УДК 512.64

В. П. Щедрик

ДЕЯКІ ІНВАРІАНТИ ПЕРЕТВОРЮВАЛЬНИХ МАТРИЦЬ

V. P. Shchedryk. *Some invariants of transformable matrices*, Matematychni Studii, **29** (2008) 121–126.

Invariants of matrices which reduce a matrix over a commutative domain of elementary divisors domain to a the canonical diagonal form are investigated.

В. П. Щедрик. *Некоторые инварианты преобразующих матриц* // Математичні Студії. – 2008. – Т.29, №2. – С.121–126.

Исследуются инварианты преобразующих матриц, т.е. матриц, которые приводят заданную матрицу над коммутативной областью элементарных делителей к ее канонической диагональной форме.

Нехай R — комутативна область елементарних дільників ([1]), тобто комутативна область над якою для кожної $n \times n$ матриці B існують такі оборотні матриці P та Q, що

$$PBQ = \operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \Phi, \quad \varphi_i |\, \varphi_{i+1}, \quad i \in \{1, \ldots, n-1\}. \tag{1}$$

При цьому матриця Φ називається *канонічною діагональною формою*, елементи φ_i — *інваріантними множниками*, а матриці P та Q — лівою та правою *перетворювальними матрицями* матриці B, відповідно. При розв'язуванні багатьох задач достатньо лише знати, що матриця B може бути зведена до вигляду (1). Однак, часто ця інформація є недостатньою. І перша проблема, яка при цьому виникає полягає у самому процесі пошуку перетворювальних матриць. Як відомо, коли R є евклідовим кільцем, то перетворювальні матриці P та Q є добутком елементарних матриць. Якщо ж R — комутативна область головних ідеалів, то таке твердження не є правильним ([2]). Вивченню кілець, над якими перетворювальні матриці є добутком елементарних матриць присвячені праці [2, 3]. Інше питання — це опис структури самих перетворювальних матриць. Якщо позначити через P_B множину лівих перетворювальних матриць матриці B, то з результатів статей [4, 5] випливає, що множина P_B є лівим класом суміжності повної лінійної групи $GL_n(R)$ за групою G_Φ, яка, у випадку неособливості матриці B, складається з усіх оборотних матриць вигляду

$$\left\| \begin{matrix} h_{11} & h_{12} & \ldots & h_{1,n-1} & h_{1n} \\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1} h_{21} & h_{22} & \ldots & h_{2,n-1} & h_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\varphi_n}{\varphi_1} h_{n1} & \frac{\varphi_n}{\varphi_2} h_{n2} & \ldots & \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} h_{n,n-1} & h_{nn} \end{matrix} \right\|.$$

Тобто $P_B = G_\Phi P$. Природно постає питання пошуку інваріантів та, навіть, канонічної форми матриць в класі P_B. Таким дослідженням присвячені статті [6–9]. Результати,

2000 *Mathematics Subject Classification:* 15A21.

отримані в цих статтях, стали основою методу факторизації матриць, який дав можливість опису структури дільників матриць. На їх базі сформульовано критерій асоційовності матриць, запропоновано підхід до вивчення питання односторонньої еквівалентності матриць. У даній статті продовжуємо дослідження перетворювальних матриць з точки зору пошуку їхніх інваріантів.

Скрізь надалі матриця B є неособливою. Введемо такі позначення

$$F_i = \operatorname{diag}\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, \ \cdots \ , \ \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, \ \underbrace{1 \ , \ \ldots \ , \ 1}_{n-i+1}\right), \quad P_{ij} = \left\| \begin{matrix} p_{ij} & p_{i,j+1} & \ldots & p_{in} \\ p_{i+1,j} & p_{i+1,j+1} & \ldots & p_{i+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{nj} & p_{n,j+1} & \ldots & p_{nn} \end{matrix} \right\|,$$

