УДК 517.51

В. Михайлюк

ПРО ПИТАННЯ, ПОВ'ЯЗАНІ З ПРОБЛЕМОЮ ТАЛАҐРАНА

V. Mykhaylyuk. *On questions connected with Talagrand's problem*, Matematychni Studii, **29** (2008) 81–88.

We prove the following results.
1. If X is a α-favourable space, Y is a regular space, in which every separable closed set is compact, and $f\colon X\times Y\to\mathbb{R}$ is a separately continuous everywhere jointly discontinuous function, then there exists a subspace $Y_0\subseteq Y$ which is homeomorphic to $\beta\mathbb{N}$.
2. There exist a α-favourable space X, a dense in $\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ countably compact space Y and a separately continuous everywhere jointly discontinuous function $f\colon X\times Y\to\mathbb{R}$.

In addition, it was obtained some conditions equivalent to the fact that the space $C_p(\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N},\{0,1\})$ of all continuous functions $x\colon\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}\to\{0,1\}$ with the topology of point wise convergence is a Baire space.

В. Мыхайлюк. *О вопросах, связанные с проблемой Талаграна* // Математичні Студії. – 2008. – Т.29, №1. – С.81–88.

Получены следующие результаты.
1. Если X — α-благоприятное пространство, Y — регулярное пространство, в котором каждое сепарабельное замкнутое подмножество есть компактным, и $f\colon X\times Y\to\mathbb{R}$ — непрерывная по каждой переменной в отдельности всюду разрывная по совокупности переменных функция, то существует подпространство $Y_0\subseteq Y$, которое гомеоморфно пространству $\beta\mathbb{N}$.
2. Существуют α-благоприятное пространство X, плотное в $\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ счетно компактное пространство Y и непрерывная по каждой переменной в отдельности всюду разрывная по совокупности переменных функция $f\colon X\times Y\to\mathbb{R}$.

Кроме этого, получены некоторые условия равносильные бэровости пространства $C_p(\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N},\{0,1\})$ всех непрерывных функций $x\colon\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}\to\{0,1\}$ с топологией точечной сходимости.

1. Дослідження множини точок сукупної неперервності нарізно неперервних функцій двох змінних беруть свій початок з класичної праці Р. Бера [1] і були продовжені в роботах багатьох математиків (Г. Гана, В. Серпінського, В. Морана, І. Наміоки, М. Талаґрана, В. Рудіна, В. Маслюченка та інших; дивись, наприклад, [2] і вказану там літературу). І. Наміока в [3] показав, що для довільних сильно зліченно повного простору X, компактного простору Y і нарізно неперервної функції $f\colon X\times Y\to\mathbb{R}$ існує щільна в X G_δ-множина $A\subseteq X$ така, що f сукупно неперервна в кожній точці множини $A\times Y$. Цей результат привів до інтенсифікації досліджень нарізно неперервних функцій на добутках берівського і компактного просторів. Зокрема, в [4] був наведений приклади α-сприятливого простору X, компактного простору Y і нарізно неперервної функції $f\colon X\times Y\to\mathbb{R}$ таких, що проекція на простір X множини $D(f)$ точок розриву функції

2000 *Mathematics Subject Classification:* 54C30, 54C35, 54D30, 54D80.

f збігається з усім простором X. У зв'язку з цим в [4, проблема 3] було поставлене наступне питання.

Питання 1.1. *Нехай X — берівський простір, Y — компактний простір і $f\colon X\times Y\to\mathbb{R}$ — нарізно неперервна функція. Чи обов'язково f неперервна хоча б в одній точці?*

У [5] показано, що дане питання має негативну відповідь, якщо умову на простір Y послабити до τ-компактності, де τ — довільний нескінченний кардинал (топологічний простір X називається *τ-компактним*, якщо з довільного відкритого покриття простору X, яке має потужність $\le\tau$, можна виділити скінченне підпокриття).

Зауважимо, що для довільного цілком регулярного простору Y і простору $X = C_p(Y,[0,1])$ неперервних функцій $x\colon Y\to[0,1]$ з топологією поточкової збіжності, чи для гаусдорфового простору Y з базою, яка складається з відкрито-замкнених множин, і простору $X = C_p(Y,\{0,1\})$ неперервних функцій $x\colon Y\to\{0,1\}$ з топологією поточкової збіжності нарізно неперервна функція $f\colon X\times Y\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x(y)$, є скрізь розривною. Тому у зв'язку з вищезгаданою проблемою Талаґрана природно виникає питання про дослідження беровості просторів $C_p(Y,[0,1])$ чи $C_p(Y,\{0,1\})$ для гаусдорфових компактних просторів Y.

