УДК 517.9

В. Ю. Слюсарчук

НЕЛІНІЙНІ НЕАВТОНОМНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ОБМЕЖЕНИМИ РОЗВ'ЯЗКАМИ

V. Yu. Slyusarchuk. *Nonlinear nonautonomous differential equations with bounded solutions*, Matematychni Studii, **29** (2008) 89–96.

We obtain a statement on bounded solutions of nonlinear differential equations.

В. Ю. Слюсарчук. *Нелинейные неавтономные дифференциальные уравнения с ограниченными решениями* // Математичні Студії. – 2008. – Т.29, №1. – С.89–96.

Доказано утверждение об ограниченных решениях нелинейных дифференциальных уравнений.

Нехай $\mathbb{R}$ — множина всіх дійсних чисел і E — дійсний повний скінченновимірний евклідовий простір зі скалярним добутком (x, y). Норма в E визначається за допомогою рівності $\|x\|_E = \sqrt{(x,x)}$. Через $C^0(\mathbb{R}, E)$ позначимо банахів простір неперервних і обмежених на $\mathbb{R}$ функцій $x = x(t)$ зі значеннями в E з нормою $\|x\|_{C^0(\mathbb{R},E)} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|_E$, а через $C^1(\mathbb{R}, E)$ — банахів простір функцій $x \in C^0(\mathbb{R}, E)$, похідна кожної з яких є елементом простору $\in C^0(\mathbb{R}, E)$, з нормою $\|x\|_{C^1(\mathbb{R},E)} = \max\left\{\|x\|_{C^0(\mathbb{R},E)}, \left\|\frac{dx}{dt}\right\|_{C^0(\mathbb{R},E)}\right\}$.

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} + f(t, x(t)) = h(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

де $f\colon \mathbb{R} \times E \longrightarrow E$ — неперервний оператор і $h \in C^0(\mathbb{R}, E)$.

Метою цієї статті є встановлення умов існування обмежених розв'язків рівняння (1).

Зазначимо, що умови існування обмежених розв'язків систем нелінійних диференціальних рівнянь з'ясовувалися в багатьох роботах (див., наприклад [1]–[6]).

1. Умови A**,** B**,** C **і** D**.** Використовуватимемо наступні умови.

Умова A. Для кожної обмеженої множини $M \subset E$ $\sup\limits_{(t,x)\in\mathbb{R}\times M} \|f(t,x)\|_E < +\infty$.

Умова B. Для деякого числа $\gamma \ge 1$ і всіх $(t, x) \in \mathbb{R} \times E$ справджується нерівність

$$\sup\{|(f(s,x),x)|\colon\ s \in \mathbb{R}\} \le \gamma|(f(t,x),x)|.$$

Умова C. Справджується співвідношення

$$\varliminf_{\|x\|_E\to+\infty} \inf\{(f(t,x),x)/\|x\|_E\colon\ t \in \mathbb{R}\} = +\infty \tag{2}$$

або

$$\varlimsup_{\|x\|_E\to+\infty} \sup\{(f(t,x),x)/\|x\|_E\colon\ t \in \mathbb{R}\} = -\infty. \tag{3}$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 57N20.

Умова D. Справджується нерівність

$$\inf\{|(f(t,x_1)-f(t,x_2),x_1-x_2)|\colon\ t\in\mathbb{R}\}>0,$$

якщо $x_1\neq x_2$, і функції $F_t(x)=f(t,x)$, $t\in\mathbb{R}$, змінної x рівностепенево неперервні в кожній обмеженій області $G\subset E$, тобто для кожного $\varepsilon>0$ існує таке $\delta>0$, що

$$\|F_t(x_1)-F_t(x_2)\|_E<\varepsilon$$

для всіх x_1 *і* x_2 з G таких, що $\|x_1-x_2\|_E<\delta$, і для всіх $t\in\mathbb{R}$.

Зауваження 1. У випадку виконання умов A і C існує таке число $\nu>0$, що справджуватиметься співвідношення $(f(t,x),x)(f(s,y),y)>0$ для всіх $t,s\in\mathbb{R}$ і $x,y\in E$, для яких $\min\{\|x\|_E,\|y\|_E\}\geq\nu$.

2. Формулювання основних теорем. Вважатимемо, що виконуються умови A і C. Для кожного числа $a\geq 0$ розглянемо множину

$$\Omega_a(f)=\big\{x\in E\colon\ \sup\{|(f(t,x),x)|\colon\ t\in\mathbb{R}\}\leq a\|x\|_E\big\}.$$

Завдяки умовам A і C для кожного $a\geq 0$ множина $\Omega_a(f)$ є непорожною і обмеженою. Тому для $a\geq 0$ можна розглянути величину $\omega_a(f)=\sup\{|x\|_E\colon\ x\in\Omega_a(f)\}$. Очевидно, що $\omega_a(f)<+\infty$ для кожного $a\geq 0$.