$i \in \{2, \ldots, n\}, \ j \in \{1, \ldots, n\}$, де $P = \| \, p_{ij} \, \|_1^n$ — матриця з рівності (1). Канонічна діагональна форма матриці P_{ij} має вигляд $S(P_{ij}) = \| \ Q_j^i \ \ \mathbf{0} \ \|$, $Q_j^i = \operatorname{diag}(q_{j1}^i, \ldots, q_{j,n-i+1}^i)$, якщо $i > j$ та $S(P_{ij}) = \left\| \begin{matrix} Q_j^i \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right\|$, $\ Q_j^i = \operatorname{diag}(q_{j1}^i \ , \ \ldots \ , \ q_{j,n-j+1}^i)$, якщо $i \le j$. Поставимо у відповідність кожній матриці P_{ij} діагональну матрицю

$$S(\Phi, P_{ij}) = \operatorname{diag}\left(\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, \ q_{j1}^i\right) \ , \ \ldots \ , \ \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, \ q_{jk}^i\right)\right),$$

де $k = n - i + 1$, якщо $i > j$ та $k = n - j + 1$, якщо $i \le j$. Основним результатом цієї статті є наступна теорема.

Теорема 1. *Набори матриць* $S(\Phi, P_{ij}), \ \ i \in \{2, \ldots, n\}, \ j \in \{1, \ldots, n\}$, *є інваріантами в множині перетворювальних матриць* P_B.

Перед доведенням цієї теореми доведемо ряд допоміжних тверджень.

Під *примітивною матрицею* будемо розуміти матрицю, найбільший спільний дільник мінорів максимального порядку якої дорівнює одиниці.

Лема 1. *Нехай* $A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,n-1} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & \beta_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \beta_n \end{matrix} \right\|$ — *примітивна матриця, у якої* $\beta_i | \, \beta_{i+1}$, $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. *Тоді* $(a_{n-i+1,i}, \ \beta_i) = 1, \ i \in \{1, \ldots, n\}$.

Доведення. З примітивності матриці A випливає примітивність всіх її стовпців, зокрема останнього. Це означає, що $(a_{1n}, \ \beta_n) = 1$. Отже, існують такі u та v, що $ua_{1n} + v\beta_n = 1$. Виконаємо над матрицею A ряд еквівалентних перетворень:

$$\left\| \begin{matrix} u & \mathbf{0} & v \\ \mathbf{0} & E_{2n-2} & \mathbf{0} \\ -\beta_n & \mathbf{0} & a_{1n} \end{matrix} \right\| A = \left\| \begin{matrix} ua_{11} & ua_{12} & \dots & ua_{1,n-1} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \beta_{n-1} & 0 \\ -\beta_n a_{11} & -\beta_n a_{12} & \dots & -\beta_n a_{1,n-1} & 0 \end{matrix} \right\| = A_1,$$

$$\left(E_n \oplus \left\| \begin{matrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ \frac{\beta_n}{\beta_1} a_{11} & \frac{\beta_n}{\beta_2} a_{12} & \cdots & \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} a_{1,n-1} & 1 \end{matrix} \right\| \right) A_1 \left\| \begin{matrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ -ua_{11} & -ua_{12} & \cdots & -ua_{1,n-1} & 1 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \beta_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{matrix} \right\| = A_2\,.$$

Оскільки матриця A_2 є примітивною, то примітивною буде і матриця, складена з перших $n-1$ її стовпців, взятих без перших елементів. Тобто задача зводиться до попередньої і дальше доведення леми проводиться за щойно описаною схемою. $\square$

Лема 2. *Якщо $H \in G_\Phi$, то $F_i H = H_i F_i, \quad i \in \{2, \dots, n\}$.*

Доведення. Оскільки j-й стовпець матриці H має вигляд

$$h_j = \left\| \begin{matrix} h_{1j} & \dots & h_{jj} & \dfrac{\varphi_{j+1}}{\varphi_j} h_{j+1,j} & \dots & \dfrac{\varphi_n}{\varphi_j} h_{nj} \end{matrix} \right\|^T, \quad 1 \le j \le i-1,$$