У даній статті ми будемо досліджувати задачу про існування скрізь розривної нарізно неперервної функції, яка визначена на добутку α-сприятливого простору X і простору Y, що задовольняє умови типу компактності. Спочатку ми покажемо, що для регулярного простору Y, в якому кожна сепарабельна замкнена множина є компактною, з існування скрізь розривної функції $f\colon X\times Y\to\mathbb{R}$, яка квазінеперервна відносно першої змінної і неперервна відносно другої, де X — деякий α-сприятливий простір, випливає існування в просторі Y підпростору, гомеоморфного компактифікації Стоуна-Чеха $\beta\mathbb{N}$ простору $\mathbb{N}$. Далі ми побудуємо приклад скрізь розривної нарізно неперервної функції на добутку α-сприятливого простору X і зліченно компактного щільного підпростору простору $\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$. В останньому пункті ми встановимо деякі рівносильні переформулювання беровості простору неперервних функцій $x\colon\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}\to\{0,1\}$ з топологією поточкової збіжності.

2. Нехай X, Y, Z — довільні топологічні простори і $f\colon X\times Y\to Z$. Для довільних $x_0\in X$ і $y_0\in Y$ відображення $f^{x_0}\colon Y\to Z$ і $f_{y_0}\colon X\to Z$ означаються наступним чином:

$$f^{x_0}(y)=f(x_0,y)\quad \text{і}\quad f_{y_0}(x)=f(x,y_0)$$

для довільних $x\in X$ і $y\in Y$.

Відображення $f\colon X\to Y$, яке діє з топологічного простору X в топологічний простір Y називається *квазінеперервним в точці* $x_0\in X$, якщо для довільних околу U точки x_0 в просторі X і околу V точки $f(x_0)$ в просторі Y існує відкрита в X непорожня множина $U_1\subseteq U$ така, що $f(U_1)\subseteq V$. Відображення, квазінеперервне в кожній точці своєї області визначення, називається *квазінеперервним.*

Для топологічних просторів X, Y і Z сукупність усіх відображень $f\colon X\times Y\to Z$, квазінеперервних відносно першої змінної і неперервних відносно другої, позначатимемо через $KC(X\times Y,Z)$.

Лема 2.1. *Нехай X,Y,Z — топологічні простори, $f\in KC(X\times Y,Z)$, W_0,W_1 — відкриті в Z непорожні множини такі, що $\overline{f^{-1}(W_0)}=\overline{f^{-1}(W_1)}=X\times Y$. Тоді для довільних $n\in\mathbb{N}$, відкритих в X непорожніх множин $G_1,G_2,\dots,G_n$ і чисел $\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_n\in\{0,1\}$ існують $y_0\in Y$, відкриті в X непорожні множини $U_1,U_2,\dots,U_n$ такі, що $U_k\subseteq G_k$ і $f_{y_0}(U_k)\subseteq W_{\theta_k}$ для кожного $1\le k\le n$.*

Доведення. Зауважимо, що оскільки всі множини $f^{-1}(W_{\theta_k})$ є щільними в $X\times Y$, то для кожного $k\leq n$ множина $B_k=\{y\in Y\colon f(G_k\times\{y\})\cap W_{\theta_k}\neq\varnothing\}$ щільна в Y. Крім того, з неперервності f відносно другої змінної випливає, що всі множини B_k є відкритими в Y. Тому множина $\bigcap_{k=1}^n B_k$ — непорожня. Візьмемо довільну точку $y_0\in\bigcap_{k=1}^n B_k$. Тоді існують точки $x_k\in G_k$ при $k\leq n$ такі, що $f(x_k,y_0)\in W_{\theta_k}$. Тепер використовуючи квазінеперервність f відносно першої змінної знайдемо непорожні відкриті в X множини $U_k\subseteq G_k$ такі, що $f_{y_0}(U_k)\subseteq W_{\theta_k}$ для кожного $k\leq n$. □

Нехай X — топологічний простір. Опишемо гру Шоке на X, в якій беруть участь два гравці α і β. На першому кроці спочатку гравець β вибирає відкриту непорожню множину U_0, а гравець α — відкриту в X непорожню множину $V_1\subseteq U_0$. Далі на n-му кроці гравець β вибирає відкриту в X непорожню множину $U_{n-1}\subseteq V_{n-1}$, а гравець α — відкриту в X непорожню множину $V_n\subseteq U_{n-1}$. Гравець α виграє, якщо $\bigcap_{n=1}^\infty V_n\neq\varnothing$. Інакше виграє β.

Топологічний простір X називається *α-сприятливим*, якщо гравець α має виграшну стратегію у грі Шоке на X, тобто, якщо існує правило, яке забезпечує виграш гравцю α у випадку, коли α грає згідно з цим правилом. Відповідно топологічний простір X називається *β-несприятливим*, якщо гравець β не має виграшної стратегії у грі Шоке на X. Зрозуміло, що кожний α-сприятливий простір є β-несприятливим. В [6] показано, що топологічний простір X берівський, тоді і тільки тоді, коли він є β-несприятливим.

