-1} \left(1 - \tfrac{k-n}{n}\right) \cos kt.$$

Кожному вектору $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, \ldots, d\}$, поставимо у відповідність поліном

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^d \left(V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j - 1}}(x_j) \right)$$

і для $f \in L^0_p(\pi_d)$, $1 \le p \le \infty$, через $A_s(f, x)$ позначимо згортку $A_s(f, x) = f(x) * A_s(x)$. Тоді при кожному $1 \le p \le \infty$ норму функцій з класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ можна подати у вигляді

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \Big(\sum_s \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \, \|A_s(f, \cdot)\|_p^{\theta} \Big)^{\frac{1}{\theta}}, \ 1 \le \theta < \infty, \tag{3}$$

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\infty}} \asymp \sup_s \frac{\|A_s(f, \cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})}. \tag{4}$$

Співвідношення (3) встановлено в [5], а (4) – в [3].

Далі будемо розглядати класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$, які визначаються функцією $\Omega(t)$ вигляду

$$\Omega(t) = \omega\big(\prod_{j=1}^{d} t_j\big), \tag{5}$$

де $\omega(\tau)$ — задана функція (однієї змінної) типу модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови (S) і (S_l). Легко переконатися, що для $\Omega(t)$ вигляду (5) виконуються умови 1 - 4 функції типу мішаного модуля неперервності порядку l, а також умови (S) і (S_l), і тому зберігаються наведені вище зображення норм функцій класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$.

Наведемо, потрібні нам у подальших міркуваннях, деякі відомі твердження.

Теорема А [6]. *Нехай $T_n(x)$ — тригонометричний поліном порядку $n = (n_1, ..., n_d)$, $T_n(x) = \sum_{|k_1|\le n_1} ... \sum_{|k_d|\le n_d} c_{k_1,...,k_d} e^{i(k,x)}$, де $n_j,\ j \in \{1, \dots, d\}$, — натуральні числа, $c_{k_1,...,k_d}$ — довільні коефіцієнти. Тоді при $1 \le q < p \le \infty$ має місце співвідношення*

$$\|T_n(x)\|_p \le 2^d \big(\prod_{j=1}^{d} n_j\big)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|T_n(x)\|_q. \tag{6}$$

Нерівність (6) була встановлена С. М. Нікольським і отримала назву "нерівності різних метрик". У випадку $d = 1$ і $p = \infty$ відповідну нерівність довів Джексон [7].

Теорема Б [3]. *Нехай $\Omega(t)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови (S) та (S_l). Нехай, далі, $f \in L^0_q(\pi_d)$. В цьому випадку для того, щоб $f \in H^{\Omega}_q$ з деякою константою $C_3 > 0$, необхідно і достатньо, щоб виконувались нерівності: $\|\delta_s(f,\cdot)\|_q \le C_4\Omega(2^{-s}),\ 1 < q < \infty$, $\|A_s(f,\cdot)\|_q \le C_5\Omega(2^{-s})$, $1 \le q \le \infty$ з деякими константами $C_4 > 0$ та $C_5 > 0$.*

Теорема В (Літтлвуда-Пелі [8, с. 65]). *Нехай задано $1 < p < \infty$. Існують додатні числа $C_6(p),\ C_7(p)$ такі, що для кожної функції $f \in L^0_p(\pi_d)$ виконуються співвідношення*

$$C_6(p)\|f\|_p \le \Big\| \big(\sum_s |\delta_s(f,\cdot)|^2\big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p \le C_7(p)\|f\|_p. \tag{7}$$

З (7) легко отримати (див., наприклад, [9, с. 17]) наступне співвідношення

$$\|f\|_p \ll \Big(\sum_s \|\delta_s(f,\cdot)\|_p^{p_0}\Big)^{\frac{1}{p_0}}, \text{де } p_0 = \min\{p; 2\}. \tag{8}$$

Наслідок [10, с. 7]. *Нехай $1 < p < \infty$, $f \in L^0_p(\pi_d)$ і $S_m(f) = \sum_{\|s\|_1\le m+1} \delta_s(f,x)$, де $\|s\|_1 = s_1 + ... + s_d$. Існує додатне число $C_8(p)$ таке, що $\|S_m(f)\|_p \le C_8(p)\|f\|_p$.*

1. Колмогоровські поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$, $p = 1, \infty$, у просторі L_q. В даному підрозділі вивчаються колмогоровські поперечники класів $B^{\Omega}_{1,\theta}$ та $B^{\Omega}_{\infty,\theta}$ у просторі L_q, $1 < q < \infty$. Нагадаємо, що M–вимірним колмогоровським поперечником центрально - симетричної множини Φ банахового простору X називається величина ([11])

$$d_M(\Phi, X) = \inf_{L_M} \sup_{f\in\Phi} \inf_{u\in L_M} \|f - u\|_X, \tag{9}$$

де L_M — підпростір розмірності M простору X.

Дослідимо спочатку поведінку величини $d_M(B^{\Omega}_{1,\theta}, L_q)$. Проводячи міркування подібні до використаних в [1], нескладно переконатись, що $B^{\Omega}_{1,\theta} \subset L_q(\pi_d)$, $1 < q < \infty$, якщо $\Omega(t)$ задовольняє умову (S) з деяким $\alpha > 1 - \frac{1}{q}$, а також умову (S_l). Нижче нам буде зручно розглянути окремо випадки $1 < q \leq 2$ та $2 \leq q < \infty$, оскільки при встановленні оцінок знизу в цих випадках використовуються різні методи, і, крім того, величину порядку поперечника $d_M(B^{\Omega}_{1,\theta}, L_q)$, $1 < q \leq 2$, ми змогли отримати тільки при $\theta \in [1, q]$.

Доведемо спочатку таку теорему.

Теорема 1.1. *Нехай* $1 < q \leq 2$, $\theta \in [1, q]$ *і* $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot ... \cdot t_d)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha > 1 - \frac{1}{q}$, *а також умову* (S_l). *Тоді для будь-яких* $M, n \in \mathbb{N}$, *таких, що* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *виконується оцінка*

$$d_M(B^{\Omega}_{1,\theta}, L_q) \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n(1-\frac{1}{q})}. \tag{10}$$

Доведення. Оцінка зверху в (10) випливає з оцінки наближення класів $B^{\Omega}_{1,\theta}$ за допомогою східчасто-гіперболічних сум Фур'є $S_{Q_n}(f,x) = \sum_{\|s\|_1 < n} \delta_s(f,x)$, де $Q_n = \bigcup_{\|s\|_1 < n} \rho(s)$, яка отримана в [12, теорема 1']:

$$\mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{1,\theta})_q \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n(1-\frac{1}{q})} n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})_+}, \tag{11}$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Тому з того, що $|Q_n| \asymp 2^n n^{d-1}$ (див., наприклад, [13]), а число n задовольняє співвідношення $M \asymp 2^n n^{d-1}$, маємо $d_M(B^{\Omega}_{1,\theta}, L_q) \ll \mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{1,\theta})_q \asymp \omega(2^{-n}) \cdot 2^{n(1-\frac{1}{q})}$.

Встановимо тепер оцінку знизу. Нехай спочатку $q = 2$. За заданим M виберемо n із співвідношення $M \asymp 2^n n^{d-1}$ так, щоб $|Q_n| \geq 2M$, і через $T(Q_n)$ позначимо множину функцій вигляду $T(Q_n) = \left\{ f(x) \colon f(x) = \sum_{k \in Q_n} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)} \right\}$.