Основними у цій статті є такі дві теореми.

Теорема 1. *Нехай: (I) виконуються умови A, B і C; (II) $h\in C^0(\mathbb{R},E)$. Тоді рівняння (1) має хоча б один розв'язок $y\in C^1(\mathbb{R},E)$, для якого*

$$\|y\|_{C^0(\mathbb{R},E)}\leq\max\big\{\nu,\ \omega_{\gamma\|h\|_{C^0(\mathbb{R},E)}}(f)\big\},\tag{4}$$

$$\Big\|\frac{dy}{dt}\Big\|_{C^0(\mathbb{R},E)}\leq\sup\Big\{\|f(t,x)\|_E\colon\ t\in\mathbb{R},\ \|x\|_E\leq\max\big\{\nu,\ \omega_{\gamma\|h\|_{C^0(\mathbb{R},E)}}(f)\big\}\Big\}+\|h\|_{C^0(\mathbb{R},E)}.\tag{5}$$

Тут і далі ν — число, розглянуте в зауваженні 1.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови A, B, C і D. Тоді для кожного $h\in C^0(\mathbb{R},E)$ рівняння (1) має єдиний розв'язок $y\in C^1(\mathbb{R},E)$.*

3. Періодична апроксимація рівняння (1). Зафіксуємо довільне число $T>1$. Позначимо через $\mathcal{P}_T(\mathbb{R},E)$ банахів простір всіх T-періодичних елементів простору $C^0(\mathbb{R},E)$ з нормою $\|\cdot\|_{C^0(\mathbb{R},E)}$. Визначимо неперервне відображення $f_T\colon\mathbb{R}\times E\longrightarrow E$, для якого

$$f_T(t,x)=\begin{cases} f(t,x), & \text{для } (t,x)\in[-T,T-1]\times E,\\ (T-t)f(T-1,x)+(1+t-T)f(-T,x), & \text{для } (t,x)\in(T-1,T]\times E,\end{cases}\tag{6}$$

$$(\forall\ (t,x)\in\mathbb{R}\times E)\colon\quad f_T(t,x)=f_T(t+2T,x).\tag{7}$$

Розглянемо допоміжне диференціальне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt}+f_T(t,x(t))=h(t),\ t\in\mathbb{R}.\tag{8}$$

Теорема 3. *Нехай*: (I) *виконуються умови A, B і C*; (II) $h\in\mathcal{P}_{2T}(\mathbb{R},E)$. *Тоді диференціальне рівняння* (8) *має розв'язок $y\in C^1(\mathbb{R},E)\cap\mathcal{P}_{2T}(\mathbb{R},E)$, для якого*

$$\|y\|_{C^0(\mathbb{R},E)}\leq\max\big\{\nu,\ \omega_{\gamma\|h\|_{C^0(\mathbb{R},E)}}(f)\big\}.$$

Доведення. Спочатку розглянемо випадок, коли виконується співвідношення (2). Виберемо довільні числа числа M_1 і M_2 такі, що $M_2 > M_1 > \max\left\{\nu,\ \omega_{\gamma\|h\|_{C^0(\mathbb{R},E)}}(f), 1\right\}$ і

$$\inf_{t\in[-T,T]}(f_T(t,x),x) > \|h\|_{C^0(\mathbb{R},E)}\|x\|_E, \tag{9}$$

якщо $\|x\|_E \geq M_1$ (співвідношення (9) виконується завдяки умовам A і C та (6)).

Використаємо неперервний оператор $g\colon \mathbb{R}\times E \longrightarrow E$, що визначається рівністю

$$g(t,x) = \begin{cases} f_T(t,x), & \text{якщо } t\in\mathbb{R},\ \|x\|_E \leq M_1,\\ F(t,x), & \text{якщо } t\in\mathbb{R},\ M_1 < \|x\|_E \leq M_2,\\ kx, & \text{якщо } t\in\mathbb{R},\ \|x\|_E > M_2,\end{cases} \tag{10}$$

де

$$F(t,x) = \frac{M_2 - \|x\|_E}{M_2 - M_1} f_T\left(t, \frac{M_1}{\|x\|_E}x\right) + \frac{\|x\|_E - M_1}{M_2 - M_1}\left(\frac{M_2 k}{\|x\|_E}x\right), \tag{11}$$

$$k = \|h\|_{C^0(\mathbb{R},E)} + 1, \tag{12}$$

а також диференціальне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} + g(t,x(t)) = h(t),\ t\in\mathbb{R}. \tag{13}$$

Легко перевірити, що рівняння (13) рівносильне до інтегрального рівняння

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-k(t-s)}(kx(s) - g(s,x(s)) + h(s))ds. \tag{14}$$