Нехай X — топологічний простір, $x_0\in X,\mathcal{U}$ — система всіх околів точки x_0 в просторі X і $f\colon X\to\mathbb{R}$. Нагадаємо, що число $\omega_f(x_0)=\inf\limits_{U\in\mathcal{U}}\sup\limits_{x',x''\in U}|f(x')-f(x'')|$ називається *коливанням функції f у точці x_0*.

Теорема 2.2. *Нехай X — α-сприятливий простір, Y — берівський простір і $f\in KC(X\times Y,\mathbb{R})$ такі, що $D(f)=X\times Y$. Тоді існує послідовність $(y_n)_{n=1}^\infty$ точок $y_n\in Y$ така, що для довільної множини $N\subset\mathbb{N}$ існує неперервна функція $g\colon Y\to[0,1]$ така, що $g(y_n)=1$, якщо $n\in N$, і $g(y_n)=0$, якщо $n\in\mathbb{N}\setminus N$.*

Доведення. Зауважимо, що згідно з [6] простір $X\times Y$ є берівським, тому існують відкриті в X і Y відповідно множини $X_1\subseteq X$ і $Y_1\subseteq Y$, і $\varepsilon>0$ такі, що $\omega_f(x,y)\geq\varepsilon$ для кожного $(x,y)\in X_1\times Y_1$. Використовуючи беровість простору $X_1\times Y_1$ знайдемо непорожні відкриті в X і Y відповідно множини $X_0\subseteq X_1$ і $Y_0\subseteq Y_1$, числа $a,b\in\mathbb{R}$ з $a<b$ такі, що множини $f^{-1}(W_0)$ і $f^{-1}(W_1)$ щільні в $X_0\times Y_0$, де $W_0=(-\infty,a)$ і $W_1=(b,+\infty)$.

Нехай $\mathcal{T}$ — топологія простору X і $\tau\colon\bigcup_{n=1}^\infty\mathcal{T}^{2n+1}\to\mathcal{T}$ — виграшна стратегія гравця α у грі Шоке на топологічному просторі X.

Для довільних $n\in\mathbb{N}\cup\{\omega_0\}$, $\xi=(\xi_1,\xi_2,\dots)\in\{0,1\}^n$ і номера $k<n$ покладемо $\xi|_k=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_k)$.

Індукцією відносно $n\in\mathbb{N}$ побудуємо послідовності сімей $(U_\xi\colon\xi\in\{0,1\}^n)$ і $(V_\xi\colon\xi\in\{0,1\}^n)$ відкритих в X непорожніх множин U_ξ і V_ξ і послідовність $(y_n)_{n=1}^\infty$ точок $y_n\in Y$ такі, що виконуються наступні умови:

(*i*) $V_\xi=\tau(U_{\xi|_1},V_{\xi|_1},\dots,U_\xi)$ для довільних $n\in\mathbb{N}$ і $\xi\in\{0,1\}^n$;

(*ii*) $U_\xi\subseteq V_{\xi|_n}$ для довільних $n\in\mathbb{N}$ і $\xi\in\{0,1\}^{n+1}$;

(*iii*) $f_{y_n}(U_\xi)\subseteq W_{\xi_n}$ для довільних $n\in\mathbb{N}$ і $\xi=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)\in\{0,1\}^n$.

Використовуючи лему 2.1 виберемо точку $y_1\in Y_0$ і відкриті в X непорожні множини U_0 та U_1 такі, що $f_{y_1}(U_\xi)\subseteq W_\xi$ для кожного $\xi\in\{0,1\}$. Покладемо $V_0=\tau(U_0)$ і $V_1=\tau(U_1)$.

Припустимо, що точки $y_k \in Y$, сім'ї $(U_\xi\colon \xi \in \{0,1\}^k)$ і $(V_\xi\colon \xi \in \{0,1\}^k)$ при $k \le n$ уже побудовані. Для кожного $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+1}) \in \{0,1\}^{n+1}$ покладемо $G_\xi = V_{\xi|_n}$ і $\theta_\xi = \xi_{n+1}$. Тоді згідно з лемою 2.1 існують $y_{n+1} \in Y$ і сім'я $(U_\xi\colon \xi \in \{0,1\}^{n+1})$ непорожніх відкритих в X множин U_ξ такі, що $U_\xi \subseteq G_\xi$ і $f_{y_{n+1}}(U_\xi) \subseteq W_{\theta_\xi}$, тобто виконуються умови (ii) та (iii) для кожного $\xi \in \{0,1\}^{n+1}$. Залишилось покласти $V_\xi = \tau(U_{\xi|_1}, V_{\xi|_1}, \dots, U_\xi)$ для всіх $\xi \in \{0,1\}^{n+1}$.