Тоді, з одного боку, з означення колмогоровського поперечника

$$d_M(B^{\Omega}_{1,\theta}, L_2) \geq d_M(B^{\Omega}_{1,\theta} \cap T(Q_n), L_2). \tag{12}$$

А з іншого, якщо P_n — оператор ортогонального проектування на $T(Q_n)$, то для $f \in L_2$ і $t \in T(Q_n)$

$$\|f - t\|_2 \geq \|P_n f - t\|_2. \tag{13}$$

Відповідно, з (12) та (13) отримаємо $d_M(B^{\Omega}_{1,\theta}, L_2) \geq d_M(B^{\Omega}_{1,\theta} \cap T(Q_n), L_2 \cap T(Q_n))$.

Далі, нехай $K = |Q_n|$ – кількість елементів множини Q_n. За вибором числа n, $|Q_n| \geq 2M$ та $|Q_n| \asymp 2^n n^{d-1}$.

Нехай $\alpha_1(x), ..., \alpha_K(x)$ — деяка ортонормована система функцій з $T(Q_n)$. Тоді

$$e^{i(k,x)} = \sum_{j=1}^{K} a^j_k \alpha_j(x), \quad k \in Q_n, \tag{14}$$

$$\alpha_j(x) = \sum_{k \in Q_n} \overline{a}^j_k e^{i(k,x)}, \quad j \in \{1, \ldots, K\}, \tag{15}$$

де a^j_k — коефіцієнти Фур'є експоненти $e^{i(k,x)}$ за системою $\{\alpha_j(x)\}_{j=1}^K$, а $\overline{a}^j_k$ — число комплексно-спряжене до a^j_k. Внаслідок ортонормованості систем функцій $\{e^{i(k,x)}\}_{k \in Q_n}$ і

$\{\alpha_j(x)\}_{j=1}^K$ з (14) та (15), маємо

$$\sum_{j=1}^{K} |a_k^j|^2 = \sum_{k\in Q_n} |a_k^j|^2 = 1. \tag{16}$$

Тепер розглянемо наближення функції $e^{i(k,x)}$, $k \in Q_n$, її M–ою сумою Фур'є, $M = [\frac{K}{2}]$ за системою $\{\alpha_j(x)\}_{j=1}^M$ в метриці L_2. Маємо

$$R_k^2 = \Big\|e^{i(k,\cdot)} - \sum_{j=1}^{M} a_k^j \alpha_j(\cdot)\Big\|_2^2 = \Big\|\sum_{j=1}^{K} a_k^j \alpha_j(\cdot) - \sum_{j=1}^{M} a_k^j \alpha_j(\cdot)\Big\|_2^2 =$$

$$= \Big\| \sum_{j=M+1}^{K} a_k^j \alpha_j(\cdot)\Big\|_2^2 = \sum_{j=M+1}^{K} |a_k^j|^2 \tag{17}$$

і, таким чином, приймаючи до уваги (16), отримаємо $\sum\limits_{k\in Q_n} R_k^2 = \sum\limits_{k\in Q_n} \sum\limits_{j=M+1}^{K} |a_k^j|^2 =$
$= \sum_{k\in Q_n}\Big(\sum_{j=1}^K |a_k^j|^2 - \sum_{j=1}^M |a_k^j|^2\Big) = \sum_{j=1}^K \sum_{k\in Q_n} |a_k^j|^2 - \sum_{j=1}^M \sum_{k\in Q_n} |a_k^j|^2 = K - M \geq \frac{K}{2}$.
З останньої нерівності робимо висновок, що існує вектор $s^* = (s_1^*, ..., s_d^*)$, $\|s^*\|_1 < n$, такий, що

$$\sum_{k\in\rho(s^*)} R_k^2 \geq \frac{1}{2}|\rho(s^*)|. \tag{18}$$

Розглянемо функцію

$$g_1(x) = \omega(2^{-\|s^*\|_1}) \sum_{k\in\rho(s^*)} e^{i(k,x)}, \tag{19}$$

і покажемо, що $C_9 g_1(x) \in B_{1,\theta}^{\Omega}$, $C_9 > 0$. Справді,

$$\|g_1\|_{B_{1,\theta}^{\Omega}} \leq C_{10}\Big(\sum_s \omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1})\|A_s(g_1,\cdot)\|_1^{\theta}\Big)^{\frac{1}{\theta}} =$$
$$= C_{10}\omega^{-1}(2^{-\|s^*\|_1})\|A_{s^*}(g_1,\cdot)\|_1 \leq C_{11}\omega^{-1}(2^{-\|s^*\|_1})\omega(2^{-\|s^*\|_1}) = C_{11}.$$

Звідси випливає, що $C_9 g_1(x) \in B_{1,\theta}^{\Omega}$, де $C_9 = C_{11}^{-1}$.

Далі, розглянемо відхилення функції $g_1(x+y)$, $x, y \in \pi_d$, від її M–ої суми Фур'є за системою $\alpha = \{\alpha_j(x)\}_{j=1}^K$. Згідно з (19) матимемо

$$R_M(x,y) = g_1(x+y) - S_M(g_1(x+y), \alpha) = \omega(2^{-\|s^*\|_1}) \sum_{k\in\rho(s^*)} e^{i(k,y)} \sum_{j=M+1}^{K} a_k^j \alpha_j(x)$$

і

$$\|R_M(\cdot,y)\|_2^2 = \sum_{j=M+1}^{K} \Big|\omega(2^{-\|s^*\|_1}) \sum_{k\in\rho(s^*)} a_k^j e^{i(k,y)}\Big|^2. \tag{20}$$

Далі, скориставшись співвідношеннями (20), (17) та (18), одержимо

$$(2\pi)^{-d}\int_{\pi_d} \|R_M(\cdot,y)\|_2^2\, dy = \omega^2(2^{-\|s^*\|_1}) \sum_{j=M+1}^{K} \sum_{k\in\rho(s^*)} |a_k^j|^2 =$$
$$= \omega^2(2^{-\|s^*\|_1}) \sum_{k\in\rho(s^*)} \sum_{j=M+1}^{K} |a_k^j|^2 = \omega^2(2^{-\|s^*\|_1}) \sum_{k\in\rho(s^*)} R_k^2 \geq \tfrac{1}{2}\omega^2(2^{-\|s^*\|_1})|\rho(s^*)|,$$

з чого робимо висновок, що для деякого $y^* \in \pi_d$ виконується

$$\|R_M(\cdot,y^*)\|_2^2 \ge \frac{1}{2}\omega^2(2^{-\|s^*\|_1})|\rho(s^*)| \asymp \omega^2(2^{-\|s^*\|_1})2^{\|s^*\|_1}.$$

Оскільки $\Omega(t)=\omega(t_1\cdot\ldots\cdot t_d)$ задовольняє умову (S) з $\alpha>\frac{1}{2}$, то легко бачити, що для $\|s\|_1>n$ виконується співвідношення

$$\frac{\omega(2^{-\|s\|_1})}{2^{-\alpha\|s\|_1}} \ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}}, \tag{21}$$

а тому

$$\|R_M(\cdot,y^*)\|_2 \gg \frac{\omega(2^{-\|s^*\|_1})}{2^{-\alpha\|s^*\|_1}}2^{-\|s^*\|_1(\alpha-\frac{1}{2})} \gg \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}}2^{-n(\alpha-\frac{1}{2})} = \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{2}}. \tag{22}$$

Оскільки система $\{\alpha_j(x)\}_{j=1}^K$ вибиралася довільно, то згідно з означенням колмогоровського поперечника з (22) одержимо $d_M(B^{\Omega}_{1,\theta},L_2)\gg\omega(2^{-n})2^{\frac{n}{2}}$.

Нехай $1<q<2$. Тоді, скориставшись наслідком з теореми B, матимемо

$$\sup_{f\in B^{\Omega}_{1,\theta}}\inf_{c_i}\Big\|f-\sum_{i=1}^{M}c_i\varphi_i\Big\|_q \gg \sup_{f\in B^{\Omega}_{1,\theta}}\inf_{c_i}\Big\|S_n(f)-\sum_{i=1}^{M}c_iS_n(\varphi_i)\Big\|_q = I_1,$$

де $\{\varphi_i\}_{i=1}^M$ — деяка наближаюча система функцій.