Розглянемо оператор $(\mathfrak{B}y)(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} e^{-k(t-s)}(ky(s) - g(s,y(s)) + h(s))ds,\ t\in\mathbb{R}$, що діє з $C^0(\mathbb{R},E)\cap\mathcal{P}_{2T}(\mathbb{R},E)$ в $C^1(\mathbb{R},E)\cap\mathcal{P}_{2T}(\mathbb{R},E)$, оскільки на підставі (7) $g(t,x) = g(t+2T,x)$ для всіх $(t,x)\in\mathbb{R}\times E$. Розглянемо також опуклу обмежену замкнену множину

$$B_R = \{x\in\mathcal{P}_{2T}(\mathbb{R},E)\colon \|x\|_{C^0(\mathbb{R},E)} \leq R\}, \text{ де } R = \sup_{t\in[-T,T],\ x\in E}\|kx - g(t,x)\|_E + \|h\|_{C^0(\mathbb{R},E)}.$$

Множина B_R обмежена, оскільки $kx - g(t,x) = 0$, якщо $\|x\|_E \geq M_2$, і завдяки умові A та (10)

$$\sup_{t\in\mathbb{R},\ \|x\|_E<M_2}\|kx - g(t,x)\|_E < +\infty.$$

Оператор $\mathfrak{B}$ має *властивості*: (1) оператор неперервний; (2) $\mathfrak{B}B_R \subset B_R\cap C^1(\mathbb{R},E)$; (3) множина $\mathfrak{B}B_R$ передкомпактна в просторі $\mathcal{P}_T(\mathbb{R},E)$ (завдяки скінченній розмірності простору E та лемі Арцела–Асколі [7]).

Завдяки теоремі Шаудера про нерухому точку ([9],[10]), оператор $\mathfrak{B}$ має нерухому точку $y^*\in B_R$. Ця точка є розв'язком рівнянь (14) і (13).

Якщо $\|y^*\|_{C^0(\mathbb{R},E)} \leq \nu$, то твердження теореми справджується.

Припустимо, що

$$\nu < \|y^*\|_{C^0(\mathbb{R},E)} \leq M_1. \tag{15}$$

Тоді завдяки (10) $g(t,y^*(t)) \equiv f_T(t,y^*(t))$ і тому функція $y^* = y^*(t)$ є розв'язком диференціального рівняння (8), тобто $\dfrac{dy^*(t)}{dt} + f_T(t,y^*(t)) \equiv h(t)$. Тому

$$\left(\tfrac{d}{dt}y^*(t), y^*(t)\right) + (f_T(t,y^*(t)), y^*(t)) \equiv (h(t), y^*(t))$$

і, отже,

$$\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}(y^*(t), y^*(t)) + (f_T(t, y^*(t)), y^*(t)) \equiv (h(t), y^*(t)).$$

Завдяки $2T$-періодичності функції $(y^*(t), y^*(t))$, існує точка $t^* \in [-T, T]$, в якій ця функція досягає найбільшого значення. Тоді з диференційовності функції $(y^*(t), y^*(t))$ випливає, що $\frac{d}{dt}(y^*(t), y^*(t))\big|_{t=t^*} = 0$. Тому

$$(f_T(t^*, y^*(t^*)), y^*(t^*)) = (h(t^*), y^*(t^*)). \tag{16}$$

З (16) та нерівності Коші–Буняковського [7] у випадку $t^* \in [-T, T-1]$ маємо

$$\sup\{|(f(t, y^*(t^*)), y^*(t^*))|:\ t \in \mathbb{R}\} \le \gamma|(f(t^*, y^*(t^*)), y^*(t^*))| = \gamma|(f_T(t^*, y^*(t^*)), y^*(t^*))| =$$
$$= \gamma(h(t^*), y^*(t^*))| \le \gamma\|h\|_{C^0(\mathbb{R},E)}\|y^*(t^*)\|_E,$$

а у випадку $t^* \in (T-1, T]$

$$\gamma^{-1}|(f(t^*, y^*(t^*)), y^*(t^*))| \le \gamma^{-1}\sup\{|(f(s, y^*(t^*)), y^*(t^*))|:\ s \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \gamma^{-1}[(T - t^*)\sup_{s\in\mathbb{R}}|(f(s, y^*(t^*)), y^*(t^*))| + (1 + t^* - T)\sup_{s\in\mathbb{R}}|(f(s, y^*(t^*)), y^*(t^*))|] \le$$
$$\le (T - t^*)|(f(t^*, y^*(t^*)), y^*(t^*))| + (1 + t^* - T)|(f(t^*, y^*(t^*)), y^*(t^*))| =$$
$$= |(T - t^*)(f(t^*, y^*(t^*)), y^*(t^*)) + (1 + t^* - T)(f(t^*, y^*(t^*)), y^*(t^*))| = |(h(t^*), y^*(t^*))| \le$$
$$\le \|h\|_{C^0(\mathbb{R},E)}\|y^*(t^*)\|_E.$$

Звідси випливає нерівність

$$\|y^*\|_{C^0(\mathbb{R},E)} \le \omega_{\gamma\|h\|_{C^0(\mathbb{R},E)}}(f). \tag{17}$$

Отже, якщо справджується нерівність (15), то справджується нерівність (17).