то

$$F_i h_i = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}} h_{1j} & \dots & \dfrac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}} h_{jj} & \dfrac{\varphi_i \varphi_{j+1}}{\varphi_{i-1}\varphi_j} h_{j+1,j} & \dots & \dfrac{\varphi_i \varphi_{i-1}}{\varphi_{i-1}\varphi_j} h_{i-1,j} & \dfrac{\varphi_i}{\varphi_j} h_{ij} & \dots & \dfrac{\varphi_n}{\varphi_j} h_{nj} \end{matrix} \right\|^T =$$

$$= \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}} \left\| \begin{matrix} h_{1j} & \dots & h_{jj} & \dfrac{\varphi_{j+1}}{\varphi_j} h_{j+1,j} & \dots & \dfrac{\varphi_{i-1}}{\varphi_j} h_{i-1,j} & \dfrac{\varphi_{i-1}}{\varphi_j} h_{ij} & \dots & \dfrac{\varphi_{i-1}\varphi_n}{\varphi_j \varphi_i} h_{nj} \end{matrix} \right\|^T,$$

$i \in \{2, \dots, n\}$. Отже, $\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}} \mid F_i h_j$. Це означає, що перші $j-1$ стовпців матриці $F_i H$ діляться на $\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}$. Тому $F_i H = H_i F_i$, де матриця H_i — частка від ділення справа матриці $F_i H$ на матрицю F_i. Лему доведено. $\square$

Лема 3. *Канонічна діагональна форма матриці $F_i P_j$, $i \in \{2, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$, де матриця P_j, утворена останніми $n-j+1$ стовпцями матриці P, дорівнює $\left\| \begin{matrix} \Psi_j^i \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right\|$, де*

$$\Psi_j^i = \begin{cases} \operatorname{diag}\left(\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}},\ q_{j1}^i \right), \dots, \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}},\ q_{j,n-i+1}^i \right) \right) \oplus \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}} E_{i-j}, & \text{якщо } i > j; \\ \operatorname{diag}\left(\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}},\ q_{j1}^i \right), \dots, \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}},\ q_{j,n-j+1}^i \right) \right), & \text{якщо } i \le j. \end{cases}$$

Доведення. Спершу розглянемо випадок, коли $i > j, \quad n-i+1 > j-1$. Для матриці P_{ij} існують такі оборотні матриці U, V, що $UP_{ij}V = S(P_{ij}) = \left\| \begin{matrix} Q_j^i & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|$ — канонічна діагональна форма матриці P_{ij}, де $Q_j^i = \operatorname{diag}(q_{j1}^i\ ,\ \dots\ ,\ q_{j,n-i+1}^i)$.

Тоді $(E_{i-1} \oplus U)P_jV = \left\| \begin{matrix} M_1 & M_2 \\ Q_j^i & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| = D_1$. З примітивності матриці D_1 випливає примітивність матриці $\left\| \begin{matrix} M_2 \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right\|$, а отже, і $(i-1)\times(i-j)$-матриці M_2. З того, що $i-1 \geq i-j$ випливає, що існує така оборотна матриця L, що $LM_2 = \left\| \begin{matrix} E_{i-j} \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right\|$. Тоді $(L \oplus E_{n-i+1})D_1 = \left\| \begin{matrix} K_1 & E_{i-j} \\ K_2 & \mathbf{0} \\ Q_j^i & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| \sim \left\| \begin{matrix} \mathbf{0} & E_{i-j} \\ K_2 & \mathbf{0} \\ Q_j^i & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| = D_2$, де матриця K_2 має розміри $(j-1)\times(n-i+1)$. Розглянемо примітивну матрицю, що складається з останніх $n-i+1$ рядків матриці P

$$\left\| \begin{matrix} p_{i1} & \dots & p_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc|c} p_{i1} & \dots & p_{i,n-j+1} & \\ \dots & \dots & \dots & P_{ij} \\ p_{n1} & \dots & p_{n,n-j+1} & \end{array} \right\| .$$

Домноживши дану матрицю зліва на матрицю U, а справа на $E_{n-j+1} \oplus V$, отримаємо

$$\left\| \begin{matrix} p'_{i1} & \dots & p'_{i,n-j+1} & q_{j1}^i & & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & & \ddots & & \mathbf{0} \\ p'_{n1} & \dots & p'_{n,n-j+1} & 0 & & q_{j,n-i+1}^i & \end{matrix} \right\| .$$