Використовуючи нерівність різних метрик (6), продовжимо оцінку I_1

$$I_1 \gg 2^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}\sup_{f\in B^{\Omega}_{1,\theta}}\inf_{c_i}\Big\|S_n(f)-\sum_{i=1}^{M}c_iS_n(\varphi_i)\Big\|_2 \gg \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{2}}2^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} = \omega(2^{-n})2^{n(1-\frac{1}{q})}.$$

Теорему доведено. □

Тепер перейдемо до отримання оцінки колмогоровського поперечника $d_M(B^{\Omega}_{1,\theta},\ L_q)$ у випадку $2\le q<\infty$.

Теорема 1.2. *Нехай* $2\le q<\infty,\ 1\le\theta\le\infty$ *і* $\Omega(t)=\omega(t_1\cdot\ldots\cdot t_d)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha>1$, *а також умову* (S_l), $l\ge 2$. *Тоді для будь-яких* $M,n\in\mathbb{N}$, *таких, що* $M\asymp 2^n n^{d-1}$, *правильна оцінка* $d_M(B^{\Omega}_{1,\theta},L_q)\asymp\omega(2^{-n})2^{\frac{n}{2}}n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}$.

Доведення. Отримаємо спочатку оцінку зверху. Застосувавши до полінома $A_s(f,x)$, $f\in B^{\Omega}_{1,\theta}$ нерівність різних метрик, отримаємо

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{1,\theta}} \asymp \Big(\sum_s\omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1})\|A_s(f,\cdot)\|_1^{\theta}\Big)^{\frac{1}{\theta}} \gg \Big(\sum_s\omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1})\|A_s(f,\cdot)\|_2^{\theta}2^{-\frac{\|s\|_1}{2}\theta}\Big)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= \Big(\sum_s\omega_1^{-\theta}(2^{-\|s\|_1})\|A_s(f,\cdot)\|_2^{\theta}\Big)^{\frac{1}{\theta}} \asymp \|f\|_{B^{\Omega_1}_{2,\theta}},\ \text{де } \Omega_1(t)=\omega_1(t_1\cdot\ldots\cdot t_d)\ ,\ \omega_1(\tau)=\omega(\tau)\tau^{-\frac{1}{2}}.$$

Звідси, робимо висновок, що $B^{\Omega}_{1,\theta}\subset B^{\Omega_1}_{2,\theta}$.

Скориставшись оцінкою з [1] $d_M(B^{\Omega}_{2,\theta},L_q) \asymp \omega(2^{-n})n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}$, при $\alpha>\frac{1}{2}$, $2\le q<\infty$, отримаємо $d_M(B^{\Omega}_{1,\theta},L_q)\ll d_M(B^{\Omega_1}_{2,\theta},L_q)\asymp\omega(2^{-n})2^{\frac{n}{2}}n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}$.

Потрібну оцінку зверху встановлено.

Встановимо тепер відповідну оцінку знизу. Нехай спочатку $\theta\in[1;2]$. В такому випадку шукана оцінка випливає безпосередньо з теореми 1.1 при $q=2$. При розгляді випадку $2<\theta\le\infty$ скористаємося наступними міркуваннями.

Нехай $L_q(\pi_{2d})$, $q=(q_1,q_2)$, позначає множину функцій $f(x,y)$, $x,y\in\pi_d$, зі скінченною мішаною нормою $\|f(x,y)\|_{q_1,q_2}=\big\|\|f(\cdot,y)\|_{q_1}\big\|_{q_2}$, де норма береться спочатку у просторі $L_{q_1}(\pi_d)$ за змінною $x\in\pi_d$, а потім за змінною $y\in\pi_d$ у просторі $L_{q_2}(\pi_d)$. Для $f\in L_q(\pi_{2d})$ означимо величину

$$\tau_M(f)_{q_1,q_2} = \inf_{u_i(x),v_i(y)} \Big\| f(x,y) - \sum_{i=1}^{M} u_i(x)v_i(y) \Big\|_{q_1,q_2},$$

де $u_i \in L_{q_1}(\pi_d)$, $v_i \in L_{q_2}(\pi_d)$, яка називається найкращим білінійним наближенням функції $f(x)$.

Нехай F — деякий клас функцій і $f(x)$ — фіксована функція з F. Позначимо через F_f множину, що складається з функцій виду $f(x-y)$, які отримуються з $f(x)$ зсувом аргументу $x \in \pi_d$ на довільний вектор $y \in \pi_d$. Тоді правильна рівність (див., наприклад, [10, розділ 4, вступ])

$$\tau_M(f(x-y))_{q_1,\infty} = d_M(F_f, L_{q_1}). \tag{23}$$

Відповідно, якщо функціональний клас F інваріантний відносно зсуву аргументу функції $f \in F$, то згідно з (23) значення величин $\tau_M(f(x-y))_{q_1,\infty}$ можуть слугувати оцінками знизу для поперечників $d_M(F, L_{q_1})$. Саме цим і скористаємось для подальших міркувань.

За заданим M підберемо $n \in \mathbb{N}$ таким, щоб для кількості елементів множини $Q_n' = \bigcup\limits_{\|s\|_1=n} \rho(s)$ виконувались співвідношення $|Q_n'| \asymp M$ та $|Q_n'| > M$. Відмітимо, що $|Q_n'| \asymp 2^n n^{d-1}$.

Розглянемо функції

$$g_2(x) = C_{12} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{n \le \|s\|_1 \le n+d} \omega(2^{-\|s\|_1}) \sum_{k \in \rho^+(s)} e^{i(k,x)}, \quad C_{12} > 0$$

та

$$g_3(x) = C_{13} \sum_{n \le \|s\|_1 \le n+d} \omega(2^{-\|s\|_1}) \sum_{k \in \rho^+(s)} e^{i(k,x)}, \quad C_{13} > 0,$$

де $\rho^+(s) = \left\{k\colon\ k=(k_1,\dots,k_d),\ 2^{s_j-1} \le k_j < 2^{s_j},\ j \in \{1,\dots,d\}\right\}$.

Встановимо належність цих функцій до класів $B^{\Omega}_{1,\theta}$ при певних значеннях сталих C_{12} та C_{13}. Справді,

$$\|g_2\|_{B^{\Omega}_{1,\theta}} \asymp \Big(\sum_{n \le \|s\|_1 \le n+d} \omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1}) \|A_s(g_2,\cdot)\|_1^{\theta} \Big)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll n^{-\frac{d-1}{\theta}} \Big(\sum_{n \le \|s\|_1 \le n+d} \omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1}) \omega^{\theta}(2^{-\|s\|_1}) \Big)^{\frac{1}{\theta}} \asymp n^{-\frac{d-1}{\theta}} n^{\frac{d-1}{\theta}} = 1,$$

$$\|g_3\|_{B^{\Omega}_{1,\infty}} \asymp \sup_{n \le \|s\|_1 \le n+d} \frac{\|A_s(g_3,\cdot)\|_1}{\omega(2^{-\|s\|_1})} \ll \sup_{n \le \|s\|_1 \le n+d} \frac{\omega(2^{-\|s\|_1})}{\omega(2^{-\|s\|_1})} = 1.$$

Далі, нам знадобиться відомий результат Шмідта [14], який сформулюємо в дещо загальнішому вигляді.