Припустимо, що

$$M_1 < \|y^*\|_{C^0(\mathbb{R},E)} \le M_2. \tag{18}$$

Тоді існує точка $t^* \in [-T, T]$, в якій функція $\|y^*(t)\|_E$ досягає найбільшого значення. Тому

$$M_1 < \|y^*(t^*)\|_E \le M_2, \tag{19}$$

$g(t^*, y(t^*)) = F(t^*, y(t^*))$ завдяки (10), $\frac{d}{dt}(y^*(t), y^*(t))\big|_{t=t^*} = 0$ і, отже, справджується рівність

$$(F(t^*, y^*(t^*)), y^*(t^*)) = (h(t^*), y^*(t^*)), \tag{20}$$

подібна до (16). На підставі (11) рівність (20) подається у вигляді

$$\frac{M_2 - \|y^*(t^*)\|_E}{M_2 - M_1}\left(f_T\left(t, \frac{M_1}{\|y^*(t^*)\|_E}\, y^*(t^*)\right), y^*(t^*)\right) +$$
$$+\frac{\|y^*(t^*)\|_E - M_1}{M_2 - M_1}\left(\frac{M_2 k}{\|y^*(t^*)\|_E}\,(y^*(t^*), y^*(t^*))\right) = (h(t^*), y^*(t^*)). \tag{21}$$

Оскільки $(y^*(t^*), y^*(t^*)) = \|y^*(t^*)\|_E^2$,

$$\big(f_T\big(t, \frac{M_1}{\|y^*(t^*)\|_E}\, y^*(t^*)\big), y^*(t^*)\big) = \big(f_T\big(t, \frac{M_1}{\|y^*(t^*)\|_E}\, y^*(t^*)\big), \frac{\|y^*(t^*)\|_E}{M_1}\, \frac{M_1}{\|y^*(t^*)\|_E}\, y^*(t^*)\big) =$$

$$= \frac{\|y^*(t^*)\|_E}{M_1}\big(f_T\big(t, \frac{M_1}{\|y^*(t^*)\|_E}\, y^*(t^*)\big), \frac{M_1}{\|y^*(t^*)\|_E}\, y^*(t^*)\big) \geq$$
$$\geq \big(f_T\big(t, \frac{M_1}{\|y^*(t^*)\|_E}\, y^*(t^*)\big), \frac{M_1}{\|y^*(t^*)\|_E}\, y^*(t^*)\big) > \|h\|_{C^0(\mathbb{R},E)} M_1 \geq \|h\|_{C^0(\mathbb{R},E)}\|y^*(t^*)\|_E$$

завдяки (9) і (19) (зауважимо, що функція $h = h(t)$ може бути нульовою), а також $k > \|h\|_{C^0(\mathbb{R},E)}$ завдяки (12), $\dfrac{M_2 - \|y^*(t^*)\|_E}{M_2 - M_1} > 0$ і $\dfrac{\|y^*(t^*)\|_E - M_1}{M_2 - M_1} \geq 0$, то

$$\frac{M_2 - \|y^*(t^*)\|_E}{M_2 - M_1}\big(f_T\big(t, \frac{M_1}{\|y^*(t^*)\|_E}\, y^*(t^*)\big), y^*(t^*)\big) +$$
$$+\frac{\|y^*(t^*)\|_E - M_1}{M_2 - M_1}\big(\frac{M_2 k}{\|y^*(t^*)\|_E}\, (y^*(t^*), y^*(t^*))\big) > \frac{M_2 - \|y^*(t^*)\|_E}{M_2 - M_1}\|h\|_{C^0(\mathbb{R},E)}\|y^*(t^*)\|_E +$$
$$+\frac{\|y^*(t^*)\|_E - M_1}{M_2 - M_1}\|h\|_{C^0(\mathbb{R},E)}\|y^*(t^*)\|_E = \|h\|_{C^0(\mathbb{R},E)}\|y^*(t^*)\|_E.$$

На підставі нерівності Коші–Буняковського $(h(t^*), y^*(t^*)) \leq \|h\|_{C^0(\mathbb{R},E)}\|y^*(t^*)\|_E$. Останні два співвідношення суперечать рівності (21).

Отже, припущення, що виконується нерівність (18), є хибним.