Покажемо, що послідовність $(y_n)_{n=1}^\infty$ шукана. Нехай $N \subseteq \mathbb{N}$. Покладемо $\xi_n = 1$, якщо $n \in N$, $\xi_n = 0$, якщо $n \in \mathbb{N} \setminus N$, і $\xi = (\xi_n)_{n=1}^\infty$. Зауважимо, що згідно з (i) та (ii) $U_{\xi|_{n+1}} \subseteq V_{\xi|_n} \subseteq U_{\xi|_n}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, причому набір $U_{\xi|_1} \subseteq V_{\xi|_1} \subseteq \dots$ є партією в грі Шоке на просторі X, в якій гравець α грає згідно з виграшною стратегією τ. Тому $\bigcap_{n=1}^\infty U_{\xi|_n} \ne \varnothing$.

Нехай $x_0 \in \bigcap_{n=1}^\infty U_{\xi|_n}$. Згідно з (iii) маємо $f(x_0, y_n) \in W_1$, якщо $n \in N$, і $f(x_0, y_n) \in W_0$, якщо $n \in \mathbb{N} \setminus N$. Візьмемо довільну неперервну функцію $\varphi\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ таку, що $W_0 \subseteq \varphi^{-1}(0)$ і $W_1 \subseteq \varphi^{-1}(1)$. Тоді неперервна функція $g\colon Y \to [0,1]$, $g(y) = \varphi(f(x_0, y))$, є шуканою. □

Наступний наслідок є основним результатом даного пункту.

Наслідок 2.3. *Нехай X — α-сприятливий простір, Y — регулярний простір, в якому кожна сепарабельна замкнена множина є компактною і $f \in KC(X \times Y, \mathbb{R})$ такі, що $D(f) = X \times Y$. Тоді існує компактна в Y множина Y_0, яка гомеоморфна простору $\beta\mathbb{N}$.*

Доведення. Легко бачити, що довільний регулярний простір, в якому кожна сепарабельна замкнена множина є компактною, є α-сприятливим, зокрема, берівським. Використовуючи теорему 2.2, виберемо послідовність $(y_n)_{n=1}^\infty$, яка задовольняє відповідну умову, і покладемо $Y_0 = \overline{\{y_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Тоді згідно з [7, наслідок 3.6.4] Y_0 гомеоморфний простору $\beta\mathbb{N}$. □

3. Нагадаємо, що система $\mathcal{A}$ підмножин множини X називається *ультрафільтром на X*, якщо виконуються наступні умови:

(a) $\bigcap \mathcal{B} \ne \varnothing$ для довільної скінченної системи $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$;

(b) або $A \in \mathcal{A}$ або $X \setminus A \in \mathcal{A}$ для довільної множини $A \subseteq X$.

Нехай $\mathcal{F}$ — сукупність усіх ультрафільтрів на $\mathbb{N}$. Легко бачити (див. [7,наслідок 3.6.4]), що відображення $\varphi\colon \beta\mathbb{N} \to \mathcal{F}$, $\varphi(x) = \{A \subseteq \mathbb{N}\colon x \in \overline{A}\}$, є біекцією, причому $\varphi(n) = \{A \subseteq \mathbb{N}\colon n \in A\}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Крім того, для всіх $x \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ ультрафільтри $\varphi(x)$, які називаються *нетривіальними*, мають наступну властивість: якщо $A \in \varphi(x)$ і $B \subseteq \mathbb{N}$ такі, що $|A \setminus B| < \aleph_0$, то $B \in \varphi(x)$.

Далі ми елементи x з наросту $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ будемо ототожнювати з $\varphi(x)$. Зауважимо, що для довільної відкрито-замкненої непорожньої множини $U \subseteq \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ існує нескінченна множина $A \subseteq \mathbb{N}$ така, що $U = \{x \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}\colon A \in x\}$.

Лема 3.1. *Нехай $X = \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, $(A_n)_{n=1}^\infty$ і $(B_n)_{n=1}^\infty$ — послідовності замкнених множин в X множин $A_n, B_n \subseteq X$ такі, що $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \varnothing$, де $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ і $B = \bigcup_{n=1}^\infty B_n$. Тоді $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$.*

Доведення. Індукцією відносно n легко побудувати послідовності $(U_n)_{n=1}^\infty$ і $(V_n)_{n=1}^\infty$ відкрито-замкнених в X множин U_n і V_n такі, що $A_n \subseteq U_n$, $B_n \subseteq V_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ і $(\bigcup_{n=1}^\infty U_n) \cap (\bigcup_{n=1}^\infty V_n) = \varnothing$. Виберемо послідовності $(S_n)_{n=1}^\infty$ і $(T_n)_{n=1}^\infty$ множин $S_n, T_n \subseteq \mathbb{N}$ такі, що $U_n = \{x \in X : S_n \in x\}$ і $V_n = \{x \in X : T_n \in x\}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Оскільки $U_n \cap V_m = \varnothing$, то $|S_n \cap T_m| < \aleph_0$ для довільних $n, m \in \mathbb{N}$. Покладемо $S = \bigcup_{n=1}^\infty (S_n \setminus (\bigcup_{k=1}^n T_k))$ і $T = \bigcup_{n=1}^\infty (T_n \setminus (\bigcup_{k=1}^n S_k))$.

