УДК 59.41/47

О. М. Ткаченко

УМОВИ ЛОКАЛЬНОЇ СПРЯЖЕНОСТІ ПІДГРУП СИЛОВА У МАЙЖЕ ЛОКАЛЬНО-НОРМАЛЬНІЙ ГРУПІ

O. M. Tkachenko. *Conditions of locally conjugation of Sylow subgroups in almost locally normal group*, Matematychni Studii, **29** (2008) 127–131.

Criteria of local conjugation of two Sylow subgroups in an almost locally normal group are established. We give a characterize almost locally normal groups at which all Sylow subgroups are locally conjugate.

А. Н. Ткаченко. *Условия локальной сопряженности силовских подгрупп в почти локально-нормальной группе* // Математичні Студії. – 2008. – Т.29, №2. – C.127–131.

Установлены критерии локальной сопряженности двух силовских подгрупп в почти локально-нормальной группе. Дана характеризация почти локально-нормальных групп, у которых все силовские подгрупы локально сопряжены.

Однією з фундаментальних теорем теорії скінченних груп є теорема Силова, з якої зокрема вивпливає спряженість будь-яких двох максимальних p-підгруп скінченної групи. Іншими словами, якщо p — просте число, P й Q — максимальні p-підгрупи скінченної групи G, то остання має внутрішній автоморфізм, який переводить P в Q. Максимальні p-підгрупи отримали назву *підгруп Силова.* Надалі ми будемо вважати просте число p зафіксованим і замість *p-підгрупа Силова* говорити просто *підгрупа Силова.*

Згодом теорему Силова було узагальнено на клас локально-нормальних груп ([1, 2]). Група називається локально-нормальною, якщо будь-яка скінченна множина її елементів є підмножиною деякого скінченного нормального дільника. При узагальненні роль внутрішнього автоморфізму у локально-нормальній групі відіграє локально внутрішній автоморфізм. Автоморфізм φ групи G називається локально внутрішнім, якщо для будь-якого скінченного числа елементів $g_1, ..., g_n \in G$ існує такий елемент $x \in G$, що $(g_i)^x = (g_i)^\varphi$ для $i \in \{1, ..., n\}$. Дві підгрупи називаються локально спряженими, якщо існує локально внутрішній автоморфізм групи, який одну з підгруп переводить в іншу. Отже, будь-які дві підгрупи Силова локально-нормальної групи локально спряжені.

У той же час, у майже локально-нормальній групі (тобто, групі, яка є скінченним розширенням локально-нормальної), підгрупи Силова можуть бути навіть неізоморфними ([3]). Природно виникає спроба виділити як самостійний об'єкт вивчення підклас майже локально-нормальних груп, у яких властивість локальної спряженості підгруп Силова зберігається, що дозволяє розглядати виділений підклас, як, у певному сенсі, найближчий до класу локально-нормальних груп.

У даній статті встановлено критерії локальної спряженості двох підгруп Силова майже локально-нормальної групи, на основі яких отримано характеризацію груп виділеного підкласу.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 20D20; 20F50.

Позначимо через F довільну інваріантну підгрупу скінченного індексу майже локально-нормальної групи G. Тоді, очевидно, існує скінченна підгрупа B з умовою

$$G = FB. \tag{1}$$

Виходячи із співвідношення (1), завдання характеризації груп виділеного підкласу можна сформулювати так:
як повинен діяти скінченний множник B на локально-нормальному множнику F, щоб підгрупи Силова були локально спряженими у групі G?

Утім, початково критерій локальної спряженості можна дати, виходячи лише з властивостей множника F.

Твердження 1. *У групі G вигляду(1) дві підгрупи Силова P й Q локально спряжені тоді й тільки тоді, коли локально спряженими в G є перетини $P \cap F$ та $Q \cap F$.*

Доведення. Якщо P й Q локально спряжені, то локально внутрішній автоморфізм, який переводить P в Q, переводить також $P \cap F$ в $Q \cap F$. Навпаки, нехай φ – локально внутрішній автоморфізм групи G, що переводить $P \cap F$ в $Q \cap F$. У підгрупі

$$H = \langle P^{\varphi}, Q \rangle$$

нормальна p-підгрупа $Q \cap F$ має скінченний індекс, тому всі підгрупи Силова в H є спряженими. Композиція локально внутрішнього автоморфізму φ та внутрішнього автоморфізму, який переводить P^{φ} в Q, – локально внутрішній автоморфізм, що переводить P в Q. Твердження доведено. □

Природу внутрішнього автоморфізму φ в доведенні твердження 1 у контексті дії множника B на множник F розкриває наступна теорема.

