УДК 512.714

Л. П. Бедратюк

ЯДРО УЗАГАЛЬНЕНОГО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ВЕЙТЦЕНБЕКА КІЛЬЦЯ МНОГОЧЛЕНІВ

L. P. Bedratyuk. *Kernel of generalized Weitzenböck derivation of polynomial ring*, Matematychni Studii, **29** (2008) 115–120.

Let $k[X]\colon =k[x_1,\dots,x_n]$ be a polynomial ring over a field k of characteristic zero. For a generalized Weitzenböck derivation D of the ring $k[X]$, a description of the constant rings $k[X]^D$ and $k(X)^D$ is given.

Л. П. Бедратюк. *Ядро обобщенного дифференцирования Вейтценбека кольца многочленов* // Математичні Студії. – 2008. – Т.29, №2. – C.115–120.

Пусть $k[X]\colon =k[x_1,\dots,x_n]$ — кольцо многочленов над полем k нулевой характеристики. Для обобщеного дифференцирования Вейтценбека D кольца многочленов $k[X]$ дано описание колец констант $k[X]^D$ та $k(X)^D$.

Нехай $k[X]\colon =k[x_1,x_2,\dots,x_n]$ — кільце многочленів над полем k нульової характеристики, а $k(X)$ — поле часток кільця $k[X]$. Диференціюванням кільця $k[X]$ називається лінійне відображення $D\colon k[X]\to k[X]$, для якого виконується правило Лейбніца. Для довільного набору $(f_1,\dots,f_n)\in k[X]^n$ існує єдине диференціювання D кільця $k[X]$ таке, що $D(x_i)=f_i$, $i\in\{1,\dots,n\}$, а саме

$$D=f_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+f_n\frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Продовжимо диференціювання D на поле $k(X)$. Позначимо через $k[X]^D$ *кільце сталих диференціювання* D

$$k[X]^D=\{\varphi\in k[X]; D(\varphi)=0\}$$

а через $k(X)^D$ — *кільце сталих поля* $k(X)$. Кільця $k[X]^D$ і $k(X)^D$ активно вивчаються тривалий час (див., наприклад, [1]–[5]).довільного диференціювання D, при $n>4$ існують такі диференціювання, для яких кільця сталих уже не є скінченнопородженими ([6]). У загальному випадку питання опису $k[X]^D$ залишається відкритим навіть при $n=2$.

Найпростішим прикладом локально нільпотентного диференціювання є, так зване, диференціювання Вейтценбека, яке ми будемо позначати через d і яке визначається так: $d(x_i)=x_{i-1}$, $d(x_1)=0$, $i\in\{1,\dots,n\}$. В векторному просторі породженому елементами $\{x_i\}$ диференціювання d діє як лінійний оператор, матрицею якого є нільпотентна жорданова клітка порядку $n\times n$. З відомого результату Вейтценбека ([7]) про скінченнопородженість кільця інваріантів лінійної дії адитивної групи поля $(k,+)$ на афінному многовиді k^n випливає, що кільце $k[X]^d$ також є скінченнопородженим, оскільки, кожний локально нільпотентний оператор кільця $k[X]$ індукує деяку лінійну дію групи $(k,+)$ на k^n.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 13N15; 13A50; 13F20.

Незважаючи на те, що диференціювання Вейтценбека d є найпростішим локально нільпотентним диференціюванням, мінімальна система однорідних породжуючих кільця сталих $k[X]^d$ у загальному випадку не описана до цього часу. Поясненням складності обчислення ядра d може бути той факт, що, насправді, кільце $k[X]^d$ ізоморфне до алгебри коваріантів бінарної форми порядку $n-1$. Цей ізоморфізм випливає з класичної теореми Робертса [8] про те, що будь-який коваріант однозначно визначається своїм старшим членом, а також з того, що старші члени коваріантів, при відповідному виборі базису простору бінарних форм, є роз'язками такого диферецiального рiвняння (див. [9])

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_3} + \cdots + x_{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \quad f \in k[X].$$

Задача опису породжуючих ядра $k[X]^d$ є відомою задачею класичної теорії інваріантів, розв'язана класиками лише у випадках $n \leq 7$ та $n = 9$ (див. [10], [11]). Тому, результати відносно недавніх робіт [1], [12] в яких вказано мінімальну систему породжуючих елементів $k[X]^d$ для $n \leq 6$, насправді не є новими.

