УДК 517.927

О. В. Махней, Р. М. Тацій

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ І ВЛАСНИХ ФУНКЦІЙ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО КВАЗІДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

O. V. Makhnei, R. M. Tatsii. *The asymptotic behaviour of eigenvalues and eigenfunctions of the boundary problem for a singular quasidifferential equation*, Matematychni Studii, **29** (2007) 165–174.

The asymptotic a large values of a parameter of a linearly independent system of solutions (and their quasiderivatives) of a singular quasidifferential equation on a finite interval is constructed. At first, under investigation the simpler problem without measures is reduced to the known one and then the obtained asymptotic behaviour is extended to a more general case. The obtained asymptotic behaviour allowed for finding asymptotical formulas for the great by modulus eigenvalues and eigenfunctions of the eigenvalue problem for the quasidifferential equation with generalized functions in coefficients and regular boundary conditions.

А. В. Махней, Р. М. Таций. *Асимптотическое поведение собственных значений и собственных функций краевой задачи для сингулярного квазидифференциального уравнения* // Математичні Студії. – 2007. – Т.29, №2. – С.165–174.

При больших значениях параметра построена асимптотика линейно независимой системы решений (и их квазипроизводных) сингулярного квазидифференциального уравнения на конечном промежутке. При исследовании сначала к известной сведено более простую задачу без мер, а потом полученное асимптотическое поведение распространено на более общий случай. Полученная асимптотика позволила найти асимптотические формулы для больших по модулю собственных значений и собственных функций задачи на собственные значення для квазидифференциального уравнения с обобщенными функциями в коэффициентах и регулярных краевых условий.

Вступ. Лінійні диференціальні оператори, породжені диференціальними виразами з гладкими коефіцієнтами (в тому числі асимптотику власних значень і власних функцій), вивчено доволі добре (див., наприклад, [1]). Останнім часом з'явилась значне число результатів, в яких у тій чи іншій мірі узагальнюються ці оператори. Зокрема, у статті [2] узагальнення здійснюється в напрямку розгляду нестандартних крайових умов. У статтях [3, 4] отримано результати для функціонально-диференціальних рівнянь вигляду $y^{(n)} + Fy + \rho^n y = 0$, де F – лінійний оператор, що діє з простору Гельдера $C^\gamma[0, 1]$ в простір $L_1[0, 1]$, причому $\gamma < n - 1$. Статті [5, 6, 7], як і ця стаття, спрямовані на послаблення вимог на коефіцієнти диференціальних виразів. Обширну бібліографію про диференціальні оператори з сингулярностями можна знайти в [8].

В задачах прикладного характеру часто зустрічаються диференціальні вирази, що містять доданки вигляду $\left(p(x)y^{(m)}\right)^{(n)}$. При недостатній гладкості коефіцієнта $p(x)$ такі

2000 *Mathematics Subject Classification:* 34B05.

вирази неможливо за допомогою операції n-кратного диференціювання звести до звичайних диференціальних виразів. Щоб підкреслити цю обставину, в літературі їх прийнято називати *квазідиференціальними*. Одним зі способів їх дослідження є метод введення квазіпохідних – компонент вектора, за допомогою якого здійснюється зведення квазідиференціального рівняння до системи диференціальних рівнянь першого порядку. Мабуть першим, хто ввів поняття квазіпохідних, яке дозволяє відмовитись від вимог гладкості коефіцієнтів в квазідиференціальних виразах, був Д. Шин ([9]). Однак, він і його послідовники вивчали переважно квазідиференціальні вирази з неперервними або, принаймні, сумовними за Лебегом коефіцієнтами.

Перша частина статті присвячена побудові асимптотики для великих значень параметра розв'язків (і їхніх квазіпохідних) квазідиференціального рівняння з розривними чи навіть узагальненими функціями $p(x)$, що узагальнює результати з ([1, 5]). В частковому випадку ця задача розглядалась в [10]. За допомогою одержаних розв'язків у пункті 7 досліджується асимптотична поведінка власних значень і власних функцій відповідної крайової задачі.

1. Постановка задачі. Розглянемо *квазідиференціальний* вираз

$$L_{mn}(y) \equiv \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \left(a_{ij} y^{(n-i)}\right)^{(m-j)},$$

де m, n – натуральні числа, $a_{00} \in W_1^1[a,b]$, дійснозначна, $a_{00}(x) \neq 0$, $a_{i0}, a_{0j} \in L_2[a,b]$, $a_{ij}(x) = b'_{ij}(x)$, $b_{ij}(x)$, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, $j \in \{1,2,\ldots,m\}$, – неперервні справа функції обмеженої на $[a,b]$ варіації, а штрих означає узагальнене диференціювання. Тому, a_{ij} – міри (див. [11]), тобто узагальнені функції нульового порядку. Крім того, $a_{ij}(x)$, $b_{ij}(x)$ вважатимемо комплекснозначними функціями дійсної змінної, визначеними на $[a,b]$.

Квазіпохідними функції $y(x)$, що відповідають квазідиференціальному виразу $L_{mn}(y)$, називатимемо функції $y^{[k]}(x)$, $k \in \{0,1,\ldots,n+m\}$, які визначаються формулами: $y^{[k]} = y^{(k)}$, $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$; $y^{[n]} = \sum\limits_{i=0}^{n} a_{i0} y^{(n-i)}$; $y^{[n+k]} = -\left(y^{[n+k-1]}\right)' + \sum\limits_{i=0}^{n} a_{ik} y^{(n-i)}$, $k \in \{1,2,\ldots,m\}$.

Сформулюємо тепер таку початкову задачу:

$$L_{mn}(y) = \lambda \sigma(x) y, \tag{1}$$

$$y^{[\nu-1]}(a) = \widetilde{c}_\nu,\ \nu \in \{1,\ldots,n+m\}, \tag{2}$$

де $\sigma \in W_1^1[a,b]$, дійснозначна, $\sigma(x) \neq 0$, λ – комплексний параметр. Нехай $r = n+m$ і

$$C'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{00}^{-1}a_{n0} & -a_{00}^{-1}a_{n-1,0} & \cdots & -a_{00}^{-1}a_{10} & a_{00}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{n1} & A_{n-1,1} & \cdots & A_{11} & a_{01}a_{00}^{-1} & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ A_{n,m-1} & A_{n-1,m-1} & \cdots & A_{1,m-1} & a_{0,m-1}a_{00}^{-1} & 0 & \cdots & -1 \\ A_{nm} - \lambda\sigma & A_{n-1,m} & \cdots & A_{1m} & a_{0m}a_{00}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

–матриця-міра, де $A_{ij} = a_{ij} - a_{0j}a_{00}^{-1}a_{i0}$ ($i \in \{1,\ldots,n\}$, $j \in \{1,\ldots,m\}$). За допомогою вектора $Y = \operatorname{colon}\left(y, y^{[1]}, \ldots, y^{[r-1]}\right)$ рівняння (1) зводиться до системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$Y' = C'(x) Y, \tag{3}$$

а система (2) набуває вигляду $Y(a) = \widetilde{C}$, де $\widetilde{C} = \operatorname{colon}(\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2, ..., \widetilde{c}_r)$. Очевидно, що стрибок матриці-функції $\Delta C(x) = C(x) - C(x-0)$ міститиме відмінні від нуля елементи (вигляду $\Delta b_{ij}(x)$) лише в лівому нижньому блоці розміру $n \times m$. Тоді, внаслідок рівності $[\Delta C(x)]^2 \equiv 0$, система (3) – коректна ([12]).