Припустимо, що

$$\|y^*\|_{C^0(\mathbb{R},E)} > M_2. \tag{22}$$

Завдяки $2T$-періодичності функції $y^*(t)$ існує точка $t^* \in [-T, T]$, в якій функція $\|y^*(t)\|_E$ досягає найбільшого значення. Тому

$$\|y^*(t^*)\|_E > M_2 \tag{23}$$

і, отже, $\frac{d}{dt}(y^*(t), y^*(t))\big|_{t=t^*} = 0$. Тоді $(g(t^*, y^*(t^*)), y^*(t^*)) = (h(t^*), y^*(t^*))$ і на підставі (10) та (23)

$$(ky^*(t^*), y^*(t^*)) = (h(t^*), y^*(t^*)). \tag{24}$$

Зазначимо, що $(ky^*(t^*), y^*(t^*)) = k\|y^*(t^*)\|_E^2 > \|h\|_{C^0(\mathbb{R},E)} M_2 \|y^*(t^*)\|_E$ (тут використано (12) і (23)) і $(h(t^*), y^*(t^*)) \leq \|h\|_{C^0(\mathbb{R},E)}\|y^*(t^*)\|_E$ (тут використано нерівність Коші-Буняковського). Ці співвідношення суперечать рівності (24).

Отже, припущення, що виконується нерівність (22), є хибним і справджується нерівність $\|y^*\|_{C^0(\mathbb{R},E)} \leq \max\big\{\nu,\ \omega_{\gamma\|h\|_{C^0(\mathbb{R},E)}}(f)\big\}$. Тому $g(y^*(t)) \equiv f_T(y^*(t))$, і розв'язок y^* рівняння (13) також є розв'язком рівняння (8).

Теорему у випадку, коли виконується співвідношення (2), доведено.

Випадок, коли виконується співвідношення (3), заміною t на $-t$ зводиться до розглянутого випадку. □

4. Локально збіжні послідовності неперервних функцій. Говоритимемо, що *послідовність функцій* $x_k \in C^0(\mathbb{R}, E)$, $k \in \mathbb{N}$, *локально збігається* до функції $x \in C^0(\mathbb{R}, E)$ при $k \to +\infty$ і позначатимемо

$$x_k \xrightarrow{\text{лок.},\ C^0(\mathbb{R},E)} x \text{ при } k \to +\infty,$$

якщо ця послідовність обмежена і $\lim\limits_{k\to+\infty} \max_{|t|\leq p} \|x_k(t) - x(t)\|_E = 0$ для кожного $p \in \mathbb{N}$.

Подібно *послідовність функцій* $x_k \in C^1(\mathbb{R}, E)$, $k \in \mathbb{N}$, *локально збігається* до функції $x \in C^1(\mathbb{R}, E)$ при $k \to +\infty$:

$$x_k \xrightarrow{\text{лок.},\ C^1(\mathbb{R},E)} x \text{ при } k \to +\infty,$$

якщо $\sup\{\|x_k\|_{C^1(\mathbb{R},E)}:\ k \geq 1\} < +\infty$ і для кожного $p \in \mathbb{N}$

$$\lim_{k\to+\infty}\max_{|t|\le p}\left(\|x_k(t)-x(t)\|_E+\left\|\frac{dx_k(t)}{dt}-\frac{dx(t)}{dt}\right\|_E\right)=0.$$

Розглянемо в просторах $C^0(\mathbb{R},E)$ і $C^1(\mathbb{R},E)$ замкнені кулі

$$S_r^i=\{x\colon \|x\|_{C^i(\mathbb{R},E)}\le r\},\ i\in\{0;1\}.$$

Важливою для подальшого є

Лема 1. *Для кожної послідовності функцій $x_n\in S_r^0\cap S_R^1$, $n\in\mathbb{N}$, де r і R — довільні додатні числа, існують строго зростаюча послідовність натуральних чисел n_k, $k\in\mathbb{N}$, і функція $x\in S_r^0$ такі, що $x_{n_k}\xrightarrow{\text{лок., } C^0(\mathbb{R},E)}x$ при $k\to+\infty$.*

Доведення. З умов леми випливає, що функції $x_n=x_n(t)$, $n\in\mathbb{N}$, рівномірно обмежені і рівностепенево неперервні на $\mathbb{R}$. Тому на підставі теореми Арцела–Асколі ([7]) та скінченної розмірності простору E існують такі підпослідовності $\{x_{n_{1,1}},x_{n_{1,2}},\dots,x_{n_{1,p}},\dots\}$, $\{x_{n_{2,1}},x_{n_{2,2}},\dots,x_{n_{2,p}},\dots\}$, $\dots$ $\{x_{n_{m,1}},x_{n_{m,2}},\dots,x_{n_{m,p}},\dots\}$, $\dots$ послідовності x_n, $n\in\mathbb{N}$, що: (1) послідовності чисел $n_{l,p}$, $p\in\mathbb{N}$, є строго зростаючими для кожного $l\in\mathbb{N}$ і $\{n_{1,p}\colon p\in\mathbb{N}\}\supset\{n_{2,p}\colon p\in\mathbb{N}\}\supset\ldots\supset\{n_{m,p}\colon p\in\mathbb{N}\}\supset\ldots$;
(2) для кожного $m\in\mathbb{N}$ послідовність $x_{n_{m,p}}(t), p\in\mathbb{N}$, є рівномірно збіжною на $[-m,m]$.

