УДК 517.927.8

П. Ф. Самусенко

ПРО ПОБУДОВУ РОЗВ'ЯЗКУ ОСНОВНОЇ ПОЧАТКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ АРГУМЕНТУ І ВИРОДЖЕННЯМ

P. F. Samusenko. *On construction of a solution of the initial-value problem for the singularly perturbed system of delay differential equations with degeneration*, Matematychni Studii, **29** (2008) 175–180.

The solution of the initial-value problem for the sigularly perturbed system of delay differential equations with degeneration is constructed in work.

П. Ф. Самусенко. *Нечеткие дифференциальные уравнения с импульсами в фиксированные моменты времени* // Математичні Студії. – 2008. – Т.29, №2. – С.175–180.

В работе построено решение основной начальной задачи для сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием и вырождением.

Вступ. Різноманітні аспекти теорії систем диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t,\varepsilon), x(t-\varepsilon,\varepsilon), t, \varepsilon),\ t \in [\varepsilon; T], \tag{1}$$

де $x(t,\varepsilon)$ — шуканий n-вимірний вектор, $f(x(t,\varepsilon), x(t-\varepsilon,\varepsilon), t,\varepsilon)$ — вектор-функція розмірності n, з малим запізненням ($0 < \varepsilon \le \varepsilon_0 \ll 1$) розглядались в роботах А. Д. Мишкіса, А. Халаная, Ю. О. Митропольського, В. І. Фодчука, В. П. Рубаника, Д. Хейла тощо. Зокрема, А. Халанаєм ([1]), Ю. О. Митропольським ([2, с. 279]) та В. І. Фодчуком ([3]) узагальнено класичні теореми М. М. Боголюбова на випадок систем (1). Поведінку розв'язків системи (1) коли $t \to \infty$ досліджував К. Кук ([4]). А. М. Родіонов побудував асимптотичне розвинення розв'язку початкової задачі лінійної системи з малим запізненням за степенями малого параметру ([5]). При цьому з'ясувалось, що такі системи за асимптотичними властивостями близькі до систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь.

Побудова формального розв'язку основної початкової задачі. Розглянемо основну початкову задачу для сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь

$$\varepsilon B(t)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + \varepsilon f(x(t,\varepsilon), x(t-\varepsilon,\varepsilon), t, \varepsilon),\ t \in [\varepsilon; T], \tag{2}$$

$$x_{|_{0\le t\le\varepsilon}} = \varphi(t), \tag{3}$$

де $A(t,\varepsilon) = A_0(t) + \varepsilon A_1(t)$, $x(t,\varepsilon)$ та $f(x(t,\varepsilon), x(t-\varepsilon,\varepsilon), t, \varepsilon)$ такі ж, як і в системі (1), $A(t,\varepsilon)$, $B(t)$ — квадратні матриці n-го порядку, $\varphi(t)$ — вектор-функція розмірності n, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0 \ll 1$, $det\, B(t) \equiv 0$, $t \in [0; T]$.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 34E15.

Надалі вважатимемо, що:
1) $A_0(t)$, $A_1(t)$, $B(t) \in C^{\infty}_{[0;T]}$;
2) функція $f(x,[x],t,\varepsilon)$ ($[x(t)] = x(t-\varepsilon)$) має нескінченну кількість неперервних частинних похідних за всіма аргументами на множині $||x|| \le a$, $||[x]|| \le a$, $0 \le t \le T$, $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$, де $||\varphi(t)|| < a$, $t \in [0;\varepsilon]$;
3) $\varphi(t) \in C^{\infty}_{[0;\varepsilon]}$;
4) в'язка матриць $A_0(t) - \lambda B(t)$ на відрізку $[0;T]$ регулярна, має один "скінченний" елементарний дільник кратності p і один "нескінченний" — кратності $n-p$;
5) Re $\lambda_0(t) < 0$, $t \in [0;T]$, де $\lambda_0(t)$ — власне значення матриці $A_0(t)$ відносно $B(t)$.