Теорема Г (див., наприклад, [10, вступ]). *Нехай $\|K(x,y)\|_{2,2} < \infty$, $K-$ інтегральний оператор з ядром $K(x,y)$, K^* — оператор, спряжений до оператора K, і λ_m — незростаюча послідовність власних чисел оператора K^*K. Тоді*

$$\inf_{u_i(x),v_i(y)} \Big\| K(x,y) - \sum_{i=1}^{M} u_i(x)v_i(y) \Big\|_{2,2} = \Big(\sum_{m=M+1}^{\infty} \lambda_m \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Нехай G — інтегральний оператор $(Gf)(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} g_2(x-y) f(y)\, dy$, G^* — оператор, спряжений до G, і λ_m — власні числа оператора G^*G, які розміщені в незростаючому порядку. Поскільки λ_m співпадають з числами $bn^{-\frac{2(d-1)}{\theta}} \omega^2(2^{-\|s\|_1}) = bn^{-\frac{2(d-1)}{\theta}} \widetilde{\lambda}_m$, $b > 0$ (відповідно, $\lambda_m = b\widetilde{\lambda}_m$ при $\theta = \infty$), розміщені в незростаючому порядку, то згідно з теоремою Г будемо мати

$$\inf_{u_i(x),v_i(y)} \Big\| g_2(x-y) - \sum_{i=1}^{M} u_i(x)v_i(y)\Big\|_{2,2} \asymp \Big(\sum_{m\geq M+1} \widetilde{\lambda}_m \Big)^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \gg$$

$$\gg n^{-\frac{d-1}{\theta}} \Big(\sum_{\|s\|_1=n+d} \omega^2(2^{-\|s\|_1})2^{\|s\|_1} \Big)^{\frac{1}{2}} \asymp \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{2}} n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}. \qquad (24)$$

Подібно у випадку $\theta = \infty$ матимемо

$$\inf_{u_i(x),v_i(y)} \Big\| g_3(x-y) - \sum_{i=1}^{M} u_i(x)v_i(y)\Big\|_{2,2} \gg \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{2}} n^{\frac{d-1}{2}}.$$

Отже, внаслідок (24) можемо записати при $2 \leq q_1 < \infty$

$$\tau_M(g_2(x-y))_{q_1,\infty} \geq \tau_M(g_2(x-y))_{2,2} \gg \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{2}} n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}$$

і згідно з (23) $d_M(B^{\Omega}_{1,\theta}, L_{q_1}) \gg \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{2}} n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}$.

Відповідно, для $\theta = \infty$ одержимо $d_M(B^{\Omega}_{1,\infty}, L_{q_1}) \gg \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{2}} n^{\frac{d-1}{2}}$.

Оцінку знизу, а разом з нею і теорему доведено. □

Зауваження 1.1. *Покладаючи в теоремі 1.2 $\theta = \infty$, отримаємо оцінку*

$$d_M(H^{\Omega}_1, L_q) \asymp \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{2}} n^{\frac{d-1}{2}}.$$

Тепер перейдемо до встановлення точних за порядком оцінок колмогоровських поперечників $d_M(B^{\Omega}_{\infty,\theta}, L_q)$, $1 < q < \infty$. При цьому ми розглянемо окремо випадки $1 < q \leq 2$ та $2 \leq q < \infty$.

Теорема 1.3. *Нехай $2 \leq q < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$ і $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot ... \cdot t_d)$, де $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S) з деяким $\alpha > 0$, а також умову (S_l). Тоді для будь-яких $M, n \in \mathbb{N}$, таких, що $M \asymp 2^n n^{d-1}$, має місце оцінка*

$$d_M(B^{\Omega}_{\infty,\theta}, L_q) \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}. \qquad (25)$$

Доведення. При встановленні оцінки зверху в (25) будемо використовувати наступне співвідношення:

$$\mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{q,\theta})_q \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}. \qquad (26)$$

Відмітимо, що при $1 \leq \theta < \infty$ оцінка (26) була встановлена в роботі [1], а при $\theta = \infty$ — в роботі [3].

Тому при $M \asymp 2^n n^{d-1}$, отримаємо

$$d_M(B^{\Omega}_{\infty,\theta}, L_q) \leq d_M(B^{\Omega}_{q,\theta}, L_q) \ll \mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{q,\theta})_q \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}.$$

Перейдемо до встановлення оцінки знизу. Нехай спочатку $\theta \in [1,2]$. В такому випадку необхідна оцінка випливає з оцінки поперечника $d_M(B^{\Omega}_{\infty,\theta}, L_2)$, яка встановлена в [15].

Нехай тепер $2 < \theta \leq \infty$. Підберемо за заданим M число $n \in \mathbb{N}$ із співвідношення $M \asymp 2^n n^{d-1}$ і позначимо $S_n = \{s\colon \ \|s\|_1 = n, \ s_j - \text{парні числа}\}$, $\overline{Q}_n = \bigcup_{s\in S_n} \rho^+(s)$, $\rho^+(s) = \rho(s) \cap \mathbb{Z}^d_+$.

Зазначимо, що для кількості елементів множини $\overline{Q}_n$ має місце співвідношення $|\overline{Q}_n| \asymp 2^n n^{d-1}$.

Нехай $T(\overline{Q}_n)$ позначає множину поліномів з "номерами" гармонік з $\overline{Q}_n$. В [15] встановлена оцінка

$$d_M(H^{\Omega}_{\infty} \cap T(\overline{Q}_n), L_q) \gg \omega(2^{-n}) n^{\frac{d-1}{2}}, \quad q > 1, \qquad (27)$$

з якої легко отримати шукану оцінку знизу поперечника $d_M(B^{\Omega}_{\infty,\theta}, L_q)$.
Справді, поскільки для $f \in H^{\Omega}_{\infty} \cap T(\overline{Q}_n)$ виконується співвідношення $\|A_s(f,\cdot)\|_{\infty} \ll \Omega(2^{-s})$, $s \in S_n$, то для величини $\|f\|_{B^{\Omega}_{\infty,\theta} \cap T(\overline{Q}_n)}$ можемо записати $\|f\|_{B^{\Omega}_{\infty,\theta} \cap T(\overline{Q}_n)} \asymp$
$\asymp \big(\sum\limits_{s \in S_n} \omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1}) \|A_s(f,\cdot)\|^{\theta}_{\infty} \big)^{\frac{1}{\theta}} \ll \big(\sum\limits_{s \in S_n} \omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1}) \omega^{\theta}(2^{-\|s\|_1}) \big)^{\frac{1}{\theta}} = \big(\sum\limits_{s \in S_n} 1 \big)^{\frac{1}{\theta}} \asymp n^{\frac{d-1}{\theta}}$.
Тобто, якщо $f \in H^{\Omega}_{\infty} \cap T(\overline{Q}_n)$, то функція $C_{14} n^{-\frac{d-1}{\theta}} f(x)$ з деякою сталою $C_{14} > 0$ належить до класу $B^{\Omega}_{\infty,\theta} \cap T(\overline{Q}_n)$. Тому, скориставшись оцінкою (27), будемо мати
$d_M(B^{\Omega}_{\infty,\theta}, L_q) \gg d_M(B^{\Omega}_{\infty,\theta} \cap T(\overline{Q}_n), L_q) \gg d_M(H^{\Omega}_{\infty} \cap T(\overline{Q}_n), L_q) n^{-\frac{d-1}{\theta}} \gg \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}$.
Теорему доведено. □

Оцінку (25) легко поширити і на випадок $1 < q \leq 2$, але при певних обмеженнях на параметр θ.

Теорема 1.4. *Нехай* $1 < q \leq 2,\ 2 \leq \theta \leq \infty$ *і* $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot ... \cdot t_d)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha > 0$, *а також умову* (S_l). *Тоді для будь-яких* $M, n \in \mathbb{N}$, *таких, що* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *правильна оцінка*

$$d_M(B^{\Omega}_{\infty,\theta}, L_q) \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}. \tag{28}$$

Доведення. Оцінка зверху в (28) випливає з (25) згідно нерівності $\|\cdot\|_q \leq \|\cdot\|_2$, $1 < q \leq 2$. Відповідну оцінку знизу отримано при доведенні попередньої теореми. Теорему доведено. □

Зауваження 1.2. *Покладаючи в теоремах 1.3 та 1.4 параметр* $\theta = \infty$, *отримаємо наступну оцінку* $d_M(H^{\Omega}_{\infty}, L_q) \asymp \omega(2^{-n}) n^{\frac{d-1}{2}}$.