У цій статті дано коротке елементарне доведення (теорема 1, (i)) відомих результатів (див., наприклад, [13], [14]) про структуру кільця сталих $k[X]^d$, а також кільця $k(X)^d$ (теорема 1, (ii)). Ці кільця сталих описуються системою $z_2, z_3, \ldots, z_{n-1}$ елементів ядра, які в нас з'являються як інтеграли відповідної системи диференціальних рівнянь, а в ([13], [14]) вони виникають як результат дії деякого проектора з $k[X]$ в $[X]^d$, визначеного диференціюванням d. Вперше многочлени $z_2, z_3, \ldots, z_{n-1}$ з'явилися в роботі Келі ([15], п. 8.7.1), в якій, говорячи сучасною мовою, явно описано кільце $k(X)^d$.

Теореми 2, 3 поширюють наведені вище результати на випадок узагальненого диференціювання Вейтценбека, тобто такого диференціювання D кільця $k[X]$, матриця якого в деякому базисі є сумою жорданових кліток з нулем на головній діагоналі

$$D\colon = d_{n_1} \oplus d_{n_2} \oplus \cdots \oplus d_{n_s},$$

тут d_{n_i} — диференціювання Вейтценбека, матриця якого у векторному просторі X_i є жордановою кліткою $J_{n_i}(0)$. На мові класичної теорії інваріантів кільце $k[X]^D$ ізоморфне до кільця спільних коваріантів s бінарних форм порядків $n_1 - 1, n_2 - 1, \ldots, n_s - 1$. Мінімальна система породжуючих кільця $k[X]^D$ для випадку $s = 2, n_1, n_2 \leq 5$ вперше описана ще Сильвестром і пізніше заново обчислена в [16]. В загальному випадку, *проблема* знаходження мінімальної системи породжуючих кільця $k[X]^D$ залишається відкритою.

1. Наступне твердження описує кільця $k(X)^d$ і $k[X]^d$, як підкільця поля $k(X)$.

Теорема 1. *Для диференціювання Вейтценбека d, кільця многочленів $k[X]$, $n > 2$ виконуються наступні твердження:*

(i) $k[X]^d = k[x_1, z_2, \ldots, z_{n-1}][\frac{1}{x_1}] \cap k[X]$, *де* $z_i\colon = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i+j} \frac{i!}{j!} x_{i+1-j}\, x_2^j\, x_1^{i-1-j}$,

(ii) $k(X)^d = k\,(x_1, z_2, \ldots, z_{n-1})$.

Доведення. (i) Кільце $k[X]^d$ збігається з кільцем поліноміальних інтегралів наступного диференціального рівняння першого порядку в частинних похідних

$$x_1 \frac{\partial(z)}{\partial x_2} + \cdots + x_{n-1} \frac{\partial(z)}{\partial x_n} = 0.$$

Відповідна нормальна система рівнянь $\dot{x}_1 = 0, \quad \dot{x}_2 = x_1, \quad \ldots, \quad \dot{x}_n = x_{n-1}$, легко інтегрується

$$\begin{cases} x_1 = C_1 \\ x_2 = C_2 + C_1 t \\ x_3 = C_3 + C_2 t + C_1 \frac{t^2}{2!} \\ \cdots\cdots \\ x_n = C_n + C_{n-1} t + C_{n-2}\frac{t^2}{2!} + \cdots + C_1 \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}. \end{cases} \qquad (*)$$

Для знаходження інтегралів виключимо t із системи $(*)$. З другого рівняння знаходимо $t = \frac{x_2 - C_2}{C_1}$ і підставляємо в третє рівняння $x_3 = C_3 + C_2 \frac{x_2 - C2}{C_1} + \frac{C_1}{2!}\left(\frac{x_2-C_2}{C_1}\right)^2$.