Під розв'язком рівняння (1) розумітимемо першу координату вектора Y системи (3), що задовольняє його в сенсі теорії узагальнених функцій $(L_{mn}(y), \varphi) = (\lambda\sigma y, \varphi)$, де $\varphi(x)$ – довільна неперервна фінітна функція на $[a, b]$.

Аналізуючи систему (3) можна довести ([13]), що розв'язок початкової задачі (1), (2) існує і єдиний в класі абсолютно неперервних на $[a, b]$ функцій, його квазіпохідні до $(n-1)$-го порядку теж є абсолютно неперервними на $[a, b]$ функціями, а решта квазіпохідних до порядку $r - 1$ включно мають обмежену на $[a, b]$ варіацію і неперервні там справа.

Для часткового випадку, коли $a_{00} \equiv \sigma \equiv 1$, $a_{01} \equiv a_{10} \equiv 0$, в [10] отримано асимптотику розв'язків рівняння (1) і з її допомогою встановлено асимптотичну поведінку великих за модулем власних значень і відповідних їм власних функцій крайової задачі для цього рівняння. Порядок точності цих асимптотик виявився таким самим, як і у випадку достатньо гладких коефіцієнтів a_{ij} рівняння (1) (див. [1]). Якщо вважати коефіцієнти a_{00}, σ, a_{10} і a_{01} неперервно диференційовними достатню кількість разів, то відомою заміною можна звести рівняння

$$(-1)^m \left[\left(a_{00} y^{(n)}\right)^{(m)} + \left(a_{10} y^{(n-1)}\right)^{(m)} - \left(a_{01} y^{(n)}\right)^{(m-1)} - \left(a_{01} a_{00}^{-1} a_{10} y^{(n-1)}\right)^{(m-1)} \right] = \lambda\sigma y \quad (4)$$

до вигляду $y^{(n+m)} + \widetilde{a}_2 y^{(n+m-2)} + \widetilde{a}_3 y^{(n+m-3)} + \cdots + \widetilde{a}_{n+m} y = \lambda y$. Для такого рівняння вже відомі асимптотичні формули з [1]. Однак, в загальному випадку цей метод породжує проблему множення узагальнених функцій. В цій статті використано результати В. С. Рихлова ([5]), які дозволяють послабити вимоги на коефіцієнти a_{00}, a_{10}, a_{01}, σ, але при цьому знижується порядок точності асимптотичних формул навіть для рівняння (4).

2. Асимтотика розв'язків рівняння без мір. Векторне рівняння (3) можна подати у вигляді $Y' = C_1' Y + C_2' Y$ так, щоб система $Y' = C_1' Y$ була еквівалентною до рівняння (4). Матриця C_1' міститиме ті ж елементи на головній діагоналі та над нею, що й матриця $C'(x)$, $-\lambda\sigma$ у лівому нижньому куті та нулі. Зі структури матриці $C_1'(x)$ і системи $Y' = C_1' Y$ можна безпосередньо визначити квазіпохідні в сенсі рівняння (4)

$$\begin{cases} y^{[k]} = y^{(k)}, \ \ k =\in \{0, \ldots, n-1\}; \ y^{[n]} = a_{00} y^{(n)} + a_{10} y^{(n-1)}; \\ y^{[n+1]} = -\left(y^{[n]}\right)' + a_{01} y^{(n)} + a_{01} a_{00}^{-1} a_{10} y^{(n-1)}; \ y^{[n+k]} = -\left(y^{[n+k-1]}\right)', \ k \in \{2, \ldots, m-1\}. \end{cases} \quad (5)$$

Введемо тепер квазіпохідні (позначатимемо їх кутовими дужками) так, як це робиться в [5, 9]. Тоді рівняння (4) запишеться у вигляді $y^{<r>} = \widetilde{\lambda} y$, де $\widetilde{\lambda} = i^r \lambda$, а квазіпохідні визначаються формулами

$$\begin{cases} y^{<0>} = y; \ \ y^{<k>} = i\left(y^{<k-1>}\right)', \ \ k \in \{1, \ldots, n-1\}; \\ y^{<n>} = i p_{nn} \left(y^{<n-1>}\right)' + p_{n,n-1} y^{<n-1>}; \ \ y^{<n+1>} = i\left(y^{<n>}\right)' + p_{n+1,n} y^{<n>}; \\ y^{<n+k>} = i\left(y^{<n+k-1>}\right)', \ \ k \in \{2, \ldots, m-1\}; \ \ y^{<r>} = i p_{rr} \left(y^{<r-1>}\right)', \end{cases} \quad (6)$$

де $p_{nn}(x) = a_{00}(x)$, $p_{n,n-1}(x) = i a_{10}(x)$, $p_{n+1,n} = -i a_{01}(x) a_{00}^{-1}(x)$, $p_{rr}(x) = (-1)^m \sigma^{-1}(x)$. Для того щоб переконатись в еквівалентності рівнянь (4) і $y^{<r>} = \widetilde{\lambda} y$, достатньо підставити квазіпохідні (6) в рівняння $y^{<r>} = \widetilde{\lambda} y$.

Введемо тепер для спрощення викладу заміну $\lambda = (-1)^{m+1}\operatorname{sign}(a_{00}\sigma)\rho^r$. Розіб'ємо комплексну ρ-площину на $2r$ секторів S_q, $q \in \{0,\ldots,2r-1\}$, де $S_q = \{\rho : q\pi/r \le \arg\rho \le \le (q+1)\pi/r\}$. Через T_q позначимо сектор (з вершиною в точці $\rho = -c$), що утворюється з S_q шляхом зсуву $\rho \to \rho + c$. У позначеннях областей S_q і T_q пропускатимемо нижній індекс, тобто писатимемо S і T.