Зауваження 1.3. *При* $\omega(\tau) = \tau^{r_1}$ *і певних обмеженнях на параметр* r_1 *з результатів теорем 1.1 – 1.4 отримуються відповідні результати для класів* $B^r_{p,\theta}, p = 1, \infty$, *які встановлені в роботі [16].*

2. Тригонометричні поперечники класів $B^{\Omega}_{1,\theta}$ у просторі L_q. Даний пункт присвячений дослідженню тригонометричних поперечників класів $B^{\Omega}_{1,\theta}$ у просторі L_q при $1 < q < \infty$. Наведемо означення досліджуваної величини.

Нехай $F \subset L_q$ — деякий функціональний клас. Тригонометричний поперечник класу F у просторі L_q (позначається $d^T_M(F, L_q)$) означається наступним чином:

$$d^T_M(F, L_q) = \inf_{\Omega_M} \sup_{f \in F} \inf_{t(\Omega_M; x)} \big\| f(\cdot) - t(\Omega_M; \cdot) \big\|_q, \tag{29}$$

де $t(\Omega_M; x) = \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(k^j, x)}$, $\Omega_M = \{k^1, ..., k^M\}$ — набір векторів $k^j = (k^j_1, ..., k^j_d)$, $j \in \{1, \ldots, M\}$, з цілочисельної решітки $\mathbb{Z}^d$, c_j — довільні числа.

Поняття тригонометричного поперечника ввів Р.С. Ісмагілов [17]. Дослідженню тригонометричних поперечників присвячена, зокрема, робота [16], де можна ознайомитися з більш детальнішою бібліографією.

З означення колмогоровських та тригонометричних поперечників класу F у просторі L_q випливає нерівність

$$d_M(F, L_q) \leq d^T_M(F, L_q). \tag{30}$$

Тому оцінки знизу, які доведено для колмогоровських поперечників, залишаються вірними для тригонометричних поперечників. І навпаки, якщо відомо оцінки зверху для тригонометричних поперечників, то вони справедливі і для колмогоровських поперечників.

Теорема 2.1. *Нехай $2 \le q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ і $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot ... \cdot t_d)$, де $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S) з деяким $\alpha > 1$, а також умову (S_l), $l \ge 2$. Тоді для будь-яких $M, n \in \mathbb{N}$, таких, що $M \asymp 2^n n^{d-1}$, має місце співвідношення*

$$d^T_M(B^{\Omega}_{1,\theta}, L_q) \asymp \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{2}} n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}. \tag{31}$$

Доведення. Оцінка знизу в (31) випливає з нерівності (30) та результату теореми 1.2. Для доведення в (31) оцінки зверху скористаємося таким допоміжним твердженням.

Лема 2.1 [18]. *Нехай $2 \le q < \infty$, $\Omega_M = \{k^j\}_{j=1}^M \subset \mathbb{Z}^d$. Тоді для тригонометричного полінома $P(\Omega_M; x) = \sum_{j=1}^M e^{i(k^j,x)}$ і для будь-якого $N \le M$ знайдеться тригонометричний поліном $P(\Omega_N; x)$, який містить не більше N гармонік і такий, що*

$$\|P(\Omega_M;\cdot) - P(\Omega_N;\cdot)\|_q \ll M N^{-\frac{1}{2}},$$

причому $\Omega_N \subset \Omega_M$, всі коефіцієнти $P(\Omega_N; x)$ однакові і не перевищують MN^{-1}.

Нехай задано M. Підберемо $n \in \mathbb{N}$ так, щоб $2^n n^{d-1} \asymp M$ і $2^n n^{d-1} \ge 2M$. Далі, кожному вектору $s = (s_1, ..., s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, \dots, d\}$, що задовольняє умову $n \le \|s\|_1 < \beta n$, $\beta = \frac{\alpha - \frac{1}{2}}{\alpha - 1 + \frac{1}{q}}$, поставимо у відповідність число

$$N_s = [\omega^{-1}(2^{-n}) \omega(2^{-\|s\|_1}) 2^{\|s\|_1}] + 1, \tag{32}$$

де [a] — ціла частина числа a. Неважко переконатися, що для чисел $N_s, n \le \|s\|_1 < \beta n$, правильна оцінка

$$\sum_{n \le \|s\|_1 < \beta n} N_s \ll M.$$

Справді, враховуючи (21) та співвідношення

$$\sum_{\|s\|_1 \ge n} 2^{-\sigma \|s\|_1} = \sum_{j=n}^{\infty} \sum_{\|s\|_1 = j} 2^{-\sigma \|s\|_1} = \sum_{j=n}^{\infty} 2^{-\sigma j} \sum_{\|s\|_1 = j} 1 \asymp$$

$$\asymp \sum_{j=n}^{\infty} 2^{-\sigma j} j^{d-1} \asymp 2^{-\sigma n} n^{d-1}, \quad \sigma > 0, \tag{33}$$

матимемо

$$\sum_{n \le \|s\|_1 < \beta n} N_s \ll \omega^{-1}(2^{-n}) \sum_{n \le \|s\|_1 < \beta n} \frac{\omega(2^{-\|s\|_1})}{2^{-\alpha \|s\|_1}} 2^{-\|s\|_1 (\alpha - 1)} + n^d \ll$$
$$\ll \omega^{-1}(2^{-n}) \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \sum_{\|s\|_1 \ge n} 2^{-\|s\|_1(\alpha-1)} + n^d \ll 2^n n^{d-1} \asymp M.$$

Позначимо через $t(\Omega_{N_s}; x)$ — тригонометричний поліном, підібраний для кожного “блоку” $t_s(x) = \sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k,x)}$ згідно з лемою 2.1, тобто

$$\|t_s(\cdot) - t(\Omega_{N_s};\cdot)\|_q \ll 2^{\|s\|_1} N_s^{-\frac{1}{2}}.$$

Зазначимо, що внаслідок леми 2.1 $\Omega_{N_s} \subset \rho(s)$ і всі коефіцієнти $t(\Omega_{N_s}; x)$ однакові. Покажемо, що на підпросторі тригонометричних поліномів з номерами гармонік з об'єднання множин $Q_n = \bigcup_{\|s\|_1 < n} \rho(s)$, $\quad P_n = \bigcup_{n \le \|s\|_1 < \beta n} \Omega_{N_s}$ реалізуються значення поперечника $d^T_M(B^{\Omega}_{1,\theta}, L_q)$.