Тоді існуватимуть неособливі матриці $P(t)$ та $Q(t)$ такі, що

$$P(t)A(t)Q(t) = \Omega(t), \quad P(t)B(t)Q(t) = H, \quad \Omega(t) = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & W(t) \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix},$$

де $W(t) = \lambda_0(t)E_2 + J_2$, E_1, E_2 — одиничні матриці $(n-p)$-го та p-го порядку відповідно, $J_1 = ||\gamma_{ij}||_1^{n-p}$, $J_2 = ||\gamma_{ij}||_1^{p}$, $\gamma_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i+1, \\ 0, & j \ne i+1, \end{cases}$

Зробимо в системі (2) заміну $x = Q(t)y$ і домножимо її обидві частини зліва на $P(t)$. Отримаємо

$$\varepsilon H \frac{dy}{dt} = C(t,\varepsilon)y + \varepsilon g(y(t,\varepsilon), y(t-\varepsilon,\varepsilon), t, \varepsilon), \tag{4}$$

де $C(t,\varepsilon) = \Omega(t) - \varepsilon(HQ^{-1}(t)Q'(t) + P(t)A_1(t)Q(t)) \equiv C_0(t) + \varepsilon C_1(t)$,

$$g(y(t,\varepsilon), y(t-\varepsilon,\varepsilon), t, \varepsilon) = P(t)f(Q(t)y(t,\varepsilon), Q(t-\varepsilon)y(t-\varepsilon,\varepsilon), t, \varepsilon).$$

Умова (3) при цьому набуває вигляду

$$y_{|0\le t\le\varepsilon} = Q^{-1}_{|0\le t\le\varepsilon}\varphi(t) \equiv \omega(t). \tag{5}$$

Надалі розглядатимемо задачу (4), (5). Розв'язок задачі (4), (5) шукаємо у вигляді

$$y(t,\varepsilon) = \overline{y}(t,\varepsilon) + \Pi y(\tau,\varepsilon), \tag{6}$$

де $\overline{y}(t,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \overline{y}_s(t)$ — регулярний ряд, а $\Pi y(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \Pi_s y(\tau,\varepsilon)$ — примежевий ряд, в якому $\tau = t/\varepsilon$ ([6, с. 248]).

Для оператора запізнення, як і раніше, символ [ ] розумітимемо так:

$$[v(t)] = v(t-\varepsilon), \ [w(\tau)] = w(\tau - 1),$$

де $v(t)$ та $w(\tau)$ — довільні функції аргумента t і τ відповідно.

Нехай $\overline{g}(t) = g(\overline{y}(t,\varepsilon), [\overline{y}(t,\varepsilon)], t, \varepsilon)$,

$$\Pi g(\tau) = g(\overline{y}(\varepsilon\tau,\varepsilon) + \Pi y(\tau,\varepsilon), [\overline{y}(\varepsilon\tau,\varepsilon) + \Pi y(\tau,\varepsilon)], \varepsilon\tau, \varepsilon) - g(\overline{y}(\varepsilon\tau,\varepsilon), [\overline{y}(\varepsilon\tau,\varepsilon)], \varepsilon\tau, \varepsilon).$$

Розкладемо вектор-функції $\overline{g}$ та Πg у формальні ряди за степенями ε

$$\overline{g}(t) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \overline{g}_s(t), \ \Pi g(\tau) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \Pi_s g(\tau).$$

У такому ж вигляді запишемо матрицю $C(t,\varepsilon)$

$$C(\varepsilon\tau,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{k}\varepsilon^k\frac{1}{s!}\frac{d^sC_{k-s}(0)}{dt^s}\tau^s.$$

Підставимо ряд (6) до системи (4) і розглянемо окремо вирази, що залежать від t і τ:

$$\varepsilon H\frac{d\overline{y}}{dt}=C(t,\varepsilon)\overline{y}+\varepsilon\overline{g}(t),\quad H\frac{d\Pi y}{d\tau}=C(\varepsilon\tau,\varepsilon)\Pi y+\varepsilon\Pi g(\tau).$$

В останніх тотожностях зрівняємо коефіцієнти біля однакових степенів ε. Зокрема, біля ε^0 матимемо

$$C_0(t)\overline{y}_0(t)=0,\quad H\frac{d\Pi_0 y}{d\tau}=C_0(0)\Pi_0 y,\ \tau\geq 1.$$