Нехай $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ – всі різні корені r-го степеня з -1, занумеровані для $\rho \in T_q$ так (згідно з [1, с. 53–54] це можливо), що

$$\operatorname{Re}((\rho + c)\omega_1) \le \operatorname{Re}((\rho + c)\omega_2) \le \ldots \le \operatorname{Re}((\rho + c)\omega_r). \tag{7}$$

Оскільки $p_{nn}, p_{rr} \in W_1^1[a,b]$, $p_{n,n-1}, p_{n+1,n} \in L_2[a,b]$, $p_{nn}(x) \neq 0$, $p_{rr}(x) \neq 0$, $a \le x \le b$, то виконуються всі умови теореми 2 в [5] і в кожній області T_q комплексної ρ-площини рівняння $y^{<r>} = \widetilde{\lambda} y$ має r лінійно незалежних розв'язків y_1, y_2, $\ldots$, y_r, регулярних (тобто однозначних аналітичних) по $\rho \in T_q$ для достатньо великих $|\rho|$, які володіють для $k \in \{1,\ldots,r\}$, $\nu \in \{0,\ldots,r-1\}$, асимптотикою вигляду

$$y_k^{<\nu>}(x,\rho) = R_\nu(x)\,(i\rho\omega_k t'(x))^\nu\, \widehat{E}(x) e^{\rho\omega_k t(x)}(1 + o(1)), \tag{8}$$

де $R_\nu(x) = 1$ для $\nu \in \{0,\ldots,n-1\}$, $R_\nu(x) = a_{00}(x)$ для $\nu \in \{n,\ldots,r-1\}$,

$$t(x) = \int_a^x \sqrt[r]{\left|\frac{\sigma(\xi)}{a_{00}(\xi)}\right|}d\xi, \quad \widehat{E}(x) = \left|\frac{a_{00}(x)}{\sigma(x)}\right|^{\frac{r-1}{2r}} |a_{00}(x)|^{-\frac{m}{r}} \exp\{-\frac{1}{r}\int_a^x \frac{a_{10}(\zeta) - a_{01}(\zeta)}{a_{00}(\zeta)}d\zeta\}. \tag{9}$$

Тут під $o(1)$ розуміємо таку функцію $f(x,\rho)$, що для будь-якого довільно малого $\varepsilon > 0$ існує достатньо велике $N > 0$ таке, що для всіїх $|\rho| > N$ і $x \in [a,b]$, виконується нерівність $|f(x,\rho)| < \varepsilon$. В роботі [5] стверджується, що в залежності від властивостей функцій a_{00}, a_{10}, a_{01} і σ, прямування до нуля залишкового члена у формулі (8) може бути значно повільнішим за величину, підпорядковану $1/\rho$.

З формул (5) і (6) видно, що $y^{<k>} = i^k y^{[k]}$, $k \in \{0,\ldots,n\}$, $y^{<k>} = i^k(-1)^{k-n}y^{[k]}$, $k \in \{n+1,\ldots,r\}$. Отже, в кожній області T_q комплексної ρ-площини рівняння (4) має r лінійно незалежних розв'язків y_1, y_2, $\ldots$, y_r, регулярних по $\rho \in T_q$ для достатньо великих $|\rho|$, які володіють для $k \in \{1,\ldots,r\}$, $\nu \in \{0,\ldots,r-1\}$, асимптотикою вигляду

$$y_k^{[\nu]}(x,\rho) = \widehat{R}_\nu(x)\,(\rho\omega_k t'(x))^\nu\, \widehat{E}(x) e^{\rho\omega_k t(x)}(1 + o(1)), \tag{10}$$

де $t(x)$ і $\widehat{E}(x)$ визначаються так само, як і вище, а

$$\widehat{R}_\nu(x) = \begin{cases} 1, & \nu \in \{0,\ldots,n-1\}, \\ (-1)^{\nu-n}a_{00}(x), & \nu \in \{n,\ldots,r-1\}. \end{cases} \tag{11}$$

3. Оцінка квазіпохідних функції Коші. Нехай $K(x,z)$ – функція Коші рівняння (4), тобто вона за першою змінною задовольняє це рівняння, $K^{[i]}(z,z) = 0$ $(i \in \{0,\ldots,r-2\})$, $K^{[r-1]}(z,z) = 1$. Квадратні дужки тут позначають квазіпохідні в сенсі рівняння (4) за першою змінною. За допомогою фігурних дужок ми позначатимемо квазіпохідні в сенсі спряженого до (4) рівняння, їх можна відчитати з відповідної йому спряженої системи $Z' = -(C_1^*)'Z$, де $Z = \operatorname{colon}(z^{\{r-1\}}, z^{\{r-2\}}, \ldots, z)$. Зі структури матриці C_1' зрозуміло, що $z^{\{k\}} = z^{(k)}$, $k = \overline{0, m-1}$; $z^{\{m\}} = -a_{00}z^{(m)} - \overline{a}_{01}z^{(m-1)}$; $z^{\{m+1\}} = -(z^{\{m\}})' - \overline{a}_{10}z^{(m)} - -\overline{a}_{01}a_{00}^{-1}\overline{a}_{10}z^{(m-1)}$; $z^{\{m+k\}} = -(z^{\{m+k-1\}})'$, $k \in \{2,\ldots,n-1\}$. Від функції Коші квазіпохідні в сенсі спряженого рівняння братимуться за другою змінною.

Еволюцiйним оператором (фундаментальною матрицею) системи $Y' = C_1'Y$ називають матрицю-функцiю $B(x, \alpha)$, що за змiнною x задовольняє цю систему i початкову умову $B(\alpha, \alpha) = E$, $\alpha \in [a, b]$.

Функцiю Кошi рiвняння (4) i її квазiпохiднi можна подати у виглядi ([14])

$$K^{[i]\{j\}}(x,z) = \tfrac{D(x,z)}{W(z)}, \quad i,j \in \{0,\dots,r-1\}, \quad W(z) = \det\left(y_q^{[p-1]}(z)\right)_{p,q=1}^{r}, \tag{12}$$

де визначник $D(x,z)$ вiдрiзняється вiд $W(z)$ лише $(r-j)$-м рядком, який складається з елементiв $y_1^{[i]}(x)$, …, $y_r^{[i]}(x)$, а y_1, y_2, ..., y_r – фундаментальна система розв'язкiв рiвняння (4). Нехай в якостi лiнiйно незалежної системи розв'язкiв рiвняння (4) в (12) використовується та фундаментальна система розв'язкiв рiвняння (10), асимптотична поведiнка якої для великих значень параметра $|\rho|$ подається формулами (10). Пiдставивши (10) в (12) i скоротивши на $e^{\rho\omega_1 t(z)}$, $e^{\rho\omega_2 t(z)}$, ..., $e^{\rho\omega_r t(z)}$, $\widehat{R}_\nu(z)\,(\rho t'(z))^\nu\,\widehat{E}(z)$ ($\nu = \overline{0, r-1}$, $\nu \neq r-j-1$), отримаємо для великих значень параметра $|\rho|$

$$K^{[i]\{j\}}(x,z) = \rho^{i+j+1-r}\sum_{k=1}^{r} e^{\rho\omega_k(t(x)-t(z))}Q_{ij}(x,z)\tfrac{\gamma_{kj}}{\gamma}\omega_k^i\langle 1\rangle_z^k\langle 1\rangle_x^k,$$

$$Q_{ij}(x,z) = \widehat{R}_i(x)\widehat{R}_{r-j-1}^{-1}(z)(t'(x))^i(t'(z))^{1+j-r}\widehat{E}(x)\widehat{E}^{-1}(z), \quad \gamma = \det\left(\omega_q^{p-1}\right)_{p,q=1}^{r},$$