Всі мінори максимального $(n-i+1)$-го порядку цієї примітивної матриці діляться на $q_{j1}^i \ \cdots \ q_{jt}^i$, де $t = n-i-j+2$. Це означає, що $q_{j1}^i = q_{j2}^i = \ \cdots \ = q_{jt}^i = 1$, де $t = n-i-j+2$. Тобто матриця D_2 має вигляд $D_2 = \left\| \begin{matrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{i-j} \\ K_2^1 & K_2^2 & \mathbf{0} \\ E_t & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_{j,t+1}^i & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|$, де $Q_{j,t+1}^i = \operatorname{diag}(q_{j,t+1}^i\ ,\ \dots\ ,\ q_{j,n-i+1}^i)$, $\ K_2^2$- матриця порядку $j-1$. Тоді

$$\left\| \begin{matrix} E_{i-j} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E_{j-1} & -K_2^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{j-1} \end{matrix} \right\| D_2 = \left\| \begin{matrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{i-j} \\ \mathbf{0} & K_2^2 & \mathbf{0} \\ E_t & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_{j,t+1}^i & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| = D_3.$$

В групі $GL_{j-1}(R)$ існує така матриця S, що

$$SK_2^2 = \left\| \begin{matrix} k_{1,t+1} & k_{1,t+2} & \dots & k_{1,\bar{i}-1} & k_{1\bar{i}} \\ k_{2,t+1} & k_{2,t+2} & \dots & k_{2,\bar{i}-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{j-1,t+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{matrix} \right\| = \overline{K}_2^2, \tag{2}$$

де $\bar{i} = n-i+1$. Отже, $(E_{i-j} \oplus S \oplus E_{\bar{i}})D_3 = \left\| \begin{matrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{i-j} \\ \mathbf{0} & \overline{K}_2^2 & \mathbf{0} \\ E_t & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_{j,t+1}^i & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| = D_4.$

Зауважимо, що всі оборотні матриці, на які домножувалася зліва матриця P_j мають вигляд $N = \left\| \begin{matrix} N_1 & N_2 \\ \mathbf{0} & N_3 \end{matrix} \right\|$, де матриця N_3 має порядок $n-i+1$. Тоді

$$F_iN = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}N_1 & \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}N_2 \\ \mathbf{0} & N_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} N_1 & \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}N_2 \\ \mathbf{0} & N_3 \end{array} \right\| F_i = \overline{N}F_i.$$

Оскільки матриця F_i — неособлива, то $\det N = \det \overline{N}$, а отже, матриця $\overline{N}$ є оборотною. Звідси випливає, що $F_iP_j \sim F_iD_4$. Очевидно, що

$$F_iD_4 = \underbrace{\left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{i-j} \\ \mathbf{0} & \overline{K}_2^2\Gamma^i_{j,t+1} & \mathbf{0} \\ E_t & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Delta^i_{j,t+1} & \mathbf{0} \end{array} \right\|}_{D_5} \Big(E_t \oplus \operatorname{diag}((\psi_i,\ q^i_{j,t+1})\ ,\ \dots\ ,\ (\psi_i,\ q^i_{j\bar{i}})) \oplus \psi_iE_{i-j} \Big),$$

де $\psi_i = \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}$, $\quad \Gamma^i_{j,t+1} = \operatorname{diag}(\gamma_{t+1}\ ,\ \gamma_{t+2},\ \dots\ ,\ \gamma_{\bar{i}})$, $\quad \gamma_l = \frac{\psi_i}{(\psi_i,\ q^i_{jl})}$,

$\Delta^i_{j,t+1} = \operatorname{diag}(\delta^i_{j,t+1}\ ,\ \delta^i_{j,t+2},\ \dots\ ,\ \delta^i_{j\bar{i}})$, $\quad \delta^i_{jl} = \frac{q^i_{jl}}{(\psi_i,\ q^i_{jl})}$, $\quad l \in \{t+1, t+2, \dots, \bar{i}\}$.