Після простих спрощень отримаємо, що $x_3 - \frac{x_2^2}{2\,x_1} = C_3 - \frac{C_2^2}{2\,C_1}$, тобто многочлен $x_3 - \frac{x_2^2}{2\,x_1}$ сталий на розв'язках системи $(*)$ і тому є інтегралом цієї системи.

В загальному випадку при цій підстановці в i-те рівняння $x_i = \sum_{k=0}^{i-1} C_{i-k} \frac{(x_2-C_2)^k}{k!\,C_1^k}$, після спрощення і розділення змінних, отримаємо співвідношення вигляду

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_i(C_1, C_2, \ldots, C_n), F_i \in k(X),$$

тобто $F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — перший інтеграл системи $(*)$. Для отримання явного вигляду $F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ зауважимо, що $F_i(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ повинен дорівнювати правій частині виразу для x_i при $x_2 = 0$, тобто

$$F_i(C_1, C_2, \ldots, C_n) = \sum_{k=0}^{i-1} C_{i-k} \frac{(-C_2)^k}{k!\,C_1^k} = \sum_{k=0}^{i-1} \frac{(-1)^k}{k!} C_{i-k} \frac{(C_2)^k}{C_1^k}.$$

Повернувшись до змінних x_i і, виконавши необхідні спрощення, отримаємо, що

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=0}^{i-1} \frac{(-1)^k}{k!} x_{i-k} \frac{(x_2)^k}{x_1^k},$$

або $F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{z_{i-1}}{(i-1)!x_1^i}$, де $z_i\colon = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i+j} \frac{i!}{j!} x_{i+1-j}\, x_2^j\, x_1^{i-1-j}, i \in \{2, \ldots, n-1\}$, зокрема,

$$z_2 = x_2^2 - 2\,x_1\,x_3,\ z_3 = x_2^3 - 3\,x_1\,x_2 + 3\,x_1^2\,x_4,\ z_4 = x_2^4 - 4\,x_2^2\,x_3\,x_1 + 8\,x_2\,x_4\,x_1^2 - 8\,x_5\,x_1^3.$$

Нехай G довільний многочлен з ядра $k[X]^d$. Покажемо, що $G \in k[x_1, z_2, \ldots, z_{n-1}][\frac{1}{x_1}]$. Для цього виразимо невідомі $x_3, x_4, \ldots, x_n$ через многочлени $x_1, x_2, z_2, \ldots, z_{n-1}$

$$x_3 = \frac{1}{2}\frac{x_2^2 - z_2}{x_1}\ \ x_4 = \frac{1}{3!}\frac{x_2^3 - 3\,x_2\,z_2 + 2\,z_3}{x_1^2}\ \ \ldots .$$

Підставивши значення для x_i у G і розклавши за степенями x_2, отримаємо $G = G_0 + x_2\,G_1 + \ldots + x_2^m\,G_m$, для деякого m, де G_i є многочленами від $x_1, \frac{1}{x_1}, z_2, \ldots, z_{n-1}$, тобто $d(G_i) = 0, \forall i \geq 0$. Оскільки,

$$d(G) = x_1\,G_1 + 2\,x_1\,x_2\,G_2 + \ldots + m\,x_1\,x_2^{m-1}\,G_m = x_1\,(G_1 + 2\,x_2\,G_2 + \ldots + m\ x_2^{m-1}\,G_m),$$

і в кільці $k[X]$ немає дільників нуля, то рівність $d(G) = 0$ можлива лише тоді коли $G_i \equiv 0$, при $i > 0$. Отже $k[X] \ni G = G_0 \in k[x_1, z_2, \ldots, z_{n-1}][\frac{1}{x_1}] \cap k[X]$, і з довільності вибору $G \in k[X]^d$ отримуємо, що $k[X]^d \subset k[x_1, z_2, \ldots, z_{n-1}][\frac{1}{x_1}] \cap k[X]$. Обернене включення очевидне. Тому, $k[X]^d = k[x_1, z_2, \ldots, z_{n-1}][\frac{1}{x_1}] \cap k[X]$, що і потрібно було довести.