Покажемо, що $S \cap T = \varnothing$. Припустимо, що $m \in S \cap T$. Врахувавши, що $S \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ і $T \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$, покладемо $i = \min\{n \in \mathbb{N} \colon m \in S_n\}$ і $j = \min\{n \in \mathbb{N} \colon m \in T_n\}$.

Якщо $i \leq j$, то $m \notin T_n$ при $n < j$ і $m \notin T_n \setminus (\bigcup_{k=1}^{n} S_k)$ при $n \geq j$. Отже, $m \notin T$, що неможливо. Аналогічно, $m \notin S$, якщо $j \leq i$.

Крім того, зауважимо, що $S_n \setminus S \subseteq S_n \setminus (S_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n} T_k) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} (S_n \cap T_k)$ і $T_n \setminus T \subseteq T_n \setminus (T_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n} S_k) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} (T_n \cap S_k)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тому всі множини $S_n \setminus S$ і $T_n \setminus T$ скінченні, $U_n \subseteq U = \{x \in X \colon S \in x\}$ і $V_n \subseteq V = \{x \in X \colon T \in x\}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, причому відкрито-замкнені в X множини U і V такі, що $U \cap V = \varnothing$. □

З [7, наслідок 3.6.4] випливає наступний факт.

Наслідок 3.2. *Нехай $A \subseteq \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ — зліченна множина. Тоді замикання $\overline{A}$ множини A в просторі $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ гомеоморфно компактифікації Стоуна-Чеха простору A.*

Множину A в топологічному просторі X називатимемо *p-множиною*, якщо для довільної послідовності $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ відкритих в X множин G_n таких, що $A \subseteq G_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, виконується включення $A \subseteq G = \operatorname{int}(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n)$.

Твердження 3.3. *Нехай $\mathcal{P}$ — система всіх замкнених ніде не щільних p-множин в просторі $X = \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Тоді*

(i) *множина $\bigcup \mathcal{P} = \bigcup\limits_{P \in \mathcal{P}} P$ щільна в X;*

(ii) *$U \cap P \in \mathcal{P}$ для довільних відкрито-замкненої в X множини U і $P \in \mathcal{P}$;*

(iii) *$P = \overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n} \in \mathcal{P}$ для довільної послідовності $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ множин $P_n \in \mathcal{P}$.*

Доведення. Твердження (i) та (ii) випливають безпосередньо з [7, вправа 3.6.A]. Доведемо (iii). Нехай $P_n \in \mathcal{P}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Оскільки кожна непорожня G_δ-множина в X має непорожню внутрішність (див. [7, вправа 3.6.A]), то множина $P = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n}$ ніде не щільна в X. Залишилось показати, що P є p-множиною в X.

Нехай $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність відкритих в X множин G_n така, що $P \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Покладемо $A_n = X \setminus G_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ і $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$. Оскільки $P_n \in \mathcal{P}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, то $B \subseteq \operatorname{int}(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n)$, тобто $B \cap \overline{A} = \varnothing$. Крім того, $P = \overline{B} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, тому $\overline{B} \cap A = \varnothing$. Згідно з лемою 3.1 маємо $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$, тобто $P \subseteq \operatorname{int}(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n)$. □

Тепер наведемо приклад скрізь розривної нарізно неперервної функції на добутку α-сприятливого простору X і зліченно компактного щільного підпростору простору $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

Приклад 3.4. Нехай X — множина всіх неперервних функцій $x \colon \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} \to \{0, 1\}$, $\mathcal{P}$ — система всіх замкнених ніде не щільних p-множин $P \subseteq \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ і $Y = \bigcup_{P \in \mathcal{P}} P$. Розглядатимемо простір X з топологією рівномірної збіжності на множинах системи $\mathcal{P}$, тобто для кожного $x \in X$ система $\{U(x, P) \colon P \in \mathcal{P}\}$ утворює базу околів точки x в просторі X, де $U(x, P) = \{x' \in X \colon x'(t) = x(t) \ \forall t \in P\}$.

Розглянемо нарізно неперервну функцію $f \colon X \times Y \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x(y)$. Оскільки в просторі Y відкрито-замкнені множини утворюють базу топології і кожна множина $P \in \mathcal{P}$ є ніде не щільною в Y, то функція f є розривною в кожній точці $(x_0, y_0) \in X \times Y$.