Нехай $f(x)$ — деяка функція з класу $B^{\Omega}_{1,\theta}$. Переконаємось, що за допомогою полінома

$$t(x) = \sum_{\|s\|_1 < n} \delta_s(f, x) + \sum_{n \le \|s\|_1 < \beta n} (t(\Omega_{N_s}; x) * \delta_s(f, x)) \tag{34}$$

можна одержати потрібну оцінку наближення для $f(x)$. Згідно з нерівністю Мінковського, враховуючи (34), одержимо

$$\|f(\cdot)-t(\cdot)\|_q \le \Big\| \sum_{n\le\|s\|_1<\beta n} (\delta_s(f,\cdot)-\delta_s(f,\cdot)*t(\Omega_{N_s};\cdot))\Big\|_q + \Big\| \sum_{\|s\|_1\ge\beta n} \delta_s(f,\cdot)\Big\|_q = I_1+I_2. \quad (35)$$

Далі проведемо оцінку кожного доданку в (35). Згідно з (11) для другого доданку одержимо

$$I_2 \ll \omega(2^{-\beta n})2^{\beta n(1-\frac{1}{q})} n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})_+} \le \omega(2^{-\beta n})2^{\beta n(1-\frac{1}{q})} n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}. \quad (36)$$

Отже, враховуючи значення β, співвідношення (21), з (36) будемо мати

$$I_2 \ll \frac{\omega(2^{-\beta n})}{2^{-\alpha\beta n}} 2^{-\beta n(\alpha-1+\frac{1}{q})} n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+} \ll$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} 2^{-n(\alpha-\frac{1}{2})} n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+} = \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{2}} n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}. \quad (37)$$

Для того, щоб оцінити доданок I_1, розглянемо для кожного вектора $s=(s_1,...,s_d)$, $s_j\in\mathbb{N}$, $j\in\{1,\dots,d\}$, $n\le\|s\|_1<\beta n$ лінійний оператор T_s, який діє за правилом

$$T_s f = f*(t_s(x)-t(\Omega_{N_s};x)) = f*\Big(\sum_{k\in\rho(s)} e^{i(k,x)} - t(\Omega_{N_s};x)\Big).$$

Наведемо тепер таке допоміжне твердження.

Лема 2.2 [16]. *Нехай $1\le p<2\le q<p'$, $p^{-1}+(p')^{-1}=1$. Тоді норма оператора T_s, який діє з L_p в L_q, задовольняє нерівність $\|T_s\|_{p\longrightarrow q}=\sup_{\|f\|_p\le 1}\|T_s f\|_q \ll 2^{\|s\|_1} N_s^{-(\frac{1}{2}+\frac{1}{p'})}$.*

Скориставшись для оцінки I_1 співвідношенням (8), одержимо

$$I_1 \ll \Big\|\Big(\sum_{n\le\|s\|_1<\beta n} |\delta_s(f,\cdot)-(\delta_s(f,\cdot)*t(\Omega_{N_s};\cdot))|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_q \le$$

$$\le \Big(\sum_{n\le\|s\|_1<\beta n} \Big\|\delta_s(f,\cdot)*\Big(\sum_{k\in\rho(s)} e^{i(k,\cdot)} - t(\Omega_{N_s};\cdot)\Big)\Big\|_q^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\sum_{n\le\|s\|_1<\beta n} \|T_s\delta_s(f,\cdot)\|_q^2\Big)^{\frac{1}{2}}. \quad (38)$$

Нехай q_0 — деяке число, що задовольняє умову $1<q_0<2$, яке буде означене нижче. Застосувавши до останнього співвідношення лему 2.2, продовжимо оцінку (38)

$$I_1 \ll \Big(\sum_{n\le\|s\|_1<\beta n} \|T_s\|_{q_0\longrightarrow q}^2 \|\delta_s(f,\cdot)\|_{q_0}^2\Big)^{\frac{1}{2}} \asymp \Big(\sum_{n\le\|s\|_1<\beta n} \|T_s\|_{q_0\longrightarrow q}^2 \|A_s(f,\cdot)\|_{q_0}^2\Big)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \Big(\sum_{n\le\|s\|_1<\beta n} 2^{2\|s\|_1} N_s^{-(1+\frac{2}{q_0'})} \|A_s(f,\cdot)\|_{q_0}^2\Big)^{\frac{1}{2}}. \quad (39)$$

Далі, застосувавши до $A_s(f,x)$, як до полінома степеня 2^{s_j+1} по змінній x_j, нерівність різних метрик і підставивши в (39) замість N_s їх значення з (32) та скориставшись співвідношенням (21), отримаємо

$$I_1 \ll \Big(\sum_{n\le\|s\|_1<\beta n} 2^{2\|s\|_1} \Big(\omega^{-1}(2^{-n})\omega(2^{-\|s\|_1})2^{\|s\|_1}\Big)^{-(1+\frac{2}{q_0'})} 2^{2\|s\|_1(1-\frac{1}{q_0})} \|A_s(f,\cdot)\|_1^2\Big)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \Big(\omega(2^{-n})\Big)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{q_0'}}\Big(\sum_{\|s\|_1\geq n} 2^{\|s\|_1}\Big(\frac{\omega(2^{-\|s\|_1})}{2^{-\alpha\|s\|_1}}2^{-\alpha\|s\|_1}\Big)^{1-\frac{2}{q_0'}}\omega^{-2}(2^{-\|s\|_1})\|A_s(f,\cdot)\|_1^2\Big)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \Big(\omega(2^{-n})\Big)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{q_0'}}\Big(\frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}}\Big)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q_0'}}\Big(\sum_{\|s\|_1\geq n} 2^{\|s\|_1(1-\alpha+\frac{2\alpha}{q_0'})}\omega^{-2}(2^{-\|s\|_1})\|A_s(f,\cdot)\|_1^2\Big)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \omega(2^{-n})2^{\alpha n(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_0'})}\Big(\sum_{\|s\|_1\geq n} 2^{\|s\|_1(1-\alpha+\frac{2\alpha}{q_0'})}\omega^{-2}(2^{-\|s\|_1})\|A_s(f,\cdot)\|_1^2\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{40}$$

Тепер підберемо число q_0 таким чином, щоб виконувалась нерівність $1-\alpha+\frac{2\alpha}{q_0'}<0$. Легко бачити, що таке $q_0\in(1;2)$ існує, оскільки згідно з умовою теореми $\alpha>1$. Для того, щоб продовжити оцінку (40), розглянемо три випадки.

Нехай $1\leq\theta\leq 2$, тоді скориставшись нерівністю ([19, с. 43]) Гарді

$$\Big(\sum_k |a_k|^{\nu_2}\Big)^{\frac{1}{\nu_2}} \leq \Big(\sum_k |a_k|^{\nu_1}\Big)^{\frac{1}{\nu_1}},\ 1\leq\nu_1\leq\nu_2<\infty,$$

будемо мати

$$I_1 \ll \omega(2^{-n})2^{\alpha n(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_0'})}\Big(\sum_{\|s\|_1\geq n} 2^{\|s\|_1(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{q_0'})\theta}\omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1})\|A_s(f,\cdot)\|_1^{\theta}\Big)^{\frac{1}{\theta}} \ll \omega(2^{-n})2^{\alpha n(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_0'})}\times$$

$$\times 2^{n(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{q_0'})}\Big(\sum_{\|s\|_1\geq n}\omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1})\|A_s(f,\cdot)\|_1^{\theta}\Big)^{\frac{1}{\theta}} \ll \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{2}}\|f\|_{B^{\Omega}_{1,\theta}} \leq \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{2}}. \tag{41}$$

У випадку $2<\theta<\infty$, застосувавши до останньої суми (40) нерівність Гельдера з показником $\frac{\theta}{2}$ та скориставшись потім оцінкою (33), будемо мати

$$I_1 \ll \omega(2^{-n})2^{\alpha n(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_0'})}\Big(\sum_{\|s\|_1\geq n}\Big(2^{\|s\|_1(1-\alpha+\frac{2\alpha}{q_0'})}\Big)^{\frac{\theta}{\theta-2}}\Big)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}\times$$

$$\times\Big(\sum_{\|s\|_1\geq n}\omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1})\|A_s(f,\cdot)\|_1^{\theta}\Big)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n})2^{\alpha n(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_0'})}2^{\frac{n}{2}(1-\alpha+\frac{2\alpha}{q_0'})}n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}\|f\|_{B^{\Omega}_{1,\theta}} \leq \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{2}}n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}. \tag{42}$$

Нехай $\theta=\infty$. Тоді, скориставшись теоремою Б та співвідношенням (33), матимемо

$$I_1 \ll \omega(2^{-n})2^{\alpha n(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_0'})}\Big(\sum_{\|s\|_1\geq n} 2^{\|s\|_1(1-\alpha+\frac{2\alpha}{q_0'})}\Big)^{\frac{1}{2}} \ll \omega(2^{-n})2^{\alpha n(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_0'})}2^{\frac{n}{2}(1-\alpha+\frac{2\alpha}{q_0'})}n^{\frac{d-1}{2}} =$$

$$= \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{2}}n^{\frac{d-1}{2}}.$$

Об'єднуючи останню оцінку з (41)–(42), одержуємо оцінку $I_1 \ll \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{2}}n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}$. А підставляючи останню оцінку і (37) в (35), приходимо до шуканої оцінки зверху

$$\|f(\cdot)-t(\cdot)\|_q \ll \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{2}}n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}.$$

Теорему доведено. □

Зауваження 2.1. *Покладаючи в теоремі 2.1 параметр $\theta=\infty$, отримаємо наступну оцінку* $d^T_M(H^{\Omega}_1, L_q) \asymp \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{2}}n^{\frac{d-1}{2}}$.

