УДК 517.911

О. Є. Зернов, Ю. В. Кузiна

ГЕОМЕТРИЧНИЙ АНАЛIЗ ЗАДАЧI КОШI ДЛЯ НЕЯВНОГО ДИФЕРЕНЦIЙНОГО РIВНЯННЯ

O. E. Zernov, Yu. V. Kuzina. *Geometric analysis of an initial value problem for an implicit differential equation*, Matematychni Studii, **29** (2008) 63–70.

We consider an initial value problem $F(t, x(t), x'(t)) = 0, x(0) = 0$.The existence of continuously differentiable solutions is proved, the asymptotic behaviour of these solutions when $t \to +0$ is investigated, the number of these solutions is determinated.

О. Е. Зернов, Ю. В. Кузина. *Геометрический анализ задачи Коши для неявного диференциального уравнения* // Математичні Студії. – 2008. – Т.29, №1. – С.63–70.

Рассматривается задача Коши $F(t, x(t), x'(t)) = 0, x(0) = 0$. Доказано существование непрерывно дифференцируемых решений, исследовано асимптотическое поведение этих решений при $t \to +0$, определено количество этих решений.

Питання про iснування i кiлькiсть розв'язкiв задачi Кошi детально вивчалися як для диференцiальних рiвнянь, розв'язаних вiдносно похiдних [1, 7, 11, 12, 14], так i для диференцiальних рiвнянь, не розв'язаних вiдносно похiдних [2, 4, 8, 15, 16, 17]; в останньому випадку будувалися послiдовностi наближень, що збiгаються до розв'язку поставленої задачi [3, 5, 13, 18, 19]. У той же час для неявних диференцiальних рiвнянь асимптотична поведiнка розв'язкiв задачi Кошi поблизу початкової точки вивчена порiвняно мало. У данiй роботi автори ставили собi за мету знайти для деякого диференцiального рiвняння, не розв'язаного вiдносно похiдної, неперервно диференцiйовнi розв'язки задачi Кошi з визначеними асимптотичними властивостями. При певних умовах визначено кiлькiсть розв'язкiв такого виду . При розв'язаннi поставленої задачi застосуються методи якiсної теорiї диференцiальних рiвнянь [6, 7, 9, 10].

Розглядатимемо задачу Кошi

$$\sum_{0\le i,j,k\le m} a_{ijk}t^i(x(t))^j(x'(t))^k + f(t, x(t), x'(t)) = 0, \tag{1}$$

$$x(0) = 0, \tag{2}$$

де $m \in \mathbb{N}$, $t \in (0, \tau)$ — дiйсна змiнна, $\tau > 0$, $x\colon (0, \tau) \to \mathbb{R}$ — невiдома функцiя, a_{ijk} — сталi, i, j, k — цiлi невiд'ємнi числа, $a_{000} = 0$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ — неперервна функцiя,

$$D = \{(t, x, y)\colon t \in (0, \tau),\ |x| < r_1t,\ |y| < r_2\},\ r_1 > 0,\ r_2 > 0.$$

Вважаємо, що $|f(t, x, y)| \le K(t^{m+1}+|x|^{m+1}+|y|^{m+1})$, $(t, x, y) \in D$, де K — додатна стала. Позначимо $\omega = \{(i, j, 0)\colon a_{ij0} \ne 0\}$, $\Omega = \{(i, j, k)\colon a_{ijk} \ne 0,\ k \ge 1\}$. Припустимо, що ω, Ω — непорожнi множини та позначимо $\nu_- = \min\limits_{(i,j,0)\in\omega}(i + j)$, $\nu_+ = \min\limits_{(i,j,k)\in\Omega}(i + j)$.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 35F25.

Нехай $\nu_- = \nu_+ = \nu_0$; очевидно, що ν_0 — ціле невід'ємне число.
Покладемо далі
$$\Omega_0 = \{(i,j,k)\colon i+j=\nu_0\}.$$
Очевидно, якщо $(i,j,k)\in\Omega_0$, то $a_{ijk}\neq 0$ і $i+j=\nu_0$; якщо ж $(i,j,k)\notin\Omega_0$, то або $a_{ijk}=0$, або $a_{ijk}\neq 0$ і одночасно $i+j\geq \nu_0+1$.
Нехай многочлен $P\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ визначається рівністю
$$P(x) = \sum_{(i,j,k)\in\Omega_0} a_{ijk}x^{j+k}$$
і нехай c — будь-який з дійсних коренів рівняння $P(c)=0$, що задовольняє умову $|c|<\min\{r_1,r_2\}$. Введемо такі позначення
$$\xi(c)=\sum_{(i,j,k)\in\Omega_0,k\geq 1} ka_{ijk}c^{j+k-1},\quad \eta(c)=\sum_{(i,j,k)\in\Omega_0,j\geq 1} ja_{ijk}c^{j+k-1},\quad \zeta(c)=\sum_{(0,1,k)\overline{\in}\Omega_0}|a_{01k}||c|^k.$$
Припускатимемо, що виконуються умови:

1) $|f(t,ct,c)|\leq K_1t^{2\nu_0+\lambda}, t\in(0,\tau)$, де $0<\lambda\leq 1, K_1$ — стала, $K_1>0$;

2) $\xi(c)\neq 0$, $\alpha(c)\neq 0$, де стала $\alpha(c)$ визначається рівністю $\alpha(c)=\frac{\eta(c)}{\xi(c)}+\nu_0+\lambda+1$.

Розв'язком задачі (1), (2) назвемо неперервно диференційовну функцію $x\colon(0,\rho]\to\mathbb{R}$, яка задовольняє умови: 1) $(t,x(t),x'(t))\in D, t\in(0,\rho]$; 2) $x(t)$ тотожно задовольняє рівняння (1) при $t\in(0,\rho]$; 3) $\lim\limits_{t\to+0}x(t)=0$.

Назвемо *умовами A* сукупність таких умов: 1) якщо $(i,j,k)\overline{\in}\Omega_0$, $i+j<2\nu_0+1$, то $a_{ijk}=0$; 2) $|f(t,x_1,y)-f(t,x_2,y)|\leq l_xt^{2\nu_0}|x_1-x_2|$, $(t,x_i,y)\in D$, $i\in\{1,2\}$, $|f(t,x,y_1)-f(t,x,y_2)|\leq l_yt^{2\nu_0}|y_1-y_2|$, $(t,x,y_i)\in D$, $i\in\{1,2\}$, де l_x , l_y — сталі; причому виконані умови: якщо $\nu_0=0$, $\eta(c)=0$, то $l_x+l_y+\zeta(c)<|\xi(c)|$, а якщо $\nu_0=0$, $\eta(c)\neq 0$, то $l_x+l_y+\zeta(c)<|\xi(c)|\,|\alpha(c)-\lambda|/(|\alpha(c)-\lambda| + |\eta(c)|)$;
3) або $\alpha(c)<0$, або $\alpha(c)>\lambda$; 4) $l_y<|\xi(c)|^2\,|\alpha(c)|/(|\eta(c)| + |\xi(c)||\alpha(c)|)$.

Назвемо *умовами B* сукупність наступних умов:
1) якщо $(i,j,k)\notin\Omega_0$, $i+j<2\nu_0+2$, то $a_{ijk}=0$;
2) $|f(t,x_1,y)-f(t,x_2,y)|\leq l_x\, t^{2\nu_0+\lambda}|x_1-x_2|$, $|f(t,x,y_1)-f(t,x,y_2)|\leq l_y\, t^{2\nu_0+\lambda}|y_1-y_2|$, $(t,x_i,y)\in D$, $(t,x,y_i)\in D$, $i\in\{1,2\}$, де l_x,l_y — сталі;
3) $0<\alpha(c)\leq\lambda$.
Позначимо через $U(\rho,M,q)$ множину всіх неперервно диференційовних функцій $u\colon(0,\rho]\to\mathbb{R}$ таких, що
$$|u(t)-ct|\leq Mt^{\nu_0+\lambda+1},\quad |u'(t)-c|\leq qMt^{\nu_0+\lambda},\ \ t\in(0,\rho],\tag{3}$$
де ρ, M, q — додатні сталі, $\rho\in(0,\tau)$.

Теорема. *Нехай виконані або умови (A), або умови (B). Тоді існують ρ, M, q такі, що:*
а) Якщо $\alpha(c)<0$, то задача Коші (1),(2) має континуум розв'язків, кожен з яких належить до множини $U(\rho,M,q)$. Якщо будь-яка стала μ задовольняє умову $|\mu-c\rho|<M\rho^{\nu_0+\lambda+1}$, то задача Коші (1),(2) має єдиний розв'язок $x_\mu\colon(0,\rho]\to\mathbb{R}$ з множини $U(\rho,M,q)$ такий, що $x_\mu(\rho)=\mu$.
б) Якщо $\alpha(c)>0$, то у задачі Коші (1),(2) існує єдиний розв'язок, який належить до множини $U(\rho,M,q)$.