Теорема 1. *У групі вигляду(1) дві підгрупи Силова P й Q локально спряжені тоді й тільки тоді, коли у множнику F існує така підгрупа $N \lhd G$ скінченного індексу, що для будь-якої скінченної підгрупи $K < N$, $K \lhd G$, перетини $P \cap K$ й $Q \cap K$ спряжені в G за допомогою елемента, який нормалізує множник B.*

Доведення. Необхідність. Нехай φ — локально внутрішній автоморфізм групи G, який переводить P в Q, x — елемент групи G, для якого $B^{\varphi} = B^{x}$. З (1) маємо $x = bf$, де $b \in B$, $f \in F$, звідки $B^{\varphi} = B^{f}$. Виберемо у централізаторі елемента $h = f^{-1}$ інваріантну в G підгрупу скінченного індексу N. Для довільного скінченного нормального дільника K групи G, який міститься в N, позначимо через y такий елемент, що для будь-якого $a \in BK$ задовольняє умову $a^{y} = a^{\varphi}$. За вибором y маємо $(P \cap K)^{y} = (P \cap K)^{\varphi} = Q \cap K$, тоді з включень $K < N \leq C_G(h)$ випливає $(P \cap K)^{yh} = Q \cap K$. Крім того, оскільки $B^{y} = B^{\varphi} = B^{f}$, то виконується включення $yh = yf^{-1} \in N_G(B)$.

Достатність. З огляду на твердження 1 досить встановити, що перетини $P \cap N$ й $Q \cap N$ локально спряжені в G. З цією метою позначимо через L таку скінченну інваріантну в G підгрупу множника F, що $F = NL$. Тоді для групи G співвідношення (1) набирає вигляду $G = NLB$. Візьмемо у нормальному дільнику N локальну систему $\{N_i : i \in I\}$ скінченних підгруп, інваріантних у групі G. Тоді $\{N_iLB : i \in I\}$ — локальна система підгруп групи G. За умовою теореми для кожної підгрупи N_iLB множина A_i її автоморфізмів, індукованих внутрішніми автоморфізмами групи G, які переводять $P \cap N_i$ в $Q \cap N_i$, не є порожньою. Нехай $A_i \leq A_j$ при $N_i \leq N_j$; якщо $\varphi_j \in A_j$, то проекцію елемента φ_j на множину A_i означимо як звуження автоморфізму φ_j на підгрупу N_iLB. Так побудована система множин $\{A_i : \ i \in I\}$ задовольняє умови теореми Куроша про повну проекційну множину ([1]), за якою у кожній з множин A_i можна так вибрати по одному автоморфізму φ_i, що будь-які два з цих автоморфізмів φ_i, φ_j індукуються деяким третім автоморфізмом φ_k. Тому сукупність цих автоморфізмів визначає локально внутрішній автоморфізм φ групи G з умовою $(P\cap N)^{\varphi} = (Q\cap N)$. Теорему доведено. □

Наслідок 1. *У групі вигляду (1) дві підгрупи Силова P й Q локально спряжені тоді й тільки тоді, коли у множнику F існує така інваріантна в G підгрупа N скінченного індексу, що деякий локально внутрішній автоморфізм групи G переводить $P\cap N$ в $P\cap N$ і нормалізує множник B.*

Встановлені критерії дають можливість через опис дії B на F охарактеризувати майже локально-нормальні групи, усі підгрупи Силова яких локально спряжені. У доведенні використаємо наслідок з такого допоміжного твердження.