γ_{kj} – алгебраїчнi доповнення елемента ω_k^{r-j-1} у визначнику γ, а позначення $\langle\alpha\rangle = \alpha(1 + o(1))$, причому для кожного достатньо малого $\varepsilon > 0$ iснує $N > 0$ таке, що для числа α $\langle\alpha\rangle = \alpha(1 + f_1(\rho))$, $\langle\alpha\rangle_x = \alpha(1 + f_2(x,\rho))$, $\langle\alpha\rangle_z = \alpha(1 + f_3(z,\rho))$, $\langle\alpha\rangle_{x,z} = \alpha(1 + f_4(x,z,\rho))$, а $|f_1(\rho)| < \varepsilon$, $|f_2(x,\rho)| < \varepsilon$, $|f_3(z,\rho)| < \varepsilon$, $f_4(x,z,\rho)| < \varepsilon$ для $|\rho| > N$ i $x, z \in [a,b]$. Верхнiй iндекс k означає, що для кожного доданка суми вираз $\langle 1\rangle^k$ є, взагалi кажучи, рiзним.

Нехай $M_{kj} = \gamma_{kj}/\gamma_{k0}$, тобто $\gamma_{kj} = M_{kj}\gamma_{k0}$, $j = \overline{0, r-1}$. Врахувавши, що для функцiї Кошi $K^{[i]}(z,z) = 0$, $i = \overline{0, r-2}$, $K^{[r-1]}(z,z) = 1$, а $Q_{r-1,0}(z,z) = 1$, розглянемо систему

$$\sum_{k=1}^{r}\omega_k^i\tfrac{\gamma_{k0}}{\gamma} = \begin{cases} 0, \ i \in \{0,1,\dots,r-2\}, \\ 1, \ \ i = r-1. \end{cases} \tag{13}$$

Система (13) має єдиний розв'язок; з iншого боку, вона задовольняється для $\gamma_{k0}/\gamma = -\omega_k/r$, бо $\omega_k^r = -1$ i $\omega_1^{i+1} + \omega_2^{i+1} + \ldots + \omega_r^{i+1} = 0$. Отже, формула для $K^{[i]\{j\}}(x,z)$ набуває вигляду

$$K^{[i]\{j\}}(x,z) = -\frac{Q_{ij}(x,z)}{r\rho^{r-1-i-j}}\sum_{k=1}^{r}M_{kj}e^{\rho\omega_k(t(x)-t(z))}\omega_k^{i+1}\langle 1\rangle_x^k\langle 1\rangle_z^k, \quad i,j \in \{0,1,\dots,r-1\}. \tag{14}$$

4. Перехiд до рiвняння з мiрами. Якщо праву частину рiвностi $Y' - C_1'Y = C_2'Y$ розглядати як "неоднорiднiсть", то, на пiдставi формули для неоднорiдного рiвняння ([13]),

$$Y(x) = B(x,a)Y(a) + \int_a^x B(x,\xi)d\Psi(\xi)Y(\xi), \tag{15}$$

де $B(x,\xi)$ – фундаментальна матриця "однорiдної" системи $Y' = C_1'Y$. Згiдно [15] ця матриця має структуру $B(x,\xi) = (K^{[i-1]\{r-j\}}(x,\xi))_{i,j=1}^r$, тому, врахувавши (14) та замiнивши iндекс k на j, ми можемо розписати (15) покоординатно у виглядi

$$y^{[\nu]}(x) = -\sum_{s=1}^{r}\widetilde{c}_s\tfrac{Q_{\nu,r-s}(x,a)}{r\rho^{s-\nu-1}}\sum_{j=1}^{r}M_{j,r-s}e^{\rho\omega_j t(x)}\omega_j^{\nu+1}\langle 1\rangle_x^j + \Omega_\nu(x), \quad \nu \in \{0,\dots,r-1\},$$

$$\Omega_\nu(x)=\sum_{s=2}^{n}\int_a^x \tfrac{Q_{\nu,m}(x,\xi)}{r\rho^{r-1-\nu-m}}\sum_{j=1}^{r} M_{jm}e^{\rho\omega_j(t(x)-t(\xi))}\omega_j^{\nu+1}\langle 1\rangle_{x,\xi}^{j}a_{00}^{-1}(\xi)a_{s0}(\xi)y^{(n-s)}(\xi)d\xi-$$
$$-\sum_{p=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\int_a^x \tfrac{Q_{\nu,m-p}(x,\xi)}{r\rho^{r-1-\nu-m+p}}\sum_{j=1}^{r} M_{j,m-p}e^{\rho\omega_j(t(x)-t(\xi))}\omega_j^{\nu+1}\langle 1\rangle_{x,\xi}^{j}y^{(n-s)}(\xi)db_{sp}(\xi)+$$
$$+\sum_{p=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\int_a^x \tfrac{Q_{\nu,m-p}(x,\xi)}{r\rho^{r-1-\nu-m+p}}\sum_{j=1}^{r} M_{j,m-p}e^{\rho\omega_j(t(x)-t(\xi))}\omega_j^{\nu+1}\langle 1\rangle_{x,\xi}^{j}a_{0p}(\xi)a_{00}^{-1}(\xi)a_{s0}(\xi)y^{(n-s)}(\xi)d\xi-$$
$$-\sum_{p=2}^{m}\int_a^x \tfrac{Q_{\nu,m-p}(x,\xi)}{r\rho^{r-1-\nu-m+p}}\sum_{j=1}^{r} M_{j,m-p}e^{\rho\omega_j(t(x)-t(\xi))}\omega_j^{\nu+1}\langle 1\rangle_{x,\xi}^{j}a_{0p}(\xi)a_{00}^{-1}(\xi)y^{[n]}(\xi)d\xi.$$

Виберемо c_j так, щоб

$$y^{[\nu]}(x)=\sum_{j=1}^{r}\widehat{R}_\nu(x)\left(\rho t'(x)\right)^{\nu}\omega_j^{\nu}c_j\widehat{E}(x)e^{\rho\omega_j t(x)}\langle 1\rangle_x^j+\Omega_\nu(x),\ \ \nu\in\{0,\dots,r-1\}. \tag{16}$$