Тоді діагональна послідовність $x_{n_{1,1}},x_{n_{2,2}},\dots,x_{n_{p,p}},\dots$ є рівномірно збіжною на кожному відрізку $[a,b]\subset\mathbb{R}$ і, тому, функція $x(t)=\lim_{p\to\infty}x_{n_{p,p}}(t)$, $t\in\mathbb{R}$, неперервна і, очевидно, $x\in S_r^0$. Звідси випливає, що $x_{n_{p,p}}\xrightarrow{\text{лок., } C^0(\mathbb{R},E)}x$ при $p\to+\infty$.
Лему 1 доведено. □

Зазначимо, що у випадку $E=\mathbb{R}$ лему 1 наведено в [8].

5. Обгрунтування основних теорем.

Доведення теореми 1. Нехай $(T_n)_{n\ge1}$ — довільна строго зростаюча до $+\infty$ послідовність додатних чисел.Виберемо такі елементи $h_n\in\mathcal{P}_{T_n}(\mathbb{R},E)$, $n\in\mathbb{N}$, що

$$\|h_n\|_{C^0(\mathbb{R},E)}\le\|h\|_{C^0(\mathbb{R},E)},\tag{25}$$

$$h_n\xrightarrow{\text{лок., } C^0(\mathbb{R},E)}h \text{ при } n\to+\infty.\tag{26}$$

Елементи з такими властивостями існують завдяки другій умові теореми. На підставі нерівності (25), першої умови теореми та твердження теореми 3, існують такі функції $y_n\in\mathcal{P}_{T_n}(\mathbb{R},E)$, $n\in\mathbb{N}$, що

$$\frac{dy_n(t)}{dt}+f_{T_n}(t,y_n(t))=h_n(t),\ t\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N},\tag{27}$$

$$\|y_n\|_{C^0(\mathbb{R},E)}\le\max\left\{\nu,\ \omega_{\gamma\|h\|_{C^0(\mathbb{R},E)}}(f)\right\},\ n\in\mathbb{N},\tag{28}$$

З умови A, нерівностей $\sup\limits_{(t,x)\in\mathbb{R}\times M}\|f_{T_n}(t,x)\|_E\le\sup\limits_{(t,x)\in\mathbb{R}\times M}\|f(t,x)\|_E$, $n\in\mathbb{N}$, що випливають із означення відображення f_{T_n}, та співвідношень (25), (27) і (28), отримуємо $\sup\limits_{t\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}}\left|\frac{dy_n(t)}{dt}\right|<+\infty$. Тому за лемою 1 (тут враховано також співвідношення (28)) для деякої строго зростаючої послідовності $(n_k)_{k\ge1}$ натуральних чисел та елемента $y\in C^0(\mathbb{R},E)$

$$y_{n_k}\xrightarrow{\text{лок., } C^0(\mathbb{R},E)}y \text{ при } k\to+\infty.\tag{29}$$

Використаємо співвідношення $y_{n_k}(t) - y_{n_k}(0) + \int_0^t f_{T_{n_k}}(s, y_{n_k}(s))ds = \int_0^t h_{n_k}(s)ds,\ t \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}$, що випливають з (27). На підставі (26), (29), (6) та неперервності оператора f, для кожного $t \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{k\to\infty} \left\| \big(y_{n_k}(t) - y_{n_k}(0)\big) - (y(t) - y(0)) \right\|_E = 0$,

$\lim\limits_{k\to\infty} \left\| \int\limits_0^t f_{T_{n_k}}\big(s, y_{n_k}(s)\big)ds - \int\limits_0^t f\big(s, y(s)\big)ds \right\|_E = 0$ і $\lim\limits_{k\to\infty} \left\| \int\limits_0^t h_{n_k}(s)ds - \int\limits_0^t h(s)ds \right\|_E = 0.$

Тому

$$y(t) - y(0) + \int\limits_0^t f(s, y(s))ds = \int\limits_0^t h(s)ds,\ t \in \mathbb{R}. \tag{30}$$