Твердження 2. *Нехай група G розкладається у добуток $G = F \cdot \langle x\rangle$, де $F \lhd G$ і K — інваріантна в G підгрупа, що міститься в центрі множника F . Якщо суміжний клас $\bar{x}= xK$ фактор-групи G/K нормалізує підгрупи Силова образу F/K, то представник x нормалізує підгрупи Силова у самому множнику F.*

Доведення. Позначимо через a довільний елемент деякої підгрупи Силова P множника F . За умовою $a^x = bz$, де $b \in P$ і $z \in K$. Оскільки елементи b й z переставні, а елементи bz і b є p-елементами, то елемент z також є p-елементом. Із включень

$$z \in K \leq Z(F)$$

слідує, що z належить усім силовським підгрупам множника F , у тому числі і підгрупі P . Отже, $a^x \in P$, що доводить твердження. □

Наслідок 2. *Нехай група G розкладається у добуток $G = F \cdot \langle x\rangle$, де $F \lhd G$ і K — підгрупа множника F , що володіє скінченним рядом підгруп, інваріантних у G*

$$\langle 1\rangle = Z_0 \leq Z_1 \leq ... \leq Z_n = K$$

з властивістю $Z_i/Z_{i-1} \in Z(F/Z_{i-1})$, $i = 1, ..., n$. Якщо суміжний клас $\bar{x}= xK$ фактор-групи G/K нормалізує підгрупи Силова образу F/K, то представник x нормалізує підгрупи Силова у множнику F.

Теорема 2. *У групі вигляду(1) будь-які дві підгрупи Силова локально спряжені тоді й тільки тоді, коли у множнику F існує така підгрупа N скінченного індексу, що усі підгрупи Силова кожного скінченного нормального дільника $K < N$, $K \lhd G$ спряжені в G за допомогою елементів, які нормалізують множник B.*

Доведення. У відповідності з теоремою 1 досить довести лише необхідність. Позначимо через Z другий член верхнього центрального ряду множника F. Якщо Z має скінченний індекс, то поклавши $N = Z$, доводимо теорему. Припустимо, що індекс $| G : Z |$ нескінченний. Скористаємось тим, що фактор-група F/Z є підгрупою прямого добутку скінченних груп ([2]). Позначимо останній через $H = \underset{i\in I}{\times} F_i$. Припустимо супротивне: у будь-якій підгрупі N множника F, яка має скінченний індекс та інваріантна в G, знайдеться скінченна інваріантна в G підгрупа K, а в ній — дві підгрупи Силова, для яких у групі G не існує елемента, який би переводив спряженням одну з них у другу та нормалізував множник B. Зокрема, така підгрупа K знайдеться у самому множнику F. Позначимо її через K_1, а її відповідні підгрупи Силова — через P_1 і Q_1. Очевидно, що носій I_1 підгрупи K_1 у прямому добутку H не порожній. Позначимо тепер через N_1 підгрупу скінченного індексу, інваріантну в G , яка міститься у прообразі перетину прямого добутку $H_1 = \underset{i\in I\setminus I_1}{\times} F_i$ з фактор-групою F/Z, а також у централізаторі підгрупи K_1. У підгрупі N_1 аналогічно беремо підгрупу K_2 з відповідними підгрупами Силова P_2 й Q_2 і т.д. Продовжуючи цей процес, ми отримаємо дві нескінченні p-підгрупи:

$$P = \langle P_n :\ n \in \{1, 2 \dots\}\rangle, \quad Q^* = \langle Q_n :\ n \in \{1, 2 \dots\}\rangle,$$

які містяться у підгрупі $\langle K_n :\ n \in \{1, 2 \dots\}\rangle$. Позначимо через P й Q підгрупи Силова групи G, які містять відповідно P^* й Q^*, а через φ — локально внутрішній автоморфізм, що переводить P в Q. Міркуючи подібно, як і при доведенні теореми 1, ми отримаємо елемент $f \in F$, який задовольняє співвідношення $B^f = B^\varphi$. Виберемо тепер серед підгруп K_n таку, щоб носій фактор-групи K_n/Z у прямому добутку H мав порожній перетин з носієм суміжного класу fZ. Позначимо вибрану підгрупу через K_0. За вибором, суміжний клас $f(K_0 \cap Z)$ централізує підгрупу $K_0/(K_0 \cap Z)$ фактор-групи $K_0 \cdot \langle f\rangle/(K_0 \cap Z)$ і за наслідком 2 представник f нормалізує підгрупи Силова групи K_0. Як і в доведенні теореми 1, ми приходимо тепер до існування елемента y, який разом з елементом $h = f^{-1}$ задовольняє співвідношення $(P \cap K_0)^{yh} = Q \cap K_0$, $yh \in N_G(B)$. Отримана суперечність доводить теорему. □