Тоді для c_j справджується система $-\sum\limits_{s=1}^{r}\widehat{R}_{s-1}^{-1}(a)\widetilde{c}_s\frac{(t'(a))^{1-s}}{r\rho^{s-1}}\widehat{E}^{-1}(a)M_{j,r-s}\omega_j\langle 1\rangle^j=c_j$, $j\in\{1,\dots,r\}$. Покладемо для деякого фіксованого k, $k\in\{1,\dots,r\}$,

$$\widehat{c}_j=c_j \text{ для } j\in\{1,\dots,k\}, \tag{17}$$

$$\widehat{c}_j=c_j-\textstyle\sum_{s=2}^{n}\frac{M_{jm}}{r\rho^{n-1}}\int_a^b(t'(\xi))^{1-n}e^{-\rho\omega_j t(\xi)}\widehat{E}^{-1}(\xi)a_{00}^{-2}(\xi)a_{s0}(\xi)\omega_j\langle 1\rangle_\xi^j y^{(n-s)}(\xi)d\xi+$$
$$+\sum_{p=1}^{m}\textstyle\sum_{s=1}^{n}\frac{(-1)^p}{r\rho^{n+p-1}}M_{j,m-p}\Big[\int_a^b(t'(\xi))^{1-n-p}e^{-\rho\omega_j t(\xi)}\widehat{E}^{-1}(\xi)a_{00}^{-1}(\xi)\omega_j\langle 1\rangle_\xi^j y^{(n-s)}(\xi)db_{sp}(\xi)-$$
$$-\textstyle\int_a^b(t'(\xi))^{1-n-p}e^{-\rho\omega_j t(\xi)}\widehat{E}^{-1}(\xi)a_{0p}(\xi)a_{00}^{-2}(\xi)a_{s0}(\xi)\omega_j\langle 1\rangle_\xi^j y^{(n-s)}(\xi)d\xi\Big]+\sum_{p=2}^{m}\frac{(-1)^p}{r\rho^{n+p-1}}M_{j,m-p}\times$$
$$\times\textstyle\int_a^b(t'(\xi))^{1-n-p}e^{-\rho\omega_j t(\xi)}\widehat{E}^{-1}(\xi)a_{0p}(\xi)a_{00}^{-2}(\xi)\omega_j\langle 1\rangle_\xi^j y^{[n]}(\xi)d\xi \text{ для } j\in\{k+1,\dots,r\}. \tag{18}$$

Ввівши позначення $K_{1\nu p}(x,\xi,\rho)=\sum\limits_{j=1}^{k}\rho^\nu Q_{\nu,m-p}(x,\xi)M_{j,m-p}e^{\rho\omega_j(t(x)-t(\xi))}\omega_j^{\nu+1}$,

$K_{2\nu p}(x,\xi,\rho)=\sum\limits_{j=k+1}^{r}\rho^\nu Q_{\nu,m-p}(x,\xi)M_{j,m-p}e^{\rho\omega_j(t(x)-t(\xi))}\omega_j^{\nu+1}$, $\nu\in\{0,\dots,r-1\}$, $p\in\{0,\dots,m\}$,

і підставивши (17), (18) в (16), отримаємо для $\nu\in\{0,\dots,r-1\}$

$$y^{[\nu]}(x)=\widehat{R}_\nu(x)\sum_{j=1}^{r}\rho^\nu\omega_j^\nu\widehat{c}_j(t'(x))^\nu\widehat{E}(x)e^{\rho\omega_j t(x)}\langle 1\rangle_x^j+H_1(a,x,\rho)+H_2(b,x,\rho), \tag{19}$$

$$H_q(u,x,\rho)=\sum_{s=2}^{n}\tfrac{\rho^{1-n}}{r}\int_u^x K_{q\nu 0}(x,\xi,\rho)a_{00}^{-1}(\xi)a_{s0}(\xi)y^{(n-s)}(\xi)\langle 1\rangle_{x,\xi}d\xi-\sum_{p=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\tfrac{\rho^{1-n-p}}{r}\times$$
$$\times\Big[\int_u^x K_{q\nu p}(x,\xi,\rho)y^{(n-s)}(\xi)\langle 1\rangle_{x,\xi}db_{sp}(\xi)-\int_u^x K_{q\nu p}(x,\xi,\rho)a_{0p}(\xi)a_{00}^{-1}(\xi)a_{s0}(\xi)\langle 1\rangle_{x,\xi}y^{(n-s)}(\xi)d\xi\Big]-$$
$$-\sum_{p=2}^{m}\tfrac{\rho^{1-n-p}}{r}\int_u^x K_{q\nu p}(x,\xi,\rho)a_{0p}(\xi)a_{00}^{-1}(\xi)y^{[n]}(\xi)\langle 1\rangle_{x,\xi}d\xi,\quad q\in\{1,\ 2\}.$$

5. Асимптотика розв'язків рівняння з мірами.

Лема. *Існує така стала C, що для всіх $\rho\in T$, $\nu\in\{0,\dots,r-1\}$, $p\in\{0,\dots,m\}$ виконуються нерівності*

$$\left|K_{1\nu p}(x,\xi,\rho)\right|\le C\left|\rho\right|^\nu k\left|e^{\rho\omega_k(t(x)-t(\xi))}\right| \text{ для } a\le\xi\le x\le b,$$
$$\left|K_{2\nu p}(x,\xi,\rho)\right|\le C\left|\rho\right|^\nu (r-k)\left|e^{\rho\omega_k(t(x)-t(\xi))}\right| \text{ для } a\le x\le\xi\le b.$$

Доведення. Виберемо сталу C так, щоб $\left|e^{c(\omega_j-\omega_k)(t(x)-t(\xi))}\right| \le C_1\ \forall j,k \in \{1,\dots,r\}$, $x,\xi \in [a,b]$. Якщо $\rho \in T$, то з нерівностей (7) випливає, що $\mathrm{Re}(\rho\omega_\alpha) \le \mathrm{Re}(\rho\omega_\alpha + (\rho+c)(\omega_k-\omega_\alpha))$ для $\alpha \le k$, звідки для $a \le \xi \le x \le b$ $|e^{\rho\omega_\alpha(t(x)-t(\xi))}| \le C_1|e^{\rho\omega_k(t(x)-t(\xi))}|$, бо $t(x)$ – монотонна функція. Оскільки $a_{00}(x)$, $a_{00}^{-1}(x)$, $\sigma(x)$, $\sigma^{-1}(x)$ – обмежені на $[a,b]$, $Q_{\nu,m-p}(x,\xi)$ теж є там обмеженими і $|K_{1\nu p}(x,\xi,\rho)| \le Ck|\rho|^\nu|e^{\rho\omega_k(t(x)-t(\xi))}|$. Подібно доводиться інша нерівність. □

З рівнянь (19) отримуємо асимптотичні формули для розв'язків рівняння (1), що містяться у такій теоремі.