(ii) Функції F_i утворюють систему перших інтегралів системи $(*)$, тому

$$k(x_1, F_2, \ldots, F_{n-1}) = k(x_1, z_2, \ldots, z_{n-1}) \subset k(X)^d.$$

Розглянемо нескоротний дріб $\frac{f}{g} \in k(X)^d,\ f, g \in k[X]$. Покажемо, що тоді $f, g \in k[X]^d$. Позначимо через $\mathrm{ord}_d(a)$ порядок елемента $a \in k[X]$ відносно локально-нільпотентного диференціювання d, тобто $\mathrm{ord}_d(a)\colon = \max\{s, d^s(a) \neq 0\}$. З означення порядку елемента зразу отримується, що (i) якщо $d(f) \neq 0$, то $\mathrm{ord}_d(d(f)) = \mathrm{ord}_d(f) - 1$, (ii) $\mathrm{ord}_d(fg) = \mathrm{ord}_d(f) + \mathrm{ord}_d(g),\ f, g \in k[X]$.

Припустимо, що $d(f) \neq 0$ і $d(g) \neq 0$. Маємо $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{d(f)g - fd(g)}{g^2} = 0$, звідки $d(f)g = fd(g)$. Оскільки f, g є взаємно простими, то рівність $d(f)g = fd(g)$ можлива лише у випадку коли $d(f) = pf$ і $d(g) = pg$, для деякого $p \in k[X], p \neq 0$. Отже, зокрема, $\mathrm{ord}_d(f) - 1 = \mathrm{ord}_d(p) + \mathrm{ord}_d(f) \geq \mathrm{ord}_d(f)$. Отримана суперечність і доводить, що $d(f) = 0$.

Аналогічно отримуємо, що і $d(g) = 0$, тобто $f, g \in k[x_1, z_2, \dots, z_{n-1}][\frac{1}{x_1}]$. Звідси випливає, що тоді $\frac{f}{g} \in k(x_1, z_2, \dots, z_{n-1}) = k\left(x_1, z_2, \dots, z_{n-1}\right)$, тобто $k(X)^d = k\left(x_1, z_2, \dots, z_{n-1}\right)$. $\square$

2. Розглянемо диференціювання D, яке діє в кільці $k[X, Y]$, де $X{=}\{x_1, x_2, \dots, x_{n_1}\}$, $Y{=}\{y_1, y_2, \dots, y_{n_2}\}$, $n_1 \geq n_2$ за правилом $D(x_i){=}x_{i-1}$, $D(y_i){=}y_{i-1}$, $D(x_1){=}D(y_1){=}0$. Матриця лінійного оператора D у векторному k-просторі $X + Y$, породженому елементами $\{x_i\}$, та $\{y_i\}$, є сумою двох нільпотентних жорданових кліток розмірів n_1 та n_2. Обмеження диференціювання D на кожен із підпросторів X і Y буде диференціюванням Вейтценбека, яке діє в просторах розмірності n_1 та n_2. Позначимо цей факт так $D\colon = d_{n_1} \oplus d_{n_2}$. Нескладно побачити, що при $n_1{=}n_2{=}1$ і $n_1{=}2$, $n_2{=}1$ маємо $k[X, Y]^D = k[x_1, y_1]$, $k(X, Y)^D = k(x_1, y_1)^D$. Нехай многочлени z_i, $i \in \{2, \dots, n_1{-}1\}$ такі як і в умові теореми 1. Якщо $n_1 > 2$, а $n_1 = 1$, то використовуючи теорему 1, легко перевірити, що $k[X, Y]^D = k[x_1, z_2, \dots, z_{n_1-1}, y_1][\frac{1}{x_1}] \cap k[X, Y]$, $k(X, Y)^D = k(x_1, z_2, \dots, z_{n_1-1}, y_1)$. Випадок $n_1{=}2$ і $n_2{=}2$, розглядався в [1] (Твердження 6.9.5), де доведено, що