Звідси, $\overline{y}_0(t)\equiv 0$, $t\in[\varepsilon;T]$ і $\Pi_{01}y(\tau,\varepsilon)\equiv 0$, $\frac{d\Pi_{02}y}{d\tau}=W(0)\Pi_{02}y$, $\tau\geq 1$, де $\Pi_{01}y$ — вектор, що містить $n-p$ перших компонент вектора $\Pi_0 y$, $\Pi_{02}y$ — вектор, складений з решти компонент $\Pi_0 y$. Отже, $\Pi_{02}y(\tau,\varepsilon)=\exp{(W(0)\tau)}c_0(\varepsilon)$, $c_0(\varepsilon)$ — p-вимірний вектор довільних сталих. У відповідності з (5) запишемо початкову умову для $\Pi_0 y(\tau,\varepsilon)$

$$\Pi_0 y(1,\varepsilon)=\omega(\varepsilon).\tag{7^0}$$

Нехай $\omega_1(\varepsilon)$ — вектор, що містить $n-p$ перших компонент вектора $\omega(\varepsilon)$, а $\omega_2(\varepsilon)$ — вектор, складений з решти компонент $\omega(\varepsilon)$. Тоді з (7^0) отримаємо $c_0(\varepsilon)=\exp{(-W(0))}\omega_2(\varepsilon)$.
Біля ε^1 матимемо

$$C_0(t)\overline{y}_1(t)+\overline{g}_0(t)=0,\ H\frac{d\Pi_1 y}{d\tau}=C_0(0)\Pi_1 y+h_1(\tau,\varepsilon),$$

де $h_1(\tau,\varepsilon)=\tau C_0'(0)\Pi_0 y+C_1(0)\Pi_0 y+\Pi_0 g(\tau)$. Звідси

$$\overline{y}_1(t)=-C_0^{-1}(t)\overline{g}_0(t),\ t\in[\varepsilon;T],\ \Pi_{11}y(\tau,\varepsilon)=-\sum_{k=0}^{n-p-1}J_1^k\frac{d^k h_{11}(\tau,\varepsilon)}{d\tau^k},$$

$$\Pi_{12}y(\tau,\varepsilon)=\exp{(W(0)\tau)}c_1(\varepsilon)+\int_1^{\tau}\exp{(W(0)(\tau-s))}h_{12}(s,\varepsilon)ds,\ \tau\geq 1,$$

де $\Pi_{11}y(\tau,\varepsilon)$, $h_{11}(\tau,\varepsilon)$ та $\Pi_{12}y(\tau,\varepsilon)$, $h_{12}(\tau,\varepsilon)$ мають структуру подібну до структури $\Pi_{01}y(\tau,\varepsilon)$ та $\Pi_{02}y(\tau,\varepsilon)$ відповідно; запишемо початкову умову для $\Pi_1 y(1,\varepsilon)$

$$\Pi_1 y(1,\varepsilon)=-\overline{y}_1(\varepsilon).\tag{7^1}$$

При цьому вектор $c_1(\varepsilon)$ визначається з p останніх рівнянь системи (7^1).
Умову, подібну до умов (7^0), (7^1) на k-му кроці позначимо через (7^k).

Зазначимо, що за побудовою $\Pi_s y(\tau,\varepsilon)\to 0$, $\tau\to\infty$, $s\geq 0$.

Асимптотичний характер формального розв'язку. Покажемо, що побудований формальний розв'язок є рівномірним асимптотичним розвиненням точного розв'язку задачі (4), (5) на відрізку $[0;t_0]$, $t_0\leq T$. Для цього в системі (4) зробимо заміну

$$y(t,\varepsilon)=y_m(t,\varepsilon)+z(t,\varepsilon)$$

де $y_m(t,\varepsilon)=\sum\limits_{s=0}^{m}\varepsilon^s(\overline{y}_s(t)+\Pi_s y(\tau,\varepsilon))$, а $z(t,\varepsilon)$ — нова невідома вектор-функція.
Отримаємо

$$\varepsilon H\frac{dz}{dt}=C(t,\varepsilon)z+v(z(t,\varepsilon),[z(t,\varepsilon)],t,\varepsilon),\tag{8}$$

де $v(z(t,\varepsilon),[z(t,\varepsilon)],t,\varepsilon)=C(t,\varepsilon)y_m-\varepsilon Hy_m'+\varepsilon g(y_m(t,\varepsilon)+z(t,\varepsilon),[y_m(t,\varepsilon)+z(t,\varepsilon)],t,\varepsilon)$.
За побудовою $||v(0,0,t,\varepsilon)||=O(\varepsilon^{m+1})$ і ([6, с.260])

$$z(\varepsilon,\varepsilon)=0.\tag{9}$$

Вважатимемо, що $z(0,\varepsilon)=0$.