Доведення. Насамперед, виберемо сталі ρ,M,q . У випадку виконання *умов A* припускатимемо, що виконані умови: якщо $l_y>0$, то $|\eta(c)|/|\xi(c)|+|\alpha(c)|<q<|\alpha(c)||\xi(c)|/l_y$, а якщо $l_y=0$, то $|\eta(c)|/|\xi(c)|+|\alpha(c)|<q$. Нехай, крім того,

$$(|\alpha(c)||\xi(c)|-ql_y)^{-1}(\sum_{(i,j,k)\overline{\in}\Omega_0}|a_{ijk}||c|^{j+k}+K_1)<M.$$

А у випадку виконання *умов B* припускаємо, що $|\eta(c)|/|\xi(c)|+|\alpha(c)|<q$,

$$(|\alpha(c)||\xi(c)|)^{-1}(\sum_{(i,j,k)\overline{\in}\Omega_0}|a_{ijk}||c|^{j+k}+K_1)<M.$$

Нехай $\rho=\min\{\rho_1,\rho_2,\rho_3,\rho_4,\rho_5,\rho_6,\rho_7,\rho_8,\rho_9\}$, де всі числа ρ_i визначаються далі у ході доведення. Достатня малість чисел ρ_i забезпечує коректність всіх наступних тверджень.

Позначимо через B простір неперервно диференційовних функцій $x\colon[0,\rho]\to\mathbb{R}$ з нормою

$$\|x\|_B=\max_{t\in[0,\rho]}(|x(t)|+|x'(t)|),$$

а через U — підмножину B, кожний елемент $u\colon[0,\rho]\to\mathbb{R}$ якої задовольняє нерівності (3), причому $u(0)=0,u'(0)=c$. Очевидно, що U — замкнена і обмежена множина.

Запишемо рівняння (1) у вигляді

$$-\xi(c)t^{\nu_0}(x'(t)-c)=\sum_{(i,j,k)\in\Omega_0,k\geq2}a_{ijk}t^i(ct)^j\sum_{r=2}^{k}C_k^rc^{k-r}(x'(t)-c)^r+$$
$$+\sum_{(i,j,k)\in\Omega_0}a_{ijk}t^i((x(t))^j-(ct)^j)((x'(t))^k+\sum_{(i,j,k)\overline{\in}\Omega_0}a_{ijk}t^i(x(t))^j(x'(t))^k+f(t,x(t),x'(t)).$$

Далі розглядатимемо диференціальне рівняння

$$x'(t)=c-\tfrac{t^{-\nu_0}}{\xi(c)}(\sum_{(i,j,k)\in\Omega_0,k\geq2}a_{ijk}t^i(ct)^j\sum_{r=2}^{k}C_k^rc^{k-r}(u'(t)-c)^r+$$
$$+\sum_{(i,j,k)\in\Omega_0}a_{ijk}t^i((x(t))^j-(ct)^j)(u'(t))^k+\sum_{(i,j,k)\overline{\in}\Omega_0}a_{ijk}t^i(u(t))^j(u'(t))^k+f(t,u(t),u'(t))),\tag{4}$$

де $u\in U$ — довільна фіксована функція.

Позначимо $D_0=\{(t,x)\colon t\in(0,\rho],x\in\mathbb{R}\}$. В D_0 для рівняння (4) виконані умови існування і єдності розв'язку задачі Коші та його неперервної залежності від початкових умов. Покладемо

$$\Phi_1=\{(t,x)\colon t\in(0,\rho],|x-ct|=Mt^{\nu_0+\lambda+1}\},\ D_1=\{(t,x)\colon t\in(0,\rho],|x-ct|<Mt^{\nu_0+\lambda+1}\},$$
$$H=\{(t,x)\colon t=\rho,|x-c\rho|<M\rho^{\nu_0+\lambda+1}\}.$$

Нехай функція $A_1\colon D_0\to[0,\infty)$ визначається рівністю $A_1(t,x)=(x-ct)^2t^{-2(\nu_0+\lambda+1)}$ і нехай $a_1\colon D_0\to[0,\infty)$ - похідна цієї функції в силу рівняння (4). Неважко переконатися, що $a_1(t,x)=2t^{-2\nu_0-2\lambda-3}(x-ct)^2(-\alpha(c)+\varphi_1(t,x))$ при $(t,x)\in D_0$; тут $\varphi_1\colon D_0\to\mathbb{R}$ — неперервна функція, $|\varphi_1(t,x)|\leq\sigma_1(t)$, $(t,x)\in D_0$, де $\sigma_1\colon(0,\rho]\to[0,+\infty)$ — деяка неперервна функція, $\lim\limits_{x\to+0}\sigma_1(t)=0$.