$$k[X, Y]^D = k[x_1, y_1, x_2 y_1 - y_2 x_1].$$

Аналогічно до п. (ii) попередньої теореми, отримаємо, що $k(X, Y)^D = k(x_1, y_1, x_2 y_1 - y_2 x_1)$. Тому припустимо, що $n_1, n_2 > 2$ і позначимо $\Delta\colon = x_2 y_1 - y_2 x_1$, а

$$u_i\colon = \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j} \frac{i!}{j!}\, y_{i+1-j}\, y_2^j\, y_1^{i-1-j}, \ i = 2, \dots, n_2 - 1.$$

Покладемо $Z\colon = \{x_1, z_2, \dots, z_{n_1-1}\}$ і $U\colon = \{y_1, u_2 \dots, u_{n_2-1}\}$.

Теорема 2. *Для диференціювання Вейтценбека D, $n_1, n_2 > 2$ правильні наступні твердження*

$$(i)\ k[X, Y]^D = k[\Delta, Z, U]\left[\tfrac{1}{x_1}, \tfrac{1}{y_1}\right] \cap k[X, Y], \qquad (ii)\ k(X, Y)^D = k\big(\Delta, Z, U\big).$$

Доведення. (i). Нехай G — довільний многочлен з ядра $k[X]^D$. Виразимо невідомі $x_3, \dots, x_{n_1-1}$, $y_3, \dots, y_{n_2-1}$, через многочлени $x_1, x_2, z_2, \dots, z_{n_1-1}$ і $y_1, y_2, u_2, \dots, u_{n_2-1}$

$$x_3 = \frac{1}{2} \frac{x_2^2 - z_2}{x_1},\ x_4 = \frac{1}{3!} \frac{x_2^3 - 3\, x_2\, z_2 + 2\, z_3}{x_1^2},\ y_3 = \frac{1}{2} \frac{y_2^2 - u_2}{y_1},\ x_4 = \frac{1}{3!} \frac{y_2^3 - 3\, y_2\, u_2 + 2\, u_3}{y_1^2},\ \dots$$

Підставивши значення для x_i, y_i у G і, розклавши за степенями x_2, y_2 отримаємо, що $G = G_{0,0} + G^{(1)} + G^{(2)} + \dots$, де $G^{(m)} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x_2^{m-k} y_2^k G_{m,k}$, а $G_{i,j}$ є невідомими многочленами від змінних $x_1, \frac{1}{x_1}, z_2, \dots, z_{n_1-1}, y_1, \frac{1}{y_1}, u_2, \dots, u_{n_2-1}$ тобто $D(G_{i,j}) = 0, \forall i, j$. Оскільки, всі $G^{(m)}$ однорідні відносно x_2, y_2, то умова $D(G) = 0$ буде виконуватися лише, якщо $D(G^{(m)}) = 0$ для всіх i, j. Маємо

$$D(G^{(m)}){=}m x_1 x_2^{m-1} G_{m,0} + m(m-1) x_1 x_2^{m-2} y_2 G_{m-1,1} + m x_2^{m-1} y_1 G_{m-1,1} + \dots + \\ + m y_1 y_2^{m-1} G_{0,m}.$$

Зібравши коефіцієнти біля x_2, y_2 отримаємо

$$D(G^{(m)}){=}m x_2^{m-1}(x_1 G_{m,0} + y_1 G_{m-1,1}) + \binom{m}{2} x_2^{i-2} y_2 (x_1 G_{m-1,1} + y_1 G_{m-2,2}) + \\ + \dots + m y_2^{m-1}(x_1 G_{1,m-1} + y_1 G_{0,m}) = 0.$$