Доведемо, що задача (8), (9) для досить малих ε $(0<\varepsilon\le\varepsilon_1,\ \varepsilon_1\le\varepsilon_0)$ на відрізку $[\varepsilon;t_0]$ має єдиний розв'язок такий, що

$$||z(t,\varepsilon)||=O(\varepsilon^{m-\frac{n-p}{n-p-1}}).$$

За умовою матриця $C_0(t)$ має H-жорданів ланцюжок векторів довжини p, що складається з власного вектора φ, який відповідає власному значенню $\lambda_0(t)$ та $p-1$ $H-$ приєднаних векторів $\varphi_1,...,\varphi_{p-1}$.

У свою чергу, матриця H має C_0-жорданів ланцюжок векторів довжини $n-p$, що складається з власного вектора $\widetilde{\varphi}$, який відповідає нульовому власному значенню та $n-p-1$ C_0-приєднаних векторів $\widetilde{\varphi}_1,...,\widetilde{\varphi}_{n-p-1}$.

Позначимо через ψ елемент нуль-простору матриці $(C_0(t)-\lambda_0(t)H)^*$, а через $\widetilde{\psi}$ — елемент нуль-простору матриці H^*. При цьому вектори ψ та $\widetilde{\psi}$ можна визначити так, щоб виконувалися рівності

$$(H(G(t)H)^{i-1}\varphi,\psi)=\delta_{pi},\ i\in\{1,\dots,p\},$$
$$(C_0(t)(H^-C_0(t))^{i-1}\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}\,)=\delta_{n-p,i},\ i=\in\{1,\dots,n-p\},$$

де $G(t)$ та H^- — напівобернені матриці до матриць $C_0(t)-\lambda_0(t)H$ та H відповідно, δ_{ij} — символ Кронекера [7, с. 32].

Нехай:

6) Re $\sqrt[p]{(C_1(t)\varphi,\psi)}\ne 0,\ t\in[0;T]$;

7) Re $\sqrt[n-p-1]{(C_1(t)\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})}\ne 0,\ t\in[0;T]$.

Відомо ([8]), що система $\varepsilon B(t)\dfrac{dy}{dt}=A(t,\varepsilon)y$ має p формальних лінійно незалежних розв'язків вигляду

$$y_i(t,\varepsilon)=u_i(t,\varepsilon)\exp\Big(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_i(t,\varepsilon)dt\Big),\ i\in\{1,\dots,p\},$$

де $u_i(t,\varepsilon)$ — n-вимірні вектори, а $\lambda_i(t,\varepsilon)$ — скалярні функції, причому

$$u_i(t,\varepsilon)=\varphi+\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k u_k^{(i)}(t),\ \lambda_i(t,\varepsilon)=\lambda_0(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k\lambda_k^{(i)}(t),\ i\in\{1,\dots,p\},\tag{10}$$

та $n-p-1$ формальних лінійно незалежних розв'язків

$$\widetilde{y}_j(t,\varepsilon)=\widetilde{u}_j(t,\varepsilon)\exp\Big(\nu^{-n+p}\int_0^t\frac{dt}{\xi_j(t,\varepsilon)}\Big),\ j\in\{1,\dots,n-p-1\},$$

$$\widetilde{u}_j(t,\varepsilon)=\widetilde{\varphi}+\sum_{k=1}^{\infty}\nu^k\widetilde{u}_k^{(j)}(t),\ \xi_j(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\nu^k\xi_k^{(j)}(t),\ j\in\{1,\dots,n-p-1\}\tag{11}$$

де $\mu=\sqrt[p]{\varepsilon}$, $\nu=\sqrt[n-p-1]{\varepsilon}$.