Зауваження 2.2. *Нехай $2 \le q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ і $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot \ldots \cdot t_d)$, де $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S) з деяким $\alpha > 1$, а також умову (S_l), $l \ge 2$. Тоді для будь-яких $M, n \in \mathbb{N}$, таких, що $M \asymp 2^n n^{d-1}$, величини $d_M(B^{\Omega}_{1,\theta}, L_q)$ та $d^T_M(B^{\Omega}_{1,\theta}, L_q)$ рівні за порядком, тобто*

$$d_M(B^{\Omega}_{1,\theta}, L_q) \asymp d^T_M(B^{\Omega}_{1,\theta}, L_q) \asymp \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{2}} n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}.$$

Таким чином, підпростір тригонометричних поліномів з "номерами" гармонік із множини Ω_M, що побудований при доведенні теореми 2.1, є екстремальним для колмогоровського поперечника $d_M(B^{\Omega}_{1,\theta}, L_q)$.

Перейдемо до встановлення оцінки поперечника $d^T_M(B^{\Omega}_{1,\theta}, L_q)$ у випадку $1 < q \le 2$.

Теорема 2.2. *Нехай $1 < q \le 2$, $1 \le \theta \le \infty$ і $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot \ldots \cdot t_d)$, де $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S) з деяким $\alpha > 1 - \frac{1}{q}$, а також умову (S_l). Тоді для будь-яких $M, n \in \mathbb{N}$, таких, що $M \asymp 2^n n^{d-1}$, має місце оцінка*

$$d^T_M(B^{\Omega}_{1,\theta}, L_q) \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n(1-\frac{1}{q})} n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})_+}. \tag{43}$$

Доведення. Оцінка зверху в (43) випливає з (11), тобто

$$d^T_M(B^{\Omega}_{1,\theta}, L_q) \ll \mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{1,\theta})_q \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n(1-\frac{1}{q})} n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})_+}.$$

Доведемо тепер відповідну оцінку знизу. Нехай спочатку $1 \le \theta \le q$. В такому випадку шукана оцінка, згідно з нерівністю (30), випливає з теореми 1.1.

Розглянемо випадок $q < \theta \le \infty$. Позначимо через Θ_n множину $\Theta_n = \{s\colon\ s = (s_1, ..., s_d), s_j \in \mathbb{N},\ j \in \{1, \ldots, d\},\ \|s\|_1 = n\}$ і, як і раніше $Q'_n = \bigcup_{s \in \Theta_n} \rho(s)$. Нагадаємо, що $|Q'_n| \asymp 2^n n^{d-1}$. Підберемо по заданому M число $n \in \mathbb{N}$ таким чином, щоб виконувались співвідношення $|Q'_n| \asymp M$ і $|Q'_n| \ge 4M$.

Шукану оцінку знизу ми встановимо в дещо більш загальному випадку. Тобто, замість функцій $e^{i(k^j,x)}$ будемо розглядати такі функції $v_j(x)$ у яких "номери" гармонік знаходяться у множині $\rho(s^j)$, $s^j = (s^j_1, ..., s^j_d)$, $j \in \{1, \ldots, M\}$.

Нехай μ_n позначає множину тих векторів $s \in \Theta_n$, для яких в $\rho(s)$ містяться "номери" гармонік не більше ніж $\frac{1}{2}|\rho(s)|$ функцій $v_j(x)$, $j \in \{1, \ldots, M\}$. В такому випадку, згідно вимог, які пред'явлені до функції $v_j(x)$ і умови $|Q'_n| \ge 4M$, матимемо $|\mu_n| \ge \frac{1}{2}|\Theta_n|$.

Розглянемо кожну з множин $\rho(s), s \in \mu_n$. Позначимо ті функції $v_j(x)$, гармоніки яких попадають в $\rho(s)$, через $u_j(x)$, $j \in \{1, \ldots, L\}$, і відмітимо, що оскільки $s \in \mu_n$, то $L \le \frac{1}{2}|\rho(s)|$.

Нехай $K_1 = |\rho(s)|$ і $\{u_j(x)\}_{j=1}^{K_1}$ — система функцій, які не зменшуючи загальності, можна вважати ортонормованими. Тут функції $u_j(x)$, $j \in \{L+1, ..., K_1\}$, доповнюють систему $\{u_j(x)\}_{j=1}^{L}$ до базису в $\mathcal{L}(\{e^{i(k,x)}\}_{k \in \rho(s)})$. Тоді $e_k(x) = e^{i(k,x)} = \sum_{j=1}^{K_1} a^k_j u_j(x)$, $k \in \rho(s)$, $\sum_{j=1}^{K_1} |a^k_j|^2 = \sum_{k \in \rho(s)} |a^k_j|^2 = 1$. Тому $\widetilde{R}^2_k = \left\| e_k(\cdot) - \sum_{j=1}^{L} a^k_j u_j(\cdot) \right\|_2^2 = \sum_{j=L+1}^{K_1} |a^k_j|^2$ і, отже, $\sum_{k \in \rho(s)} \widetilde{R}^2_k = K_1 - L \ge \frac{1}{2} K_1$.

Розглянемо функцію $\varphi_s(x) = \omega(2^{-\|s\|_1}) \sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k,x)}$ і розглянемо відхилення функції $\varphi_s(x+y)$, $y \in \pi_d$, від її суми Фур'є $S_L(\varphi_s(x+y), U)$ порядку L за системою $U = \{u_j(x)\}_{j=1}^{K_1}$. Матимемо $R_L(x,y) = \varphi_s(x+y) - S_L(\varphi_s(x+y), U) = \omega(2^{-\|s\|_1}) \sum\limits_{k \in \rho(s)} e^{i(k,y)} \sum\limits_{j=L+1}^{K_1} a^k_j u_j(x)$. Тобто $\|R_L(\cdot, y)\|_2^2 = \sum_{j=L+1}^{K_1} \left| \omega(2^{-\|s\|_1}) \sum_{k \in \rho(s)} a^k_j e^{i(k,y)} \right|^2$ і тому

$$(2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} \|R_L(\cdot, y)\|_2^2 \, dy = \omega^2(2^{-\|s\|_1}) \sum_{j=L+1}^{K_1} \sum_{k \in \rho(s)} |a^k_j|^2 =$$

$$= \omega^2(2^{-\|s\|_1}) \sum_{k\in\rho(s)} \sum_{j=L+1}^{K_1} |a_j^k|^2 = \omega^2(2^{-\|s\|_1}) \sum_{k\in\rho(s)} \widetilde{R}_k^2 \geq \tfrac{1}{2}\omega^2(2^{-\|s\|_1})K_1.$$