Спочатку розглянемо випадок $\alpha(c)<0$. Існує таке $\rho_1\in(0,\tau)$, що для всіх $t\in(0,\rho]$, де $\rho\leq\rho_1$, виконується умова: $a_1(t,x)>0$ при $(t,x)\in\Phi_1$. Доведемо, що якщо взяти довільну точку $(t_0,x_0)\in\Phi_1$ і розглянути інтегральну криву $J_0\colon(t,x_0(t))$ рівняння (4), що проходить через цю точку, то при досить малому $\delta>0$ маємо: $(t,x_0(t))\overline{\in}\overline{D}_1$ для $t\in(t_0,t_0+\delta)$ $(t\leq\rho)$ і $(t,x_0(t))\in D_1$ для $t\in(t_0-\delta,t_0)$. Справді, $A_1(t_0,x_0(t_0))=A_1(t_0,x_0)=M^2$, $a_1(t_0,x_0(t_0))=a_1(t_0,x_0)>0$, тому якщо $t_0\in(0,\rho)$, то існує таке $\delta>0$, що для $|t-t_0|<\delta$: $\operatorname{sign}(A_1(t,x_0(t))-A_1(t_0,x_0(t_0)))=\operatorname{sign}(t-t_0)$, або $\operatorname{sign}(|x_0(t)-ct|t^{-(\nu_0+\lambda+1)}-M)=\operatorname{sign}(t-t_0)$. Якщо ж $t_0=\rho$, то існує таке $\delta>0$, що для $t\in(\rho-\delta,\rho)$: $A_1(t,x_0(t))<A_1(t_0,x_0(t))$, або $|x_0(t)-ct|t^{-(\nu_0+\lambda+1)}<M$.

З доведеного випливає, що кожна з інтегральних кривих рівняння (4), що перетинає множину H, визначена при $t\in(0,\rho]$ і лежить у D_1 при $t\in(0,\rho]$. Справді, кожна з таких інтегральних кривих при спаданні t від $t = \rho$ до $t = 0$ не може мати спільних точок з Φ_1. Тому вона входить у точку $(0, 0)$, залишаючись у D_1 при всіх $t \in (0, \rho]$. Розглянемо будь-яку фіксовану точку $G(\rho, x_G) \in H$ і позначимо через $J_u\colon (t, x_u(t))$ інтегральну криву (4), що проходить через цю точку. На підставі сказаного вище, ця інтегральна крива лежить у D_1 при $t \in (0, \rho]$. Тому

$$|x_u(t) - ct| \le Mt^{\nu_0+\lambda+1}, \quad t \in (0, \rho]. \tag{5}$$

Легко бачити, що

$$|x_u^{'}(t) - c| \le Mt^{\nu_0+\lambda}, \quad t \in (0, \rho]. \tag{6}$$

Покладемо $x_u(0) = 0$, $x_u^{'}(0) = c$. Тоді $x_u \in U$. Визначимо оператор $T\colon U \to U$ за правилом $Tu = x_u$. Слід зазначити, що точка $G(\rho, x_G)$ залишається незмінною при будь-якому виборі функції $u \in U$ у правій частині рівняння (4).