Теорема 1. *За вищезгаданих умов на коефіцієнти квазідиференціального рівняння (1), воно у всій області T комплексної ρ-площини має r лінійно незалежних розв'язків y_1, y_2,..., y_r, регулярних (тобто однозначних аналітичних) відносно $\rho \in T$ для достатньо великого $|\rho|$ і таких, що для великих $|\rho|$ задовольняють співвідношення*

$$y_k^{[\nu]}(x,\rho) = \widehat{R}_\nu(x)(\rho t'(x))^\nu e^{\rho\omega_k t(x)}\widehat{E}(x)\omega_k^\nu\left[1+o(1)\right],\ \nu \in \{0,\dots,r-1\},\ k \in \{1,\dots,r\}, \quad (20)$$

де $\widehat{R}_\nu(x)$, $t(x)$ і $\widehat{E}(x)$ визначаються формулами (9), (11).

Доведення. Припустимо, що рівняння (1) має такий розв'язок y_k, що $\widehat{c}_\nu = 0$ для $\nu \ne k$, $\widehat{c}_k = 1$. Отже,

$$y_k^{[\nu]}(x) = \widehat{R}_\nu(x)\rho^\nu\omega_k^\nu(t'(x))^\nu\widehat{E}(x)e^{\rho\omega_k t(x)}\langle 1\rangle_x + H_1(a,x,\rho) + H_2(b,x,\rho),\ \nu \in \{0,\dots,r-1\}. \quad (21)$$

Покладемо для $\nu \in \{0,\dots,r-1\}$, $k \in \{1,\dots,r\}$, $p \in \{0,\dots,m\}$, $s \in \{0,\dots,n\}$

$$z_{k\nu}(x) = \widehat{R}_\nu^{-1}(x)y_k^{[\nu]}(x)(\rho t'(x))^{-\nu}\widehat{E}^{-1}(x)e^{-\rho\omega_k t(x)}, \quad (22)$$

$$\mathsf{K}_{kp\nu s}(x,\xi,\rho) = \begin{cases} \frac{1}{r}\widehat{R}_\nu^{-1}(x)K_{1\nu p}(x,\xi,\rho)(t'(x))^{-\nu}(t'(\xi))^{n-s}\rho^{2-p-s-\nu}\frac{\widehat{E}(\xi)}{\widehat{E}(x)}e^{-\rho\omega_k(t(x)-t(\xi))}, & \xi \le x, \\ -\frac{1}{r}\widehat{R}_\nu^{-1}(x)K_{2\nu p}(x,\xi,\rho)(t'(x))^{-\nu}(t'(\xi))^{n-s}\rho^{2-p-s-\nu}\frac{\widehat{E}(\xi)}{\widehat{E}(x)}e^{-\rho\omega_k(t(x)-t(\xi))}, & \xi > x, \end{cases}$$

та побудуємо функції $\widehat{Q}_{kp\nu s}(x,\xi,\rho)$ і $g_{sp}(x)$ так: $\widehat{Q}_{kp\nu s}(x,\xi,\rho) = -\mathsf{K}_{kp\nu s}(x,\xi,\rho)$ для $s \in \{0,\dots,n\}$, $p \in \{1,\dots,m\}$; $\widehat{Q}_{kp\nu s}(x,\xi,\rho) = \mathsf{K}_{k,p-m,\nu s}(x,\xi,\rho)$ для $s \in \{1,\dots,n\}$, $p \in \{m+1,\dots,2m\}$; $\widehat{Q}_{k0\nu s}(x,\xi,\rho) = \mathsf{K}_{k0\nu s}(x,\xi,\rho)$ для $s =\in \{1,\dots,n\}$; $\widehat{Q}_{kp\nu 0}(x,\xi,\rho) = 0$ для $p = 0, m+1, m+2,\dots,2m$; $g_{sp}(x) = b_{sp}(x)$ для $s \in \{1,\dots,n\}$, $p \in \{1,\dots,m\}$; $g_{0p}(x) = \int_a^x a_{0p}(t)a_{00}^{-1}(t)dt$ для $p \in \{0,\dots,m\}$; $g_{s0}(x) = \int_a^x a_{00}^{-1}(t)a_{s0}(t)dt$ для $s \in \{1,\dots,n\}$; $g_{sp}(x) = \int_a^x a_{0,p-m}(t)a_{00}^{-1}(t)a_{s0}(t)dt$ для $s \in \{0,\dots,n\}$, $p \in \{m+1,\dots,2m\}$. Зрозуміло, що всі $g_{sp}(x)$ мають обмежену варіацію на $[a,b]$. Тоді для $z_{k\nu}(x,\rho)$ ми отримаємо систему інтегральних рівнянь

$$z_{k\nu}(x,\rho) = \omega_k^\nu\langle 1\rangle_x + \frac{1}{\rho}\sum_{p=0}^{2m}\sum_{s=0}^{n}\int_a^b \widehat{Q}_{kp\nu s}(x,\xi,\rho)\langle 1\rangle_{x,\xi} z_{k,n-s}(\xi,\rho)\,dg_{sp}(\xi).$$

Інтеграл в останній рівності існуватиме як інтеграл Стільтьєса внаслідок того, що підінтегральна функція може мати хіба що правосторонні розриви, тоді як $g_{sp}(x)$ є неперервними праворуч. Якщо ця система має розв'язок $z_{k\nu}$, то, використавши метод послідовних підстановок, лему і обмеженість функцій $\sigma(x)$, $a_{00}(x)$, $\sigma^{-1}(x)$, $a_{00}^{-1}(x)$ на $[a,b]$, отримаємо так само, як і в [10], твердження теореми. □

6. Регулярні крайові умови. Запишемо тепер для квазідиференціального рівняння (1) такі (нормовані) крайові умови

$$U_\nu(y) = \alpha_\nu y^{[k_\nu]}(a) + \beta_\nu y^{[k_\nu]}(b) + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \left[\alpha_{\nu j} y^{[j]}(a) + \beta_{\nu j} y^{[j]}(b)\right] = 0,\ \nu \in \{1, \ldots, r\}, \tag{23}$$