Функції $\int_0^t f(s, y(s))ds$ і $\int_0^t h(s)ds$ є диференційовними, оскільки підінтегральні функції неперервні. Тому таку ж властивість має функція $y(t)$, і на підставі (30)

$$\frac{dy(t)}{dt} + f(t, y(t)) = h(t),\ t \in \mathbb{R}. \tag{31}$$

Звідси, з обмеженості та неперервності функцій $f(t, y(t))$ і $h(t)$ випливає, що $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \left| \frac{dy(t)}{dt} \right| < +\infty$ і $y \in C^1(\mathbb{R}, E)$. Нерівність (4) випливає з (28) і (29), а нерівність (5) випливає із (4) і (31). Теорему 1 доведено. $\square$

Зауваження 2. Теорема 1 не є наслідком відповідних результатів про обмежені розв'язки диференціальних рівнянь із монотонними нелінійностями [1]. Відображення f, що задовольняє умову C, може не належати ні класу монотонних відображень, ні класу дисипативних відображень.

При доведенні теореми 2 використовуватимемо наступні два допоміжні твердження.

Лема 2. *Нехай*: (I) *оператор* $f\colon \mathbb{R} \times E \longrightarrow E$ *неперервний*; (II) *справджується нерівність*

$$\inf\{(f(t, x_1) - f(t, x_2), x_1 - x_2)\colon\ t \in \mathbb{R}\} > 0, \tag{32}$$

якщо $x_1 \neq x_2$, *і функції* $F_t(x) = f(t, x)$, $t \in \mathbb{R}$, *змінної* x *рівностепенево неперервні в кожній обмеженій області* $G \subset E$.

Тоді для довільних чисел $r > 0$ *і* $R > 0$ $(r < R)$ *існує таке число* $\varepsilon > 0$, *що*

$$\inf\{(f(t, x_1) - f(t, x_2), x_1 - x_2)\colon\ t \in \mathbb{R},\ r \le \|x_1 - x_2\|_E,\ \|x_1\|_E \le R, \|x_2\|_E \le R\} \ge \varepsilon.$$

Доведення. Припустимо, що твердження леми хибне. Існують послідовності $(t_n)_{n\ge1}$, $(u_n)_{n\ge1}$ і $(v_n)_{n\ge1}$, для яких $\|u_n\|_E \le R$, $\|v_n\|_E \le R$, $\|u_n - v_n\|_E \ge r$ $(n \ge 1)$, і

$$\lim_{n\to+\infty} (f(t_n, u_n) - f(t_n, v_n), u_n - v_n) = 0. \tag{33}$$

Завдяки скінченній розмірності простору E та обмеженості послідовностей $(u_n)_{n\ge1}$ і $(v_n)_{n\ge1}$ існують строго зростаюча послідовність $(n_k)_{k\ge1}$ натуральних чисел та вектори $u, v \in E$, для яких $\|u\|_E \le R$, $\|v\|_E \le R$, $\|u - v\|_E \ge r$ і

$$\|u\|_E \le R,\ \|v\|_E \le R,\ \|u - v\|_E \ge r\ \lim_{k\to+\infty} u_{n_k} = u,\ \lim_{k\to+\infty} v_{n_k} = v. \tag{34}$$

Тому на підставі співвідношень (33) і (34) та одностайної неперервності функцій $F_t(x) = f(t, x)$, $t \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (f(t_n, u) - f(t_n, v), u - v) = 0$, в кожній обмеженій області $G \subset E$, що суперечить (32). Лему 2 доведено. $\square$

Подібно встановлюється

Лема 3. *Нехай*: (I) *оператор* $f\colon \mathbb{R}\times E \longrightarrow E$ *неперервний*; (II) *справджується нерівність*

$$\sup\{(f(t,x_1)-f(t,x_2),x_1-x_2)\colon\ t\in\mathbb{R}\}<0,$$

якщо $x_1\neq x_2$, *і функції* $F_t(x)=f(t,x)$, $t\in\mathbb{R}$, *змінної* x *рівностепенево неперервні в кожній обмеженій області* $G\subset E$.
Тоді для довільних чисел $r>0$ *і* $R>0$ $(r<R)$ *існує таке число* $\varepsilon>0$, *що*

$$\sup\{(g(x_1)-g(x_2),x_1-x_2)\colon\ r\le\|x_1-x_2\|_E,\ \|x_1\|_E\le R,\ \|x_2\|_E\le R\}\le-\varepsilon.$$

Доведення теореми 2. Зазначимо, що завдяки теоремі 3 та першим трьом умовам теореми множина обмежених розв'язків рівняння (1) є непорожньою.