Покажемо тепер, що простір X є α-сприятливим. Нехай $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ — спадна послідовність непорожніх базисних відкритих множин в просторі X. Тоді існують зростаючі послідовності $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ і $(Q_n)_{n=1}^{\infty}$ множин $P_n, Q_n \in \mathcal{P}$ такі, що $U_n = \{x \in X \colon x(y) = 0 \ \forall y \in$

P_n і $x(y) = 1\ \forall y \in Q_n\}$. Покладемо $P = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n}$ і $Q = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n}$. З твердження 3.3 випливає, що $P, Q \in \mathcal{P}$. Крім того, з означення p-множини випливає, що $P_n \cap Q = P \cap Q_n = \varnothing$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тому $P \cap Q = \varnothing$ згідно з твердженням 3.1. Тепер вибравши довільну неперервну на $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ функцію x_0 таку, що $x_0(y) = 0$ для кожного $y \in P$ і $x_0(y) = 1$ для кожного $y \in Q$, одержимо $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$.

Позитивна відповідь на наступне питання дає розв'язання проблеми Талаґрана.

Питання 3.5. *Чи має місце рівність $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} = \bigcup_{P \in \mathcal{P}} P$, де $\mathcal{P}$ — система всіх замкнених ніде не щільних p-множин в просторі $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$?*

4. В даному пункті ми вивчатимемо умови беровості простору $C_p(\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}, \{0,1\})$.

Нехай X — топологічний простір і $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність множин $A_n \subseteq X$. Будемо казати, що *послідовність $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ слабко збігається до точки $x_0 \in X$ в просторі X*, якщо для довільного околу U точки x_0 в X існує номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такий, що $U \bigcap A_n \neq \varnothing$ для кожного $n \geq n_0$.

Теорема 4.1. *Нехай $Y = \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, $X = C_p(Y, \{0,1\})$. Тоді наступні умови рівносильні:*

(i) X — першої категорії;

(ii) X не є берівським;

(iii) існує послідовність $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ скінченних попарно неперетинних множин $E_n \subseteq Y$, яка слабко збігається до деякої точки $y_0 \in Y$;

(iv) існує послідовність $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ скінченних попарно неперетинних множин $E_n \subseteq Y$, яка слабко збігається до кожної точки $y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Доведення. Для довільних неперетинних множин $A, B \subseteq Y$ покладемо $U(A, B) = \{x \in X \colon x(a) = 0\ \forall a \in A, x(b) = 1\ \forall b \in B\}$. Зрозуміло, що система $\{U(A, B) \colon A, B \subseteq Y$ – скінченні неперетинні$\}$ утворюють базу топології простору X.

Імплікації $(i) \Rightarrow (ii)$ та $(iv) \Rightarrow (iii)$ є очевидними.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Нехай $A_0, B_0 \subseteq Y$ — такі скінченні неперетинні множини, що $X_0 = U(A_0, B_0)$ — множина I категорії в X, тобто $X_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, де $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ — зростаюча послідовність ніде не щільних множин в X.

Лема. *Для довільних $n \in \mathbb{N}$ і скінченної множини $C \subseteq Y$ існують скінченні неперетинні множини $A, B \subseteq Y \setminus C$ такі, що $U(A, B) \cap X_n = \varnothing$.*

Доведення. Нехай $D = C \setminus (A_0 \cup B_0) = \{d_1, \dots, d_m\}$, причому без обмеження загальності ми можемо вважати, що $m \geq 1$. Занумеруємо всі підмножини множини D у послідовність $D_1, \dots, D_{2^m}$ і покладемо $C_k = D \setminus D_k$ при $k = 1, \dots, 2^m$.

Покажемо, що $X_0 = \bigcup_{k=1}^{2^m} U(A_0 \cup C_k, B_0 \cup D_k)$. Оскільки $U(A_0 \cup C_k, B_0 \cup D_k) \subseteq X_0$ для кожного $k = 1, \dots, 2^m$, то $\bigcup_{k=1}^{2^m} U(A_0 \cup C_k, B_0 \cup D_k) \subseteq X_0$.

Нехай $x \in X_0$. Вибравши $k \in \{1, \dots, 2^m\}$ так, що $C_k = \{y \in D \colon x(y) = 0\}$ і $D_k = \{y \in D \colon x(y) = 1\}$ одержимо, що $x \in U(A_0 \cup C_k, B_0 \cup D_k)$.