Отже, $G_{i,j}$ задовольняють таку систему рівнянь $\begin{cases} x_1 G_{m0} + y_1 G_{m-1,1} = 0, \\ x_1 G_{m-1,1} + y_1 G_{m-2,2} = 0, \\ \cdots\cdots \\ x_1 G_{1,m-1} + y_1 G_{0,m} = 0, \end{cases}$

розв'язавши яку знайдемо, що $G_{m-i,i} = (-1)^i x_1^i y_1^{m-i} F$, для деякого $F \in k[Z, U][\frac{1}{x_1}, \frac{1}{y_1}]$. Тому,

$$G^{(m)} = x_2^m y_1^m F - m x_2^{m-1} y_2 x_1 y_1^{m-1} + \binom{m}{2} x_2^{m-2} y_2^2 x_1^2 y_1^{m-2} F + \dots + (-1)^m y_2^m x_1^m F = \\ = (x_2 y_1 - y_2 x_1)^m F = \Delta^m F.$$

Отже, всі $G^{(m)} \in k[\Delta, Z, U][\frac{1}{x_1}, \frac{1}{y_1}] \cap k[X, Y]$, тому і $G \in k[\Delta, Z, U][\frac{1}{x_1}, \frac{1}{y_1}] \cap k[X, Y]$.

(ii). Доводиться аналогічно до пункту (ii) теореми 1. $\square$

Якщо ж $n_1 > 2$ і $n_2 = 2$, то, міркуючи подібно. отримуємо, що

$$k[X,Y]^D = k[Z,\Delta,y_1][\tfrac{1}{x_1}] \cap k[X,Y], \text{ і } k(X,Y)^D = k(Z,\Delta,y_1).$$

3. Розглянемо загальний випадок. Диференціювання D кільця $k[X]$ називається *узагальненим диференціюванням Вейтценбека,* якщо його матриця в деякому базисі векторного k-простору $X\colon = \langle x_1, x_2, \dots x_n\rangle$ є сумою жорданових кліток

$$J_{n_1}(0) \oplus J_{n_2}(0) \oplus \cdots \oplus J_{n_s}(0).$$

Без втрати загальності будемо вважати, що базис $\langle x_1, x_2, \dots x_n\rangle$ вже є канонічним базисом. У цьому випадку простір X є прямою сумою відповідних вагових підпросторів X_i $X = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_s$, $\dim X_i = n_i, n_i \geq n_{i+1}, \sum_i n_i = n$, причому обмеження $D_{|X_i}$ на кожен з цих підпросторів є, очевидно, звичайним диференціюванням Вейтценбека. Цей факт ми будемо позначати так

$$D\colon = d_{n_1} \oplus d_{n_2} \oplus \cdots \oplus d_{n_s},$$

тут d_{n_i}— диференціювання Вейтценбека, матриця якого в векторному просторі X_i є жордановою кліткою $J_{n_i}(0)$. Набір $T_D\colon = [n_1, n_2, \dots, n_s]$, $n_i \geq n_{i+1}$ будемо називати типом узагальненого диференціювання Вейтценбека.

Перенумеровуванням змінних можна досягти того, що $x_i \in X_i$, і $D(x_i) = 0$, $i = 1 \dots s$. Якщо всі $n_i = 1$, то, очевидно, що для такого диференціювання $k[X]^D = k[X]$, і $k(X)^D = k(X)$. Будемо вважати, що не всі $n_i \leq 1$. Тому існує такий максимальний номер s_0, для якого $n_{s_0} \geq 2$, зокрема $n_1 \geq 2$. В кожному підпросторі X_i, $i \leq s_0$ виберемо елемент $y_i \in X$, такий, що $D(y_i) = x_i$ і покладемо $\Delta_i\colon = y_1 x_i - x_1 y_i$, $\Delta\colon = \{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{s_0}\}$.