Для завершення доведення потрібно перевірити чи матриця D_5 є примітивною. В свою чергу для цього достатньо довести, що примітивною є матриця $D_6 = \left\| \begin{array}{c} \overline{K}_2^2\Gamma^i_{j,t+1} \\ \Delta^i_{j,t+1} \end{array} \right\|$. З примітивності матриці D_4 випливає примітивність матриці $\left\| \begin{array}{c} \overline{K}_2^2 \\ Q^i_{j,t+1} \end{array} \right\|$. Тоді за лемою 1 виконуються рівності

$$(q^i_{j,t+1},\ k_{j-1,t+1}) = (q^i_{j,t+2},\ k_{j-2,t+2}) = \ldots = (q^i_{j\bar{i}},\ k_{1\bar{i}}) = 1. \qquad (3)$$

Оскільки $\delta^i_{j\bar{i}} | q^i_{j\bar{i}}$ і з рівностей (3) $(q^i_{j\bar{i}},\ k_{1\bar{i}}) = 1$, то $(\delta^i_{j\bar{i}},\ k_{1\bar{i}}) = 1$. Зваживши також на те, що $(\delta^i_{j\bar{i}},\ \gamma_{\bar{i}}) = 1$, отримуємо $(\gamma_{\bar{i}}k_{1\bar{i}},\ \delta^i_{j\bar{i}}) = 1$. Отже, існують такі u та v, що $u\gamma_{\bar{i}}k_{1\bar{i}} + v\delta^i_{j\bar{i}} = 1$. З огляду на те, що $\delta^i_{j,t+1} \mid \delta^i_{j,t+2} \mid \ \dots \ \mid \delta^i_{j\bar{i}}$, отримуємо

$$\left\| \begin{array}{ccc} u & \mathbf{0} & v \\ \mathbf{0} & E_{2j-4} & \mathbf{0} \\ -\delta^i_{j\bar{i}} & \mathbf{0} & \gamma_{\bar{i}}k_{1\bar{i}} \end{array} \right\| D_6 = \left\| \begin{array}{ccccc} * & * & \dots & * & 1 \\ \gamma_{t+1}k_{2,t+1} & \gamma_{t+2}k_{2,t+2} & \dots & \gamma_{\bar{i}-1}k_{2,\bar{i}-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{t+1}k_{j-1,t+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \delta^i_{j,t+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \delta^i_{j,t+2} & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \delta^i_{j,\bar{i}-1} & 0 \\ \delta^i_{j\bar{i}}s_{t+1} & \delta^i_{j\bar{i}}s_{t+2} & \dots & \delta^i_{j\bar{i}}s_{\bar{i}-1} & 0 \end{array} \right\| \sim$$

$$\sim \left\| \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \gamma_{t+1}k_{2,t+1} & \gamma_{t+2}k_{2,t+2} & \dots & \gamma_{\bar{i}-1}k_{2,\bar{i}-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{t+1}k_{j-1,t+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \delta^i_{j,t+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \delta^i_{j,t+2} & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \delta^i_{j,\bar{i}-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right\| = D_7.$$

Продовживши описаний процес, отримаємо, що матриця D_7 є примітивною, а отже, примітивною буде і матриця D_5. Зауваживши, що $E_t \oplus \operatorname{diag}((\psi_i,\ q^i_{j,t+1})\ ,\ \dots\ ,\ (\psi_i,\ q^i_{j\bar{i}})) \oplus$ $\oplus \psi_iE_{i-j} = \operatorname{diag}\left((\psi_i,\ q^i_{j1})\ ,\ \dots\ ,\ (\psi_i,\ q^i_{j\bar{i}})\right) \oplus \psi_iE_{i-j} = \Psi^i_j$, переконуємось у правильності нашого твердження.