Нехай тепер $\alpha(c) > 0$. Тоді існує таке $\rho_1 \in (0, \tau)$, що для всіх $t \in (0, \rho]$, де $\rho \le \rho_1$, виконується умова $a_1(t, x) < 0$ при $(t, x) \in \Phi_1$. Звідси випливає, що якщо взяти будь-яку точку $(t_0, x_0) \in \Phi_1$ і розглянути інтегральну криву $J_0\colon (t, x_0(t))$ рівняння (4), що проходить через цю точку, то при досить малому $\delta > 0$ маємо: $(t, x_0(t)) \in D_1$ для $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ $(t \le \rho)$ і $(t, x_0(t)) \overline{\in} \overline{D}_1$ для $t \in (t_0 - \delta, t_0)$. Це твердження доводиться так само, як і аналогічне твердження у випадку $\alpha(c) < 0$. З доведеного твердження випливає, що серед інтегральних кривих рівняння (4), що перетинають H, знайдеться одна і тільки одна крива (позначимо її $J_u\colon (t, x_u(t))$), яка визначена при $t \in (0, \rho]$ і лежить у D_1 при всіх $t \in (0, \rho]$. Справді, якщо інтегральна крива (4) перетинає Φ_1 при $t \in (0, \rho]$, то при подальшому зростанні t вона не може мати спільних точок з Φ_1. Тому вона перетинає $\overline{H}$. Визначимо відображення $\psi\colon \Phi_1 \to \overline{H}$, ставлячи у відповідність кожній точці $P \in \Phi_1$ точку $\psi(P) \in \overline{H}$, що належить до тієї ж інтегральної кривої (4), що і точка P. Нехай $\psi(\Phi_1) = \{Q \in \overline{H}\colon Q = \psi(P), P \in \Phi_1\}$. Множина $\psi(\Phi_1)$ є незамкненою, як образ незамкненої множини Φ_1. Але $\overline{H}$ — замкнена множина, тому множина $\overline{H} \backslash \psi(\Phi_1)$ — непорожна. Нехай $J_u\colon (t, x_u(t))$ така інтегральна крива (4), що $(\rho, x_u(\rho)) \in \overline{H} \backslash \psi(\Phi_1)$. Очевидно, що ця інтегральна крива визначена при $t \in (0, \rho]$ і лежить у D_1 при всіх $t \in (0, \rho]$.

Неважко переконатися в тому, що у даному випадку теж виконуються нерівності (5), (6). Якщо покласти $x_u(0) = 0, x_u^{'}(0) = c$, то $x_u \in U$. Доведемо тепер, що $J_u\colon (t, x_u(t))-$ єдина інтегральна крива (4) з такими властивостями. Інакше кажучи, доведемо, що якщо $(t_0, x_0) \in \overline{D}_1 \backslash \{(0, 0)\}, x_0 \ne x_u(t_0)$, то інтегральна крива (4), що проходить через точку (t_0, x_0) покине множину $\overline{D}_1$ при зменшенні t від $t = t_0$ до $t = t_-$, де (t_-, t_0) — лівий максимальний інтервал існування розв'язку рівняння (4), яке задовольняє початкову умову $x(t_0) = x_0$. Справді, розглянемо наступні однопараметричні сім'ї множин

$$\Phi_2(\mu) = \{(t, x)\colon t \in (0, \rho], |x - x_u(t)| = \mu t^{\nu_0+\lambda+1}(-\ln t)\},$$
$$D_2(\mu) = \{(t, x)\colon t \in (0, \rho], |x - x_u(t)| < \mu t^{\nu_0+\lambda+1}(-\ln t)\},$$

де μ — параметр, $\mu \in (0, 1]$. Нехай функція $A_2\colon\ D_0 \to [0, \infty)$ визначається рівністю

$$A_2(t, x) = (x - x_u(t))^2(t^{\nu_0+\lambda+1}(-\ln t))^{-2}$$

і нехай $a_2\colon\ D_0 \to [0, \infty)$ — похідна цієї функції визначена з рівняння (4). Неважко переконатися, що

$$a_2(t, x) = 2(t^{\nu_0+\lambda+1}(-\ln t))^{-2}t^{-1}(x - x_u(t))^2(-\alpha(c) + \varphi_2(t, x))$$

при $(t, x) \in D_0$; тут $\varphi_2\colon\ D_0 \to \mathbb{R}$ — неперервна функція, $|\varphi_2(t, x)| \le \sigma_2(t), (t, x) \in D_0$, де $\sigma_2\colon\ (0, \rho] \to [0, +\infty)$ — деяка неперервна функція, $\lim_{x\to+0} \sigma_2(t) = 0$. Існує таке