Для кожного диференціювання d_{n_i}, $n_i > 2$, подібно до того, як це було зроблено для звичайного диференціювання Вейтценбека, визначимо елементи ядра $z_m^{(i)} \in k[X]^D$, $m = 2, \dots, n_i - 1$. Введемо позначення

$$Z\colon = \bigcup_i Z_i,\ Z_i\colon = \left\{ \begin{array}{l} \{x_i, z_2^{(i)}, \dots, z_{n_i-1}^{(i)}\}, \text{якщо } n_i \geq 3, \\ \{x_i\}, \text{якщо } n_i \leq 2. \end{array} \right. , \quad i \in \{1, \dots s\},$$

$$X_0^{-1}\colon = \left\{\tfrac{1}{x_1}, \tfrac{1}{x_2}, \dots, \tfrac{1}{x_{s_1}}\right\};$$

тут s_1 такий максимальний номер, для якого $n_{s_1} \geq 3$. Аналогічно до теореми 2 доводиться така теорема.

Теорема 3. *Для узагальненого диференціювання Вейтценбека кільця $k[X]$ правильні твердження: (i) Якщо $T_D = [1,1,\dots,1]$, то $k[X]^D = k[X]$, і $k(X)^D = k(X)$.*
(ii) Якщо $T_D = [m,1,\dots,1]$, то $k[X]^D = k[Z_1, x_2, \dots, x_{n-m+1}][\frac{1}{x_1}] \cap k[X]$,
$k(X)^D = k(Z_1, x_2, \dots, x_{n-m+1})$.
(iii) В інших випадках — $k[X]^D = k[Z,\Delta][X_0^{-1}] \cap k[X]$, $k(X)^D = k(Z,\Delta)$.

Автор вдячний І. Аржанцеву та В. Бавулі за корисні обговорення результатів статті.

ЛІТЕРАТУРА

1. Nowicki A. Polynomial derivation and their Ring of Constants, UMK, Torun,1994.
2. van den Essen A. Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture, Progress in Mathematics, **190**, Basel, 2000.
3. Freudenburg G. *A survey of counterexamples to Hilbert's fourteenth problem*// Serdica Math. J. — 2001. — P.171–192.

4. Bedratyuk L. *On complete system of invariants for the binary form of degree 7*// J. Symb. Comput. — 2007. — V.42. — P.935-947.
5. Бедратюк Л.П. *Елементи Казиміра диференціювань кільця многочленів*// Математичні студії. — 2007. — Т.27, №2. — С.115–119.
6. Daigle D., Freudenburg G. *A conterexample to Hilbert's fourtheenth problem in dimension five*// J. of Algebra. — 1999. — V.221. — V.528–535.
7. Weitzenböck R. *Über die Invarianten von linearen Gruppen*// Acta Math. — 1932. — Bd.58. — S.231–293.
8. Roberts M. *The covariants of a binary quantic of the n-th degree*// Quarterly J. Math. — 1861. — V.4. — P.168–178.
9. Hilbert D. Theory of algebraic invariants. — Cambridge University Press, 1993.
10. Gordan P. Invariantentheorie. — Teubner, Leipzig, 1885-87; reprinted by Chelsea Publ. Co., 1987.
11. von Gall F. *Das vollständige Formensystem der binären Form achter Ordnung*// Math. Annalen. — 1880. — Bd.17. — S.31–51; S.139–152.
12. Cerezo A. *Tables des invariants algébriques et rationnels d'une matrice nilpotente de petite dimension*/ Prépublications Mathématiques, Université de Nice, **146**, 1987.
13. Tan L. *An algorithm for explicit generators of the invariants of the basis G_a-action*// Comm. in Algebra. — 1989. — V.17. — P.565–572.
14. van den Essen A. *An algorithm to compute the invariant ring of a G_a-action on an affine variety*// J. Symbolic Computation. — 1993. — V.16. — P.551–555.
15. Glenn O. Treatise on theory of invariants. — Boston, 1915.
16. Newstead P. *Invariants of pencils of binary cubics*// Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1981. — V.89. — P.201–209.

Хмельницький національний університет
bedratyuk@ief.tup.km.ua, leonid.uk@gmail.com

Надійшло 30.05.2006