Припустимо, що функції $y_i,y_2\in C^1(\mathbb{R},E)$ є розв'язками рівняння (1) і

$$y_1\neq y_2. \tag{35}$$

Тоді $\frac{dy_1(t)}{dt}+f(t,y_1(t))\equiv\frac{dy_2(t)}{dt}+f(t,y_2(t))$ і, отже, $\frac{d(y_2(t)-y_1(t))}{dt}\equiv f(t,y_1(t))-f(t,y_2(t))$. Звідси випливає, що

$$\frac{d(y_2(t)-y_1(t),y_2(t)-y_1(t))}{dt}\equiv-2(f(t,y_2(t))-f(t,y_1(t)),y_2(t)-y_1(t)). \tag{36}$$

Виберемо довільну точку $t^*\in\mathbb{R}$, для якої

$$(y_2(t^*)-y_1(t^*),y_2(t^*)-y_1(t^*))>0. \tag{37}$$

Така точка існує на підставі (35). Жодна з таких точок не може бути для функції $(y_2(t)-y_1(t),y_2(t)-y_1(t))$ точкою екстремуму, бо тоді $\frac{d}{dt}(y_2(t)-y_1(t),y_2(t)-y_1(t))\big|_{t=t^*}=0$, і тому, на підставі (36), $(f(t,y_2(t^*))-f(t,y_1(t^*)),y_2(t^*)-y_1(t^*))=0$, що суперечить умові D. Отже, якщо справджується співвідношення (37), то $\frac{d}{dt}(y_2(t)-y_1(t),y_2(t)-y_1(t))\big|_{t=t^*}\neq 0$. Тому функція $(y_2(t)-y_1(t),y_2(t)-y_1(t))$ строго зростаюча на $[t^*,+\infty)$ або строго спадна на $(-\infty,t^*]$. Тоді у випадку строго зростання на $[t^*,+\infty)$

$$(\forall\ \ t>t^*)\colon\ (y_2(t)-y_1(t),y_2(t)-y_1(t))>(y_2(t^*)-y_1(t^*),y_2(t^*)-y_1(t^*))>0,$$

а у випадку строгого спадання на $(-\infty,t^*]$

$$(\forall\ \ t<t^*)\colon\ (y_2(t)-y_1(t),y_2(t)-y_1(t))>(y_2(t^*)-y_1(t^*),y_2(t^*)-y_1(t^*))>0.$$

Використаємо числа $R=\max\{\|y_1\|_E,\|y_2\|_E\}$ і $r=\|y_2(t^*)-y_1(t^*)\|_E$.
Якщо виконується перша з двох останніх нерівностей, то існує таке число $\varepsilon>0$ (на підставі леми 2), що справджуватиметься нерівність $-2(f(t,y_2(t))-f(t,y_1(t)),y_2(t)-y_1(t))\ge\varepsilon$ для всіх $t\ge t^*$. Тоді завдяки (36), $(y_2(t)-y_1(t),y_2(t)-y_1(t))\ge(y_2(t^*)-y_1(t^*),y_2(t^*)-y_1(t^*))+\varepsilon(t-t^*)$ для всіх $t\ge t^*$. Це співвідношення суперечить тому, що $\max\{\|y_1\|_{C^0(\mathbb{R},E)},\|y_2\|_{C^0(\mathbb{R},E)}\}<+\infty$.

До подібної суперечності приходимо і у випадку виконання другої нерівності (тут потрібно використовувати лему 3).

Теорему 2 доведено. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Трубников Ю. В., Перов А. И. Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями. – Минск: Наука и техника, 1986. – 200 с.
2. Перов А. И., Коструб И. Д. *Метод направляющих функций в задаче о нелинейных почти-периодически колебаниях*// Весник ВГУ, Серия физика, математика. – 2002. – №1. – С. 163–171.
3. Перов А. И. *Об ограниченных решениях нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений*// Весник ВГУ, Серия физика, математика. – 2003. – №1. – С. 165–168.
4. Jifeng Chu, Pedro J. Tarres, Meirong Zhang *Periodic solutions of second order non-autonomous singular dynamical systems*// Journal of Differential Equations. – 2007. – V.239 . – P. 196–212.
5. Слюсарчук В. Ю. *Нелінійні диференціальні рівняння з обмеженими на* $\mathbb{R}$ *розв'язками*// Нелінійні коливання. – 2008. – Т.11,№1. – С. 96–111.
6. Слюсарчук В. Е. *Слабо нелинейные возмущения нормально разрешимых функционально-дифференциальных и дискретных уравнений* // Укр. мат. журн. – 1987. – Т.39,№5. – С. 660–662.
7. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496 с.
8. Слюсарчук В. Е. *Необходимые и достаточные условия существования и единственности ограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений*// Нелінійні коливання. – 1999. – Т.2, №4. — С.523–539.
9. Schauder J. *Die Fixpunktsatz in Funktionalräume*// Studia Math. — 1930. — V. 2. — P.171–180.
10. Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу. – М.: Мир, 1977. – 232 с.

Національний університет водного господарства та природокористування,
м. Рівне

Надійшло 17.05.2006