$\rho_2 \in (0,\tau)$, що для всіх $t \in (0,\rho]$, де $\rho \le \rho_2$, виконується умова $a_2(t,x) < 0$, якщо $(t,x) \in D_0$ і при цьому $x \ne x_u(t)$. Зокрема, $a_2(t,x) < 0$, якщо $(t,x) \in \Phi_2(\mu)$, для кожного $\mu \in (0,1]$. Тому якщо взяти будь-яку точку (t_0,x_0) будь-якої кривої $\Phi_2(\mu)$, $\mu \in (0,1]$ і розглянути ту (єдину) інтегральну криву $J_0\colon$ $(t,x_0(t))$ рівняння (4), що проходить через цю точку, то при досить малому $\delta > 0$ маємо $(t,x_0(t)) \in D_2(\mu)$ для $t \in (t_0,t_0+\delta)$ $(t \le \rho)$ і $(t,x_0(t)) \overline{\in} \overline{D}_2(\mu)$ для $t \in (t_0-\delta,t_0)$. Це твердження доводиться так само, як аналогічне твердження для Φ_1. Нехай $P_*(t_*,x_*) \in \overline{D}_1 \backslash \{(0,0)\}, x_* \ne x_u(t_*)$. На підставі сказаного вище, інтегральна крива $J_*\colon (t,x^*(t))$ рівняння (4), що проходить через точку P_*, лежить поза $\overline{D}_2(\mu_*)$ при всіх $t \in (t_-,t_*)$, де (t_-,t_*) — лівий максимальний інтервал існування розв'язку x^*. З іншого боку, існує таке $t_{**} \in (0,\rho)$, що якщо $(t,x) \in \overline{D}_1$ і $t \in (0,t_{**})$, то $(t,x) \in D_2(\mu_*)$, бо існує таке $\rho_3 \in (0,\tau)$, що для всіх $t \in (0,\rho]$, де $\rho \le \rho_3$, маємо: $\frac{1}{-\ln t} < \frac{\mu_*}{2M}$. Тому,

$$|x - x_u(t)| \le |x - ct| + |x_u(t) - ct| \le 2Mt^{\nu_0+\lambda+1} < \mu_* t^{\nu_0+\lambda+1}(-\ln t).$$

Нехай $t^* = \min\{t_*, t_{**}\}$. На підставі сказаного вище, якщо $t \in (t_-,t^*)$, то інтегральна крива $J_*\colon (t,x^*(t))$ рівняння (4) лежить зовні $\overline{D}_1$, що і було потрібно. Визначимо оператор $T\colon U \to U$ за правилом $Tu = x_u$. Доведемо, що $T\colon U \to U$ — оператор стиску. Нехай $u_i \in U$, $i \in \{1,2\}$ — довільні фіксовані функції і нехай $Tu_i = x_i$, $i \in \{1,2\}$. Якщо $u_1 = u_2$, то $x_1 = x_2$. Нехай далі $\|u_1 - u_2\|_B = h, h > 0$. Розглянемо послідовно випадок, коли виконані *умови A* і випадок, коли виконані *умови B*.

Нехай виконуються умови A. Покладемо $\Phi_3 = \{(t,x)\colon t \in (0,\rho], |x - x_2(t)| = \gamma t^{\nu_0+1}h\}$, $D_3 = \{(t,x)\colon t \in (0,\rho], |x - x_2(t)| < \gamma t^{\nu_0+1}h\}$, де γ — стала, яка задовольняє такі мови: якщо $\eta(c) = 0$, то $\gamma > \frac{l_x+l_y+\zeta(c)}{|\alpha(c)-\lambda|}$; а якщо $\eta(c) \ne 0$, то $\frac{l_x+l_y+\zeta(c)}{|\alpha(c)-\lambda|} < \gamma < \frac{|\xi(c)|-l_x-l_y-\zeta(c)}{|\eta(c)|}$. Нехай функція $A_3\colon D_0 \to [0,\infty)$ визначається рівністю $A_3(t,x) = (x - x_2(t))^2 t^{-2(\nu_0+1)}$ і нехай $a_3\colon D_0 \to [0,\infty)$ — похідна цієї функції визначена з рівняння

$$x'(t) = c - \frac{t^{-\nu_0}}{\xi(c)}\Big(\sum_{(i,j,k)\in\Omega_0, k\ge 2} a_{ijk} t^i (ct)^j \sum_{r=2}^{k} C_k^r c^{k-r} (u_1'(t) - c)^r +$$
$$\sum_{(i,j,k)\in\Omega_0} a_{ijk} t^i ((x(t))^j - (ct)^j)(u_1'(t))^k + \sum_{(i,j,k)\overline{\in}\Omega_0} a_{ijk} t^i (u_1(t))^j (u_1'(t))^k + f(t,u_1(t),u_1'(t))\Big). \tag{7}$$

Неважко переконатися, що для всіх точок $(t,x) \in \Phi_3$, що задовольняють умову $|x - ct| < Mt^{\nu_0+\lambda+1}, t \in (0,\rho]$, виконується рівність

$$a_3(t,x) = 2t^{-2\nu_0-3}(x - x_2(t))^2(-\alpha(c) + \lambda + \varphi_3(t,x));$$

тут $\varphi_3\colon D_0 \to \mathbb{R}$ — неперервна функція, $|\varphi_3(t,x)| \le \sigma_3(t), (t,x) \in \Phi_3$, $|x - ct| \le Mt^{\nu_0+\lambda+1}$, де $\sigma_3\colon$ $(0,\rho] \to [0,+\infty)$ — деяка неперервна функція, $\lim_{x\to+0} \sigma_3(t) = 0$.