Спряжена система $\varepsilon\dfrac{dB^*(t)y}{dt}=-A^*(t,\varepsilon)y$ також має p формальних лінійно незалежних розв'язків вигляду

$$y_i(t,\varepsilon)=v_i(t,\varepsilon)\exp\big(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\eta_i(t,\varepsilon)dt\big),\quad ij\in\{1,\dots,p\},$$

та $n-p-1$ формальних лінійно незалежних розв'язків

$$\widetilde{z}_j(t,\varepsilon)=\widetilde{v}_j(t,\varepsilon)\exp\big(\nu^{-n+p}\int_0^t\frac{dt}{\kappa_j(t,\varepsilon)}\big),\ j\in\{1,\dots,n-p-1\},$$

де

$$v_i(t,\varepsilon)=\psi+\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k v_k^{(i)}(t),\ \eta_i(t,\varepsilon)=-\overline{\lambda}_0(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k\eta_k^{(i)}(t),\ i\in\{1,\ldots,p\}, \tag{12}$$

$$\widetilde{v}_j(t,\varepsilon)=\widetilde{\psi}+\sum_{k=1}^{\infty}\nu^k\widetilde{v}_k^{(j)}(t),\ \kappa_j(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\nu^k\kappa_k^{(j)}(t),\ j\in\{1,\ldots,n-p-1\}. \tag{13}$$

Зауважимо, що вектори φ, $\varphi_1,\ldots,\varphi_{p-1}$, $\widetilde{\varphi}$, $\widetilde{\varphi}_1$, $\ldots$, $\widetilde{\varphi}_{n-p-1}$ лінійно незалежні на відрізку $[0;T]$.

Складемо квадратні матриці n-го порядку $Q_1(t,\varepsilon)=[U_m(t,\varepsilon),\widetilde{\varphi}]$, $P_1(t,\varepsilon)=[V_m(t,\varepsilon),\widetilde{\psi}]^*$, де $U_m(t,\varepsilon)$, $V_m(t,\varepsilon)$ — прямокутні $n\times(n-1)$-матриці, складені з виразів (10)–(13) шляхом їх обривання на $(m+1)$-му члені:

$$U_m(t,\varepsilon)=[u_1^{(m)}(t,\varepsilon),...,u_p^{(m)}(t,\varepsilon),\widetilde{u}_1^{(m)}(t,\varepsilon),...,\widetilde{u}_{n-p-1}^{(m)}(t,\varepsilon)],$$
$$V_m(t,\varepsilon)=[v_1^{(m)}(t,\varepsilon),...,v_p^{(m)}(t,\varepsilon),\widetilde{v}_1^{(m)}(t,\varepsilon),...,\widetilde{v}_{n-p-1}^{(m)}(t,\varepsilon)].$$

Виконавши в системі (8) заміну $z(t,\varepsilon)=Q_1(t,\varepsilon)u(t,\varepsilon)$ і домноживши обидві її частини зліва на $P_1(t,\varepsilon)$, отримаємо

$$\varepsilon P_1HQ_1\frac{du}{dt}=P_1LQ_1u+P_1v(Q_1u,[Q_1u],t,\varepsilon),\ L(t,\varepsilon)=C(t,\varepsilon)-\varepsilon H\frac{d}{dt},$$

або

$$\varepsilon\frac{d\widehat{u}_1}{dt}=(V_m^*HU_m)^{-1}V_m^*LU_m\widehat{u}_1+(V_m^*HU_m)^{-1}V_m^*L\widetilde{\varphi}\widehat{u}_2+(V_m^*HU_m)^{-1}\widehat{q}_1(u,[u],t,\varepsilon), \tag{14}$$

$$(L\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})^{-1}\widetilde{\psi}^*LU_m\widehat{u}_1+\widehat{u}_2+(L\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})^{-1}\widehat{q}_2(u,[u],t,\varepsilon)=0, \tag{15}$$

де $\widehat{u}_1$, $\widehat{q}_1(u,[u],t,\varepsilon)$ — вектори, що містять $n-1$ перших компонент векторів u, $q(u,[u],t,\varepsilon)$; $\widehat{u}_2$, $\widehat{q}_2(u,[u],t,\varepsilon)$ — n-ті компоненти векторів u, $q(u,[u],t,\varepsilon)$ відповідно; $q(u,[u],t,\varepsilon)=P_1v(Q_1u,[Q_1u],t,\varepsilon)$.