Оскільки X_n ніде не щільна в X, то існують скінченні неперетинні множини $S_1, T_1 \subseteq Y \setminus (A_0 \cup B_0 \cup D)$ такі, що $U(A_0 \cup C_1 \cup S_1, B_0 \cup D_1 \cup T_1) \cap X_n = \varnothing$. Далі, використовуючи ніде не щільність X_n в X, індукцією відносно k будуємо послідовності $(S_k)_{k=1}^{2^m}$ і $(T_k)_{k=1}^{2^m}$ попарно неперетинних скінченних множин $S_k, T_k \subseteq Y$ такі, що $(S_k \cup T_k) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} (S_i \cup T_i) \cup A_0 \cup B_0 \cup D\right) = \varnothing$ і $U\left(\bigcup_{i=1}^{k} S_i \cup A_0 \cup C_k, \bigcup_{i=1}^{k} T_i \cup B_0 \cup D_k\right) \cap X_n = \varnothing$ для кожного $k \in \{1, \dots, 2^m\}$.

Покладемо $A = \bigcup_{k=1}^{2^m} S_k$ і $B = \bigcup_{k=1}^{2^m} T_k$. Покажемо, що $U(A,B) \cap X_n = \varnothing$. Припустимо, що $x \in U(A,B) \cap X_n$. Оскільки $X_n \subseteq X_0$, то існує $k \in \{1,\dots,2^m\}$ таке, що $x \in U(A_0 \cup C_k, B_0 \cup D_k)$. Тоді

$$x \in U(A \cup A_0 \cup C_k, B \cup B_0 \cup D_k) \cap X_n \subseteq U\left(\bigcup_{i=1}^{k} S_i \cup A_0 \cup C_k, \bigcup_{i=1}^{k} T_i \cup B_0 \cup D_k\right) \cap X_n,$$

що суперечить вибору множин S_k і T_k. □

З леми випливає, що існують послідовності $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ і $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ скінченних неперетинних множин $A_n, B_n \subseteq Y$ такі, що $(A_n \cup B_n) \cap \left(\bigcup_{k=0}^{n-1}(A_k \cup B_k)\right) = \varnothing$ і $U(A_n, B_n) \cap X_n = \varnothing$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Припустимо, що (iii) не виконується. Розглянемо послідовність $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ попарно неперетинних скінченних множин $E_n = A_n \cup B_n$. Використовуючи заперечення умови (iii) і скінченність множини $E_0 = A_0 \cup B_0$, знайдемо нескінченну множину $N_1 \subseteq \mathbb{N}$ таку, що $E_0 \cap \overline{\bigcup_{n \in N_1} E_n} = \varnothing$.

Аналогічно міркуючи зі скінченною множиною E_{n_1}, де $n_1 = \min N_1$, і послідовністю $(E_n)_{n \in N_1}$, виберемо нескінченну множину $N_2 \subseteq N_1$ таку, що $E_{n_1} \cap \overline{\bigcup_{n \in N_2} E_n} = \varnothing$. Продовжуючи цей процес до нескінченності, одержимо строго спадну послідовність $(N_k)_{k=1}^{\infty}$ нескінченних множин $N_k \subseteq \mathbb{N}$ таку, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ виконується умова

$$E_{n_{k-1}} \cap \overline{\bigcup_{n \in N_k} E_n} = \varnothing,$$

де $n_k = \min N_k$ і $n_0 = 0$.

Покладемо $\widetilde{A}_k = A_{n_{k-1}}$, $\widetilde{B}_k = B_{n_{k-1}}$ для кожного $k \in \mathbb{N}$, $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \widetilde{A}_k$ і $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} \widetilde{B}_k$. Згідно з вибором послідовності $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ маємо $E_{n_k} \bigcap \left(\overline{\bigcup_{i \neq k} E_{n_i}}\right) = \varnothing$ для кожного $k \in \mathbb{N}$. Тому $\overline{\widetilde{A}_k} \cap \overline{B} = \overline{A} \cap \overline{\widetilde{B}_k} = \varnothing$ для кожного $k \in \mathbb{N}$ і $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$ згідно з лемою 3.1. Значить, $U(A,B) \neq \varnothing$, тобто існує $x_0 \in U(A,B)$. Тепер, з одного боку, оскільки $A_0 \subseteq A$ і $B_0 \subseteq B$, то $x_0 \in U(A_0, B_0) = X_0$. А з іншого боку, врахувавши, що $A_{n_k} \subseteq A$ і $B_{n_k} \subseteq B$ для кожного $k \in \mathbb{N}$, одержимо

$$x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} U(A_{n_k}, B_{n_k}) \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} (X \setminus X_{n_k}) = X \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} X_{n_k}\right) = X \setminus X_0.$$

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Нехай $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність скінченних попарно неперетинних множин $E_n \subseteq Y$, яка слабко збігається до точки $y_0 \in Y$. Занумеруємо елементи множини $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ у послідовність $E = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$. Індукцією відносно k легко побудувати строго спадну послідовність нескінченних множин $N_k \subseteq \mathbb{N}$ таку, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ виконується одна з наступних умов:

(a) $y_k \notin \overline{\bigcup_{n \in N_k} E_n}$;

(b) послідовність $(E_n)_{n \in N_k}$ слабко збігається до точки y_k.