Розглянемо спочатку випадок $\alpha(c) < 0$. Існує таке $\rho_4 \in (0,\tau)$, що для всіх $t \in (0,\rho]$, де $\rho \le \rho_4$, виконується умова: $a_3(t,x) > 0$ на тій частині кривої Φ_3, де $|x - ct| \le Mt^{\nu_0+\lambda+1}$, $t \in (0,\rho]$. Звідси випливає, що якщо взяти довільну точку $(t_1,x_1) \in \Phi_3$ і розглянути інтегральну криву $J_1\colon (t,x_1(t))$ рівняння (7), що проходить через цю точку, то при досить малому $\delta > 0$ маємо: $(t,x_1(t)) \overline{\in} \overline{D}_3$ для $t \in (t_1,t_1+\delta) (t \le \rho)$ і $(t,x_1(t)) \in D_3$ для $t \in (t_1-\delta,t_1)$. Це доводиться так само, як аналогічне твердження для Φ_1. При цьому $x_1(\rho) = x_2(\rho) = x_G$.

Істотною є та обставина, що інтегральна крива $J_1\colon (t,x_1(t))$ рівняння (7) задовольняє умову $|x_1 - ct| \le Mt^{\nu_0+\lambda+1}$, $t \in (0,\rho]$. Тому, якби ця інтегральна крива мала хоча б одну спільну точку (t,x) з кривою Φ_3, то неминуче для такої точки була б виконана умова $|x - ct| \le Mt^{\nu_0+\lambda+1}$, $t \in (0,\rho]$, що передбачалася виконаною при розгляді знаку функції $a_3(t,x)$. На підставі сказаного вище, якщо t зменшується від $t = \rho$ до $t = 0$, то інтегральна крива $J_1\colon (t, x_1(t))$ рівняння (7) не може мати спільних точок з Φ_3. Отже, ця інтегральна крива лежить у D_3 при $t \in (0, \rho]$ і тому

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq \gamma t^{\nu_0+1} h, t \in (0, \rho]. \tag{8}$$

Оскільки для кожного $i \in \{1, 2\}$ функція $x_i\colon (0, \rho] \to \mathbb{R}$ є розв'язком рівняння (4), де $u = u_i$ відповідно, то за допомогою (8) легко довести , що

$$|x_1'(t) - x_2'(t)| \leq t^{\nu_0}(\beta(c) + \sigma_4(t))h, t \in (0, \rho], \tag{9}$$

де $\beta(c) = \dfrac{1}{|\xi(c)|}(\gamma|\eta(c)| + l_x + l_y \sum\limits_{(i,j,k)\overline{\in}\Omega_0, i+j=2\nu_0+1} j|c|^{j+k-1})$, $\sigma_4\colon (0, \rho] \to (0, +\infty)$ — деяка неперервна функція, $\lim\limits_{t\to+0} \sigma_4(t) = 0$. З (8) та (9) випливає, що

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x_1'(t) - x_2'(t)| \leq t^{\nu_0}(\beta(c) + \gamma t + \sigma_4(t))h, t \in (0, \rho]. \tag{10}$$

Якщо $\nu_0 > 0$, то існує таке $\rho_5 \in (0, \tau)$, що для всіх $t \in (0, \rho]$, де $\rho \leq \rho_5$, виконана нерівність

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x_1'(t) - x_2'(t)| \leq \frac{1}{2}h, t \in (0, \rho]. \tag{11}$$

Тому $\max\limits_{t\in[0,\rho]}(|x_1(t) - x_2(t)| + |x_1'(t) - x_2'(t)|) \leq \frac{1}{2}h$, або

$$\|x_1 - x_2\|_B \leq \frac{1}{2}h, \tag{12}$$

тобто

$$\|Tu_1 - Tu_2\|_B \leq \frac{1}{2}\|u_1 - u_2\|_B. \tag{13}$$

Проведені міркування не залежать від вибору функцій $u_i \in U, i \in \{1, 2\}$. Отже, $T\colon\ U \to U$ — оператор стиску. Якщо ж $\nu_0 = 0$, то $\beta(c) = \frac{1}{|\xi(c)|}(\gamma|\eta(c)| + l_x + l_y + \zeta(c))$, і через вибір $\gamma, \beta(c) < 1$.