Оскільки, за побудовою

$$||(V_m^*(t,\varepsilon)HU_m(t,\varepsilon))^{-1}||=O(\varepsilon^{-\frac{n-p}{n-p-1}}),\ (L(t,\varepsilon)\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})^{-1}=O(\varepsilon^{-1}),\ t\in[0;T],$$
$$L(t,\varepsilon)U_m(t,\varepsilon)=HU_m(t,\varepsilon)S_m(t,\varepsilon)+\varepsilon^{\frac{m+1}{\gamma}}C_1(t,\varepsilon),\ \gamma=\max\{p,n-p-1\},$$

де $S_m(t,\varepsilon)=\mathrm{diag}\{\Lambda_m(t,\varepsilon),\Psi_m(t,\varepsilon)\}\equiv\mathrm{diag}\{s_{m1}(t,\varepsilon),...,s_{m,n-1}(t,\varepsilon)\}$,

$\Lambda_m(t,\varepsilon)=\mathrm{diag}\{\lambda_1^{(m)}(t,\varepsilon),...,\lambda_p^{(m)}(t,\varepsilon)\}$, $\Psi_m(t,\varepsilon)=\mathrm{diag}\{(\nu\xi_1^{(m)}(t,\varepsilon))^{-1},...,(\nu\xi_{n-p-1}^{(m)}(t,\varepsilon))^{-1}\}$,

а $C_1(t,\varepsilon)$ — $n\times(n-1)$-вимірна матриця, рівномірно обмежена на $[0;T]$ ([8]), то

$$(V_m^*(t,\varepsilon)HU_m(t,\varepsilon))^{-1}V_m(t,\varepsilon)L(t,\varepsilon)U_m(t,\varepsilon)=S_m(t,\varepsilon)+\varepsilon^{\frac{m+1}{\gamma}-\frac{n-p}{n-p-1}}C_2(t,\varepsilon),$$
$$(L(t,\varepsilon)\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})^{-1}\widetilde{\psi}^*LU_m=-\varepsilon^{\frac{m+1}{\gamma}-1}c(t,\varepsilon).$$

Тут $C_2(t,\varepsilon)$ — квадратна матриця $(n-1)$-го порядку, а $c(t,\varepsilon)$ — $(n-1)$-вимірний вектор-рядок. Отже, система (14), (15) набуває вигляду

$$\varepsilon\frac{d\widehat{u}_1}{dt}=(S_m+\varepsilon^{\frac{m+1}{\gamma}-\frac{n-p}{n-p-1}}C_2)\widehat{u}_1+(V_m^*HU_m)^{-1}V_m^*L\widetilde{\varphi}\widehat{u}_2+(V_m^*HU_m)^{-1}\widehat{q}_1(u,[u],t,\varepsilon), \tag{16}$$

$$\widehat{u}_2=\varepsilon^{\frac{m+1}{\gamma}-1}c(t,\varepsilon)\widehat{u}_1-(L\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})^{-1}\widehat{q}_2(u,[u],t,\varepsilon). \tag{17}$$

Припустимо, що виконуються умови:

8) існує неперервна функція $\eta(\varepsilon,\rho)$, $0\le\varepsilon\le\varepsilon_0$, $0\le\rho\le a$, така, що

$$||f(u,[u],t,\varepsilon)-f(v,[v],t,\varepsilon)||\le\eta(\varepsilon,\rho)\,(||u-v||+||[u]-[v]||)$$

для всіх $||u||\le\rho$, $||[u]||\le\rho$, $||v||\le\rho$, $||[v]||\le\rho$, $t\in[\varepsilon;T]$, причому $\eta(\varepsilon,\rho)\varepsilon^{-\frac{n-p}{n-p-1}}=O(1)$;

9) $\mathrm{Re}\,s_{mi}(t,\varepsilon)\le 0$, $i\in\{1,\ldots,n-1\}$;

10) $\widetilde{\psi}^*(C_1(\varepsilon)\omega(\varepsilon)+g(\omega(\varepsilon),\omega(0),\varepsilon,\varepsilon)=0$.