Візьмемо довільну строго зростаючу послідовність $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ номерів $n_k \in N_k$. Для кожного $k \in \mathbb{N}$ покладемо

$$A_k = \{y_m \in E_{n_k} :\ \text{послідовність } (E_n)_{n \in N_m} \text{ слабко збігається до } y_m\}.$$

Покажемо, що існує номер k_0 такий, що $A_k \neq \varnothing$ для кожного $k \geq k_0$.

Припустимо, що існує нескінченна множина $M \subseteq \mathbb{N}$ така, що $A_k = \varnothing$ для кожного $k \in M$. Це означає, що для довільних $k \in M$ і $y_m \in E_{n_k}$ виконується умова (a). Врахувавши, що $n_i \in N_m$ для всіх $i \geq m$, одержимо $y_m \notin \overline{\bigcup_{i \geq m} E_{n_i}}$. Тому множина $\bigcup_{k \in M} E_{n_k}$ дискретна. Вибравши дві нескінченні множини M_1 і M_2 з M так, що $M = M_1 \sqcup M_2$, згідно з наслідком 3.2 одержимо $\left(\overline{\bigcup_{k \in M_1} E_{n_k}}\right) \cap \left(\overline{\bigcup_{k \in M_2} E_{n_k}}\right) = \varnothing$. А це суперечить тому, що послідовність $(E_{n_k})_{k \in M}$ слабко збігається до точки y_0.

Тепер покажемо, що послідовність $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ слабко збігається до кожної точки $y \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.

Нехай $y_m \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Припустимо, що $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ не збігається слабко до y_m. Тоді існує нескінченна множина $M \subseteq \mathbb{N}$ така, що $y_m \notin \overline{\bigcup_{k\in M} A_k}$, причому без обмеження загальності ми можемо вважати, що $\{n_k \colon k \in M\} \subseteq N_m$. Зауважимо, що, як і в попередніх міркуваннях, множина $\bigcup_{k\in M}(E_{n_k} \setminus A_k)$ дискретна. Тому, врахувавши наслідок 3.2, одержимо, що існує нескінченна множина $M_1 \subseteq M$ така, що $y_m \notin \overline{\bigcup_{k\in M_1}(E_{n_k} \setminus A_k)}$. Отже, $y_m \notin \overline{\bigcup_{k\in M_1} E_{n_k}}$. Це суперечить тому, що послідовність $(E_{n_k})_{k\in M_1}$ слабко збігається до y_m.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Нехай послідовність $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ непорожніх скінченних попарно неперетинних множин слабко збігається до деякої точки $y_0 \in Y$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ покладемо $G_n = \bigcup_{k\geq n} U(E_k, E_{k+1})$. Легко бачити, що всі множини G_n відкриті і всюди щільні в X. Тому множини $F_n = X \backslash G_n$ — ніде не щільні в X. Тепер досить довести, що $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \varnothing$.

Припустимо, що $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Тоді існує строго зростаюча послідовність $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ номерів $k_n \in \mathbb{N}$ така, що $x_0 \in U(E_{k_n}, E_{k_n+1})$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, тобто $x_0(y) = 0$ для кожного $y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{k_n}$ і $x_0(y) = 1$ для кожного $y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{k_n+1}$. Оскільки $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ слабко збігається до y_0 в Y, то коливання функції x_0 на кожному околі V точки y_0 дорівнює 1. А це суперечить неперервності x_0 в точці y_0. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Baire R. *Sur les fonctions de variables réelles*// Annali di mat. pura ed appl. ser.3. – 1899. – V.3. – P.1-123.
2. Maslyuchenko O.V., Maslyuchenko V.K., Mykhaylyuk V.V., Sobchuk O.V. *Paracompactness and separately continuous mappings*// General Topology in Banach Spaces. – Nova Sci. Publ. – Nantintong-New-York. – 2001. – P.147-169.
3. Namioka I. *Separate continuity and joint continuity*// Pacif. J. Math. – 1974. – V. 51, №2. – P.515-531.
4. Talagrand M. *Espaces de Baire et espaces de Namioka*// Ann. of. Math. – 1985. – V. 270, №2. – P.159-164.
5. Маслюченко О.В., Михайлюк В.В. *До проблеми Талаґрана*// Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Вип. 46. Математика. - Чернівці: ЧДУ, 1999. - С.95-99.
6. Saint-Raymond J. *Jeux topologiques et espaces de Namioka*// Proc. Amer. Math. Soc. – 1983. – V. 87, №3. – P.489-504.
7. Энгелькинг Р. Общая топология. - М.: Мир, 1986. - 752с.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
факультет прикладної математики, кафедра математичного аналізу
58012, м.Чернівці, вул. Коцюбинського, 2
mathan@ukr.net

Надійшло 13.09.2007