де форми $U_\nu(y)$ – лінійно незалежні, $r-1 \geq k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_r \geq 0$, $k_{s+2} < k_s$, $s \in \{1, \ldots, r-2\}$, $|\alpha_\nu| + |\beta_\nu| > 0$, $\nu \in \{1, \ldots, r\}$. Нехай

$$\widehat{\alpha}_\nu = \begin{cases} \alpha_\nu \widehat{E}(a)(|\sigma(a)a_{00}^{-1}(a)|)^{\frac{k_\nu}{r}},\ k_\nu < n, \\ \alpha_\nu a_{00}(a)\widehat{E}(a)(|\sigma(a)a_{00}^{-1}(a)|)^{\frac{k_\nu}{r}},\ k_\nu \geq n, \end{cases} \quad \widehat{\beta}_\nu = \begin{cases} \beta_\nu \widehat{E}(b)(|\sigma(b)a_{00}^{-1}(b)|)^{\frac{k_\nu}{r}},\ k_\nu < n, \\ \beta_\nu a_{00}(b)\widehat{E}(b)(|\sigma(b)a_{00}^{-1}(b)|)^{\frac{k_\nu}{r}},\ k_\nu \geq n. \end{cases}$$

Для r непарного ($r = 2\mu - 1$) нормовані крайові умови (23) назвемо *регулярними* для задачі (1), (23), якщо числа θ_0 і θ_1, що визначаються співвідношенням

$$\theta_0 + \theta_1 s = \begin{vmatrix} \widehat{\alpha}_1\omega_1^{k_1} & \cdots & \widehat{\alpha}_1\omega_{\mu-1}^{k_1} & (\widehat{\alpha}_1 + s\widehat{\beta}_1)\omega_\mu^{k_1} & \widehat{\beta}_1\omega_{\mu+1}^{k_1} & \cdots & \widehat{\beta}_1\omega_r^{k_1} \\ \widehat{\alpha}_2\omega_1^{k_2} & \cdots & \widehat{\alpha}_2\omega_{\mu-1}^{k_2} & (\widehat{\alpha}_2 + s\widehat{\beta}_2)\omega_\mu^{k_2} & \widehat{\beta}_2\omega_{\mu+1}^{k_2} & \cdots & \widehat{\beta}_2\omega_r^{k_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \widehat{\alpha}_r\omega_1^{k_r} & \cdots & \widehat{\alpha}_r\omega_{\mu-1}^{k_r} & (\widehat{\alpha}_r + s\widehat{\beta}_r)\omega_\mu^{k_r} & \widehat{\beta}_r\omega_{\mu+1}^{k_r} & \cdots & \widehat{\beta}_r\omega_r^{k_r} \end{vmatrix}, \tag{24}$$

відрізняються від нуля. Для r парного ($r = 2\mu$) нормовані крайові умови (23) називатимемо *регулярними* для задачі (1), (23), якщо будуть відмінними від нуля числа θ_{-1} і θ_1, що визначаються рівністю $\theta_{-1}/s + \theta_0 + \theta_1 s = D$, де визначник D відрізняється від визначника з (24) тим, що $(\mu+1)$-й стовпець містить елементи вигляду $\left(\widehat{\alpha}_j + \frac{1}{s}\widehat{\beta}_j\right)\omega_{\mu+1}^{k_j}$. Наведене означення регулярності умов є узагальненням відповідного поняття з [1], яке на відміну від нашого поняття використовує у виразі (23) звичайні похідні.

7. Асимптотика власних значень і власних функцій. Для крайової задачі (1), (23) можна встановити, що для регулярних крайових умов множина власних значень є зліченною і асимптотична поведінка великих за модулем власних значень залежить лише від чисел θ_0, θ_{-1}, θ_1.

Теорема 2. *Власні значення крайової задачі (1), (23) з регулярними крайовими умовами (23), утворюють дві нескінченні послідовності λ'_k, λ''_k ($k = N, N+1, N+2, \ldots$), де N – достатньо велике натуральне число. Для непарного r*

$$\begin{aligned} \lambda'_k &= (-1)^m \operatorname{sign}(a_{00}\sigma)\left(\mp\tfrac{2k\pi i}{h}\right)^r \left[1 \mp \tfrac{r \ln_0 \xi^{(1)}}{2k\pi i} + o\left(\tfrac{1}{k}\right)\right], \\ \lambda''_k &= (-1)^m \operatorname{sign}(a_{00}\sigma)\left(\pm\tfrac{2k\pi i}{h}\right)^r \left[1 \pm \tfrac{r \ln_0 \xi^{(2)}}{2k\pi i} + o\left(\tfrac{1}{k}\right)\right], \end{aligned} \quad k \to \infty, \tag{25}$$

де $h = t(b) > 0$, верхній знак відповідає $r = 4q-1$, а нижній – $r = 4q+1$, $\ln_0 \xi$ – деяке фіксоване значення натурального логарифма, а $\xi^{(1)}$ і $\xi^{(2)}$ – корені рівняння $\theta_1\xi + \theta_0 = 0$, що відповідає області S_q з q відповідно непарним і парним. Для парного r, $r = 2\mu$,

$$\begin{aligned} \lambda'_k &= (-1)^{m+\mu} \operatorname{sign}(a_{00}\sigma)\left(\tfrac{2k\pi}{h}\right)^r \left[1 \mp \tfrac{\mu \ln_0 \xi'}{k\pi i} + o\left(\tfrac{1}{k}\right)\right], \\ \lambda''_k &= (-1)^{m+\mu} \operatorname{sign}(a_{00}\sigma)\left(\tfrac{2k\pi}{h}\right)^r \left[1 \mp \tfrac{\mu \ln_0 \xi''}{k\pi i} + o\left(\tfrac{1}{k}\right)\right], \end{aligned} \quad k \to \infty, \tag{26}$$

де ξ' і ξ'' – корені (різні чи однакові) рівняння $\theta_1\xi^2 + \theta_0\xi + \theta_{-1} = 0$, що відповідають області S_0. Вибір верхнього знаку в формулах (26) відповідає парному, а нижнього – непарному μ.

Власні функції $y_k^{(1)}(x)$, $y_k^{(2)}(x)$, *що відповідають простим власним значенням* λ_k', λ_k'', *при* r *непарному можна подати у вигляді визначників* r*-го порядку, елементи першого рядка яких мають вигляд*

$$E_{jk}^{(s)}(x) = \begin{cases} \exp(\omega_j \rho_k^{(s)} t(x))\langle 1\rangle_x, \ j \in \{1, \dots, \mu\}, \\ \exp(\omega_j \rho_k^{(s)}(t(x) - h))\langle 1\rangle_x, \ j \in \{\mu+1, \dots, r\}, \end{cases}$$