Якщо скінченний множник B є p-групою, то доведені критерії допускають посилення: серед елементів, які нормалізують B і переводять спряженнями одну в одну відповідні підгрупи Силова нормальних дільників K, знайдуться такі, які належать до множника F. У випадку теореми 1 це обумовлюється існуванням підгрупи скінченного індексу $R \leq F$ з підгрупами Силова $P \cap R$ і $Q \cap R$, що нормалізуються множником B; у випадку ж теореми 2 усі підгрупи Силова G є проекційними і за теоремою 2 праці [4] існує підгрупа скінченного індексу $R \leq F$, будь-яка підгрупа Силова якої нормалізується множником B. Наступний приклад показує, що для довільного множника B вказане посилення не правильне.

Приклад 1. Розглянемо знакозмінну групу підстановок $S = S_5$ і позначимо через A її підгрупу A_5. Тоді $S = A\lambda\langle x\rangle$, де $x = (1, 2)$. У групі A візьмемо дві 5-підгрупи Силова: P^*, породжену циклом $(1, 4, 2, 3, 5)$ та Q^*, породжену циклом $(1, 3, 2, 4, 5)$. Шляхом перебору можна показати, що у підгрупі A не існує елемента, який би нормалізував підгрупу $\langle x\rangle$ і переводив за допомогою спряження P^* в Q^*. Разом з тим, транспозиція $y = (3, 4)$ задовольняє умову $y^{-1}P^*y = Q^*$ і нормалізує $\langle x\rangle$. Нехай тепер $G = (\underset{i\in I}{\times} F_i)\lambda\langle x\rangle$, де I — нескінченна множина індексів, F_i — підгрупа, ізоморфна з групою A_5, а елемент x діє на кожному прямому множнику F_i так само, як і на підгрупі A групи S. У кожному з множників F_i позначимо через P_i підгрупу, що відповідає P^* , а через Q_i — підгрупу, що відповідає Q^*. За теоремою 1 підгрупи Силова P й Q локально спряжені в G, але елементи, які шляхом спряження переводять P_i в Q_i та нормалізують $\langle x\rangle$, не належать до підгрупи $F = \underset{i\in I}{\times} F_i$.

Зазначимо, нарешті, що теореми 1 і 2 суттєво спрощуються для випадку, коли множник F у факторизації (1) у свою чергу є прямим добутком скінченних підгруп F_i, $i \in I$, інваріантних у групі G. Не порушуючи загальності, ми можемо у цьому випадку записати (1) у вигляді напівпрямого добутку

$$G = (\underset{i \in I}{\times} F_i)\lambda B. \tag{2}$$

Сформулюємо основні результати роботи для груп такого роду.

Теорема 3. *У групі вигляду(2) дві підгрупи Силова P й Q локально спряжені тоді й тільки тоді, коли для кожного індексу $i \in I$ крім, можливо, скінченної їх підмножини, у множнику F_i існує елемент f_i, який централізує підгрупу B і разом з деяким елементом $b_i \in B$ задовольняє співвідношення*

$$(f_i b_i)^{-1}(P \cap F_i)(f_i B_i) = Q \cap F_i. \tag{3}$$

Теорема 4. *У групі вигляду(2) будь-які дві підгрупи Силова локально спряжені тоді й тільки тоді, коли для кожного індексу $i \in I$, крім, можливо, скінченної їх підмножини, для будь-яких двох підгруп Силова P_i й Q_i множника F_i існує елемент f_i, який централізує підгрупу B і разом з деяким елементом $b_i \in B$ задовольняє співвідношенню (3).*

При цьому, якщо у теоремах 3, 4 множник B є p-групою, то елементи f_i можна вибрати так, що усі елементи b_i стають рівними одиниці.

ЛІТЕРАТУРА

1. Курош А.Г. Теория групп. – М.: Наука, 1967. – 648 с.
2. Горчаков Ю.М. Группы с конечными классами сопряженных элементов. – М: Наука, 1978. –119 с.
3. Ткаченко А.Н. Силовские подгруппы почти локально нормальных групп// Укр. матем. журн. – 1984. – Т.36, №6. – С.798–801.
4. Ткаченко О.М. Майже локально-нормальні групи, всі силовські підгрупи яких проекційні// Науковий вісник НГУ. – 2005. – №8. – С.74–76.

alextka@rambler.ru

Надійшло 07.05.07

Після переробки 05.03.2008