Зазначимо, що умова, аналогічна до 8), виконуватиметься і для функції $q(u,[u],t,\varepsilon)$. Тоді для достатньо малих ε_1 ($\varepsilon_1 \le \varepsilon_0$), t_0 ($t_0 \le T$) та достатньо великого m система інтегральних рівнянь, що рівносильна до (16), (17), для всіх $0 < \varepsilon \le \varepsilon_1$ на множині $S = \{u(t,\varepsilon) \in C_{[\varepsilon;t_0]} : ||u(t,\varepsilon)|| = O(\varepsilon^{m-\frac{n-p}{n-p-1}})\}$ має єдиний розв'язок $u(t,\varepsilon)$ такий, що ([9]) $u(\varepsilon,\varepsilon) = 0$.

Отже, ми довели таку теорему.

Теорема. *Нехай виконуються умови 1) – 10), (7^k), $k \in \{0,1,\ldots\}$. Тоді для всіх $0 < \varepsilon \le \varepsilon_1 \le \varepsilon_0$ і $(m+1)/\gamma - (n-p)/(n-p-1) > 0$ на відрізку $[0;t_0]$, $t_0 \le T$, існує єдиний розв'язок $x(t,\varepsilon)$ задачі (2), (3) такий, що*

$$||x(t,\varepsilon) - x_m(t,\varepsilon)|| = O(\varepsilon^{m-\frac{n-p}{n-p-1}}), \quad x_m(t,\varepsilon) = Q(t)y_m(t,\varepsilon). \tag{18}$$

Для виконання умов (7^k), $k \in \{0,1,\ldots\}$, достатньо, щоб: 11) $\omega_1(t) = 0$ та $g_1(0,0,t,0) = 0$, $t \in [0;t_0]$; 12) $g_1(y,[y],t,\varepsilon)$ не містила y_i, $i \in \{n-p+1,\ldots,n\}$; 13) частинні похідні до $(m-1)$-го порядку включно від функції $g_1(y,[y],t,\varepsilon)$ за змінною ε в точці $(0,0,t,0)$ дорівнювали нулю; 14) $C_{12}(t) \equiv 0$, $t \in [0;t_0]$, де $C_1(t) = \begin{pmatrix} C_{11}(t) & C_{12}(t) \\ C_{21}(t) & C_{22}(t) \end{pmatrix}$, $C_{12}(t)$ — матриця розміру $(n-p) \times p$.

Наслідок. *Нехай виконуються умови 1) – 14). Тоді для всіх $0 < \varepsilon \le \varepsilon_1 \le \varepsilon_0$ і $(m+1)/\gamma - (n-p)/(n-p-1) > 0$ на відрізку $[0;t_0]$, $t_0 \le T$, існує єдиний розв'язок $x(t,\varepsilon)$ задачі (2), (3) такий, що виконується (18).*

ЛІТЕРАТУРА

1. Халанай А. *Метод усреднения для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом*// Rev. math. pures et appl. Acad. RPR. – V.4, №3. – P.467 – 483.
2. Митропольский Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике. – К.: Наук. думка, 1971. – 440 с.
3. Фодчук В.И. *К вопросу обоснования принципа усреднения для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом*// III Konferenz uber nichtlineare schwingungen (Berlin vom 25 bis 30 May 1964). – Berlin: Akademie-Verlag, 1965. – T. 1. – P. 45.
4. Cooke K. *Functional differential equations with asymptotically vanishing lag*// Rend. circ. mat. Palermo, 1967. – V.16, №1. – P. 39 – 56.
5. Родионов А. М. *Применение метода возмущений к линейным уравнениям с распределенным запаздыванием*// ЖВММФ, 1964. – Т.4, №2. – С. 358 – 363.
6. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973. – 272 с.
7. Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – К.: Вища шк., 2000. – 294 с.
8. Яковець В.П., Акименко А.М. *Про існування і асимптотику періодичного розв'язку виродженої сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь у випадку кратних елементарних дільників*// Нелінійні коливання, 2002. – Т. 5, №1. – С. 123 – 141.
9. Iwano M. *Asymptotic solutions of a system of linear ordinary differential equations containing a small parametr. II* // Funkcialaj Ekvacioj, 1964. – V 6. – P. 89 – 141.

Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова
psamusenko@ukr.net

Надійшло 22.06.2006
Після переробки 5.12.2007