а ν*-й рядок* ($\nu = \overline{2, r}$) *можна записати так:* $(\widehat{\alpha}_\nu\rangle\omega_1^{k_\nu}, \dots, \widehat{\alpha}_\nu\rangle\omega_{\mu-1}^{k_\nu}, \widehat{\alpha}_\nu + \xi^{(s)}\widehat{\beta}_\nu\rangle\omega_\mu^{k_\nu}, \widehat{\beta}_\nu\rangle\omega_{\mu+1}^{k_\nu}, \dots, \widehat{\beta}_\nu\rangle\omega_r^{k_\nu})$; *тут* $k \in \{N, N+1, \dots\}$; $\mu = (r+1)/2$; $\rho_k^{(s)} = (\mp 2k\pi i + \ln_0 \xi^{(s)})/(\omega_\mu h)$; $s = 1, 2$, *причому вибір знаку здійснюється за тим самим правилом, що й у формулах (25).*
У випадку парного r *власні функції, що відповідають простим власним значенням* λ_k', λ_k'', *мають вигляд визначників* y_{1k}, y_{2k}, *отриманих з детермінантів* $y_k^{(1)}(x)$, $y_k^{(2)}(x)$ *за допомогою заміни* $(\mu+1)$*-го стовпця* ($\mu = r/2$) *на* $\mathrm{colon}(\exp(-\omega_\mu \rho_k' t(x))\langle 1\rangle_x, \langle\widehat{\alpha}_2 + \widehat{\beta}_2/\xi'\rangle\omega_{\mu+1}^{k_2}, \dots, \langle\widehat{\alpha}_r + \widehat{\beta}_{n+m}/\xi'\rangle\omega_{\mu+1}^{k_r})$ *в* y_{1k} *і аналогічний у* y_{2k}, *а також заміни* $\rho_k^{(s)}$ *на* ρ_k' *і* ρ_k'', $\xi^{(s)}$ *на* ξ' *і* ξ'' *в* y_{1k} *і* y_{2k} *відповідно, де* $\rho_k' = (\ln_0 \xi' \mp 2k\pi i)/(\omega_\mu h)$, $\rho_k'' = (\ln_0 \xi'' \mp 2k\pi i)/(\omega_\mu h)$, *а знак вибирається так, як і в (26).*

Доведення. Теорема доводиться методом, запропонованим у [1, с. 74–86], з використанням теореми 1. Варто зауважити лише, що власні значення є нулями визначника $\Delta(\lambda) = \det(U_\nu(y_j))$. Внаслідок формул (20) крайові умови (23) для лінійно незалежних розв'язків рівняння (1) запишуться у вигляді $U_\nu(y_j) = (\rho\omega_j)^{k_\nu}\varphi_\nu\{\langle\widehat{\alpha}_\nu\rangle + \exp(\rho\omega_j h)\langle\widehat{\beta}_\nu\rangle\}$, $\varphi_\nu = \begin{cases} 1, & k_\nu < n, \\ (-1)^{k_\nu - n}, & k_\nu \geq n. \end{cases}$ Як і в [1], можна довести, що в кожному секторі T за виконання нерівностей (7) після підстановки останніх формул у $\Delta(\lambda)$, скорочення на спільні множники рядків і стовпців (враховуючи, що для парного r має місце $\omega_{\mu+1} = -\omega_\mu$) ми отримаємо рівняння $\langle\theta_0\rangle + \exp(\rho\omega_\mu h)\langle\theta_1\rangle = 0$ і $\langle\theta_1\rangle\exp(2\rho\omega_\mu h) + \langle\theta_0\rangle\exp(\rho\omega_\mu h) + \langle\theta_{-1}\rangle = 0$ для r непарного ($r = 2\mu+1$) і парного ($r = 2\mu$) відповідно. Внаслідок регулярності крайових умов (23), подібно до [1, с. 77–83], з цих рівнянь отримуються асимптотичні формули для власних значень. Власні функції будуються як лінійні комбінації розв'язків вигляду (20) рівняння (1) з коефіцієнтами, пропорційними до алгебраїчних доповнень першого рядка визначника $\Delta(\lambda)$. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.
2. Шувар О. Б. *Асимптотичні формули для власних значень диференціально-граничного оператора непарного порядку в просторі вектор-функцій* // Вісник НУ "Львівська політехніка". Сер. Прикладна математика. – 2000. – № 407. – С. 54–57.
3. Гомилко А. М., Радзиевский Г. В. *Асимптотика по параметру решений линейных функционально-дифференциальных уравнений* // Укр. мат. журн. – 1990. – Т. 42, № 11. – С. 1460–1469.
4. Радзиевский Г. В. *Асимптотика по параметру фундаментальной системы решений линейного функционально-дифференциального уравнения* // Укр. мат. журн. – 1995. – Т. 47, № 6. – С. 811–836.
5. Рыхлов В. С. *Асимптотика системы решений дифференциального уравнения общего вида с параметром* // Укр. мат. журн. – 1996. – Т. 48, № 1. – С. 96–108.
6. Винокуров В. А., Садовничий В. А. *Асимптотика собственных значений и собственных функций и формула следа для потенциала, содержащего* δ*-функции* // Диф. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 6. – С. 735–751.

7. Махней О. В. *Асимптотика власних значень і власних функцій сингулярного диференціального оператора на скінченному інтервалі* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – Т. 44, № 2. – С. 17–25.
8. Альбеверио С., Гестези Ф., Хёэг-Крон Р., Хольден Х. Решаемые модели в квантовой механике. М.: Мир, 1991. – 566 с.
9. Шин Д. Ю. *О решениях линейного квазидиффернциального уравнения n-го порядка* // Матем. сборник. – 1940. – Т. 7(49), №3. – С. 479–532.
10. Махней А. В., Таций Р. М. *Асимптотика собственных значений и собственных функций сингулярного квазидифференциального оператора* // Диф. уравнения. – 2003. – Т. 39, № 8. – С. 1044–1051.
11. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971. – 312 с.
12. Стасюк М. Ф., Таций Р. М. *Корректные дифференциальные системы с мерами* // Вестн. Львов. политехн. ин-та. Сер. Диф. уравн. и их прилож. – 1988. – № 222. – С. 89–90.
13. Таций Р. М. Дискретно-неперервні крайові задачі для диференціальних рівнянь з мірами: Автореф. дис. . . . д-ра фіз.-мат. наук: 01.01.02 / Львів. держ. ун-т ім. І. Франка. – Львів, 1994. – 37 с.
14. Makhney O.V., Tatsiy R. M. *The structure of Cauchy function of a vector quasidifferential equation* // Matematychni Studii. – 2004. – V. 21, № 2. – P. 221-224.
15. Таций Р. М., Пахолок Б. Б. *О структуре фундаментальной матрицы квазидифференциального уравнения* // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1989. – № 4. – С. 25–28.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
вул. Шевченка, 57, м. Івано-Франківськ, 76000, Україна
makhney1@yahoo.com
Akademia Bydgoska im. K. Wielkego, Inst. Mathematyki
pl. Wyssenhoffa, 11, Bydgoszcz, 85-072, Polska
imath@ukw.edu.pl

Надійшло 23.11.2004
Після переробки 7.12.2005