У випадку коли $i > j$, $n-i+1 \leq j-1$ матриця P_j правосторонніми перетвореннями із $GL_{n-j+1}(R)$ та допустимими лівосторонніми перетвореннями, тобто такими перетвореннями, які не змінюють канонічну діагональну форму матриці F_iP_j, зводиться до вигляду $\left\| \begin{matrix} \mathbf{0} & E_{i-j} \\ L_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ Q^i_{j,t+1} & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|$, а у випадку, коли $i < j$ до вигляду $\left\| \begin{matrix} \mathbf{0} \\ L_2 \\ \mathbf{0} \\ Q^i_{j,t+1} \end{matrix} \right\|$, де матриці L_1, L_2 мають вигляд (2). Тобто ці випадки є частковими випадками першого, а тому доводяться за аналогічною схемою. Лему 3 доведено. $\square$

Доведення теореми. Нехай $B = P^{-1}\Phi Q^{-1} = U^{-1}\Phi' V^{-1}$ — запис матриці B у вигляді добутку її перетворювальних матриць та канонічної діагональної форми. Оскільки $\Phi = \operatorname{diag}(\varphi_1 e_1, \ \ldots\ , \ \varphi_n e_n)$,, то $\Phi' = \operatorname{diag}(\varphi_1 e_1, \ \ldots\ , \ \varphi_n e_n)$, де $e_i \in U(R)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Отже, $G_\Phi = G_{\Phi'}$ і $U = HP$, де $H \in G_\Phi$. За лемою 2, $F_iH = H_iF_i, i \in \{2, \ldots, n.\}$ Оскільки матриці F_i - неособливі, то $\det H = \det H_i$, а отже, матриці H_i є оборотними. Позначимо через P_j та U_j матриці, складені з останніх $n-j+1$ стовпців матриць P та U, відповідно. Зауваживши, що $U_j = HP_j$, отримуємо $F_iU_j = F_iHP_j = H_iF_iP_j \sim F_iP_j$. Тобто, інваріантні множники канонічних діагональних форм матриць F_iU_j та F_iP_j можуть відрізнятись лише на одиниці кільця R, явний вигляд яких вказано в лемі 3. Отже, ненульові елементи матриць $S(\Phi, P_{ij})$, $S(\Phi', U_{ij})$, $i \in \{2, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, мають вигляд $\left(\dfrac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}},\ q^i_{js}\right)$, $\left(\dfrac{\varphi_i e_i}{\varphi_{i-1} e_{i-1}},\ q^i_{js}\, l_{ijs}\right)$, де $l_{ijs} \in U(R)$. Очевидно, що вони можуть відрізнятися лише на одиниці кільця R. Тобто набори матриць $S(\Phi, P_{ij})$ є інваріантами в множині перетворювальних матриць P_B. Теорему доведено. $\square$

ЛІТЕРАТУРА

1. Kaplansky I. *Elementary divisor ring and modules* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – V.66. – P. 464–491.
2. Bougaut B. *Anneaux Quasi–Euclidiens.* – These de docteur troisieme cycle. – 1976. – 67p.
3. Zabavsky B. *Diagonalizability theorems for matrices over ring with finite stable range* // Algebra and Discrete Mathematics. – 2005. – №1. – P. 134–148.
4. Зелиско В.Р. *О строении одного класса обратимых матриц* // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1980.– № 12. – С. 14–21.
5. Щедрик В.П. *Структура та властивості дільників матриць над комутативною областю елементарних дільників* // Математичні студії. – 1998. – Т.10, №. 2. – С. 115 – 120.
6. Щедрик В.П. *Про перетворювальні матриці над деякими областями Безу* // Мат. методи та фіз.–мех. поля. – 2000. – Т.43, № 1.– С. 36–44.
7. Щедрик В.П. *Φ–скелет матриць і його властивості* // Мат. методи та фіз.–мех. поля. –2000. – Т.43, №2. – С. 45–51.
8. Щедрик В.П. *Неасоційовані матриці зі стандартним Φ–скелетом* // Мат. методи та фіз.–мех. поля. –2002. – Т.45, № 3. – С. 32–44.
9. Mel'nyk O., Shchedryk V. *Some properties of minors of invertible matrices* // Вісник Львівського університету.– Серія механіко–математична.– 2003.– Вип. 61.– С. 129–133.

Ін–т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Надійшло 13.09.2005
Після переробки 1.05.2007