Отже, існує вектор $y^* \in \pi_d$ такий, що $\|R_L(\cdot, y^*)\|_2^2 \geq \frac{1}{2}\omega^2(2^{-\|s\|_1})K_1$, і для функції $f_s(x) = \varphi_s(x + y^*)$ і довільних чисел $\beta_j,\ j \in \{1, \ldots, L\}$, можемо записати

$$\Big\|f_s(\cdot) - \sum_{j=1}^{L} \beta_j u_j(\cdot)\Big\|_2^2 \gg \omega^2(2^{-\|s\|_1})K_1 \asymp \omega^2(2^{-\|s\|_1})2^{\|s\|_1}. \tag{44}$$

Тепер розглянемо функції $g_4(x) = C_{15}n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum\limits_{s\in\mu_n} f_s(x),\ C_{15} > 0$, та $g_5(x) = C_{16} \sum\limits_{s\in\mu_n} f_s(x)$, $C_{16} > 0$, які належать відповідно до класів $B^{\Omega}_{1,\theta}$ при $q < \theta < \infty$ та $B^{\Omega}_{1,\infty}$, бо, як неважко переконатися, $\|g_4\|_{B^{\Omega}_{1,\theta}} \ll 1$ та $\|g_5\|_{B^{\Omega}_{1,\infty}} \ll 1$.

Справді,

$$\|g_4\|_{B^{\Omega}_{1,\theta}} \asymp \Big(\sum_{s\in\mu_n} \omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1})\|A_s(g_4,\cdot)\|_1^{\theta}\Big)^{\frac{1}{\theta}} \ll n^{-\frac{d-1}{\theta}}\Big(\sum_{s\in\mu_n} \omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1})\omega^{\theta}(2^{-\|s\|_1})\Big)^{\frac{1}{\theta}} \asymp 1,$$

$$\|g_5\|_{B^{\Omega}_{1,\infty}} \asymp \sup_{s\in\mu_n} \frac{\|A_s(g_5,\cdot)\|_1}{\omega(2^{-\|s\|_1})} \ll \sup_{s\in\mu_n} \frac{\omega(2^{-\|s\|_1})}{\omega(2^{-\|s\|_1})} = 1.$$

Отримаємо оцінку знизу для величини $\|g_4(\cdot) - \sum\limits_{j=1}^{M} b_j v_j(\cdot)\|_q$, користуючись встановленою вище оцінкою (44). Для цього нам знадобиться допоміжне твердження.

Лема 2.3 [10, розділ 1, §3]. *Нехай $1 < q < p \leq \infty$ і $f \in L_q^0(\pi_d)$. Тоді*

$$\|f\|_q^q \gg \sum_s \|\delta_s(f,\cdot)\|_p^q 2^{\|s\|_1(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})q}.$$

Скориставшись спочатку оцінкою з леми 2.3, а потім (44), отримаємо

$$\Big\|g_4(\cdot) - \sum_{j=1}^{M} b_j v_j(\cdot)\Big\|_q \gg \Big(\sum_{s\in\mu_n} \Big\|f_s(\cdot) - \sum_{j=1}^{L_s} b_j^s u_j^s(\cdot)\Big\|_2^q 2^{\|s\|_1(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})q}\Big)^{\frac{1}{q}} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \gg$$

$$\gg \Big(\sum_{s\in\mu_n} \omega^q(2^{-\|s\|_1})2^{\frac{\|s\|_1}{2}q}2^{\|s\|_1(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})q}\Big)^{\frac{1}{q}} n^{-\frac{d-1}{\theta}} = \Big(\sum_{s\in\mu_n} \omega^q(2^{-\|s\|_1})2^{\|s\|_1(1-\frac{1}{q})q}\Big)^{\frac{1}{q}} n^{-\frac{d-1}{\theta}} =$$

$$= \omega(2^{-n})2^{n(1-\frac{1}{q})}|\mu_n|^{\frac{1}{q}} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \asymp \omega(2^{-n})2^{n(1-\frac{1}{q})}n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})}. \tag{45}$$

Аналогічно для $\theta = \infty$, матимемо $\Big\|g_5(\cdot) - \sum\limits_{j=1}^{M} b_j v_j(\cdot)\Big\|_q \gg \omega(2^{-n})2^{n(1-\frac{1}{q})}n^{\frac{d-1}{q}}$. Враховуючи останнє співвідношення та (45), приходимо до шуканої оцінки знизу у випадку $q < \theta \leq +\infty$. Теорему доведено. □

Зауваження 2.3. *Покладаючи в теоремі 2.2 параметр $\theta = \infty$, отримаємо наступну оцінку $d_M^T(H_1^{\Omega}, L_q) \asymp \omega(2^{-n})2^{n(1-\frac{1}{q})}n^{\frac{d-1}{q}}$.*

Зауваження 2.4. *При $\omega(\tau) = \tau^{r_1}$ і певних обмеженнях на параметр r_1 з теорем 2.1 та 2.2 можна отримати відповідні результати для класів $B^r_{1,\theta}$, які встановлені в [16].*

ЛІТЕРАТУРА

1. Sun Youngsheng, Wang Heping. *Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness* // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. – 1997. – Т.219. – С. 356 – 377.
2. Бари Н.К., Стечкин С.Б. *Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций* // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1956. – Т.5. – С. 483 – 522.
3. Пустовойтов Н.Н. *Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности* // Anal. Math. – 1994. – Т.20. – P. 35–48.
4. Лизоркин П.И., Никольский С.М. *Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения* // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – Т.187. – С. 143–161.
5. Стасюк С.А., Федуник О.В. *Апроксимативні характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних* // Укр. мат. журн. – 2006. – Т.58, №5. – С. 692 – 704.
6. Никольский С.М. *Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных* // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР.– 1951. – Т.38. – С. 244–278.
7. Jakson D. *Certain problem of closest approximation* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1933. – V.39. – P. 889–906.
8. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.– М.: Наука, 1969.– 480 с.
9. Temlyakov V.N. Approximation of Periodic Functions. – New York: Nova Science Publichers. Inc., 1993. – 419 p.
10. Темляков В.Н. *Приближение функций с ограниченной смешанной производной* // Тр. Мат. ин-та АН СССР.– 1986.– Т.178.– С. 1–112.
11. Kolmogoroff A. *Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionen klasse* // Ann. Math. – 1936. – V.37. – P. 107–111.
12. Федуник О.В. *Оцінки апроксимативних характеристик класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних в просторі L_q* // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Збірник праць Ін–ту математики НАН України.– 2005. – Т.2, №2. – С. 268 – 294.
13. Никольская Н.С. *Приближение дифференцируемых функций многих переменных суммами Фурье в метрике L_p* // Докл. АН СССР.– 1973. – Т. 208, №5. – С. 1283–1285.
14. Schmidt E. *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I* // Math. Ann. – 1907. – V.63. – С. 433–476.
15. Конограй А.Ф. *Колмогоровські поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ в просторі L_∞* // Комплексний аналіз і течії з вільними границями: Зб. праць Ін–ту мат. НАН України. – 2006. – Т.3, №4. – С.181–197.
16. Романюк А.С. *Колмогоровские и тригонометрические поперечники классов Бесова $B^{r}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных* // Мат. сб. – 2006. – Т.197, №1. – С. 71 – 96.
17. Исмагилов Р.С. *Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими полиномами* // УМН. – 1974. – Т.29, №3. – С. 161–178.
18. Белинский Э.С., Галеев Э.М. *О наименьшей величине норм смешанных производных тригонометрических полиномов с заданным числом гармоник* // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. – 1991. – №2. – С. 3 – 7.
19. Харди Г., Литтлвуд Д., Полиа Г. Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.

01601, м. Київ, вул. Терещенківська, 3,
Інститут математики НАН України,
a_konograi@mail.ru

Надійшло 31.08.07
Після переробки 25.03.08