Нехай $\theta = \frac{1}{2}(1 + \beta(c))$. Очевидно, $0 < \theta < 1$. Існує таке $\rho_6 \in (0, \tau)$, що для всіх $t \in (0, \rho]$ де $\rho \leq \rho_6$, виконана умова $\beta(c) = \gamma t + \sigma_4(t) \leq \theta, t \in (0, \rho]$. З (10) маємо

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x_1'(t) - x_2'(t)| \leq \theta h, t \in (0, \rho] \ ,$$

тому $\max\limits_{t\in[0,\rho]}(|x_1(t) - x_2(t)| + |x_1'(t) - x_2'(t)|) \leq \theta h$, або $\|x_1 - x_2\|_B \leq \theta h$, тобто

$$\|Tu_1 - Tu_2\|_B \leq \theta\|u_1 - u_2\|_B, \tag{14}$$

де $0 < \theta < 1$. Проведені міркування не залежать від вибору функцій $u_i \in U, i \in \{1, 2\}$. Отже, $T\colon U \to U$ — оператор стиску.

Розглянемо тепер випадок $\alpha(c) > \lambda$. Існує таке $\rho_7 \in (0, \tau)$, що для всіх $t \in (0, \rho]$, де $\rho \leq \rho_7$, виконується умова $a_3(t, x) < 0$ на тій частині кривої Φ_3 , де $|x - ct| \leq Mt^{\nu_0+\lambda+1}$, $t \in (0, \rho]$. Звідси випливає, що якщо взяти будь-яку точку (t_0, x_0), що належить зазначеної частині кривої Φ_3 і розглянути інтегральну криву $J_0\colon\ (t, x_0(t))$ рівняння (7), що проходить через цю точку, то при досить малому $\delta > 0$ маємо: $(t, x_1(t)) \in D_3$ для

$t \in (t_0, t_0 + \delta)$ $(t \leq \rho)$ і $(t, x_1(t)) \overline{\in} \overline{D}_3$ для $t \in (t_0 - \delta, t_0)$. Це доводиться так само, як аналогічне твердження для Φ_1. При цьому, оскільки $\lambda > 0$,

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq |x_1(t) - ct| + |x_2(t) - ct| \leq 2Mt^{\nu_0+\lambda+1} < \gamma t^{\nu_0+1}h,$$

при $t \in (0, t(h)]$, де $t(h) \in (0, \rho)$ — достатньо мале . Це значить, що інтегральна крива $J_1\colon (t, x_1(t))$ рівняння (7) лежить у D_3 при $t \in (0, t(h)]$. Як і у випадку $\alpha(c) < 0$ відзначимо, що якби ця інтегральна крива мала спільну точку (t, x) з кривою Φ_3, то для цієї точки обов'язково була б виконана додаткова умова $|x - ct| \leq Mt^{\nu_0+\lambda+1}$, $t \in (0, \rho]$, що передбачалася виконаною при розгляді знаку функції $a_3(t, x)$. На підставі вище сказаного, якщо t змінюється від $t = t(h)$ до $t = \rho$, то інтегральна крива $J_1\colon\ (t, x_1(t))$ рівняння (7) не може мати спільних точок з Φ_3. Виходить, ця інтегральна крива $J_1\colon\ (t, x_1(t))$ рівняння (7) лежить у D_3 при всіх $t \in (0, \rho]$. Далі, як і у випадку $\alpha(c) < 0$, одержуємо (8)–(10), а потім, у залежності від значення ν_0, одержуємо або (13), або (15). Проведені міркування не залежать від вибору функцій $u_i \in U, i \in \{1, 2\}$. Отже, $T\colon U \to U$ — оператор стиску.

Нехай виконані умови B. Покладемо

$\Phi_4 = \{(t, x)\colon t \in (0, \rho], |x - x_2(t)| = t^\gamma h\}$, $D_4 = \{(t, x)\colon t \in (0, \rho], |x - x_2(t)| < t^\gamma h\}$, де γ — стала, що задовольняє умову $-\frac{\eta(c)}{\xi(c)} < \lambda < \nu_0 + \lambda + 1$. Оскільки в даному випадку $\alpha(c) \leq \lambda$, тобто $\nu_0 + 1 \leq -\frac{\eta(c)}{\xi(c)}$, то виконується нерівність $\gamma > \nu_0 + 1$. Нехай функція $A_4\colon D_0 \to [0, \infty)$ визначається рівністю $A_4(t, x) = (x - x_2(t))^2 t^{-2\gamma}$ і нехай $a_4\colon D_0 \to [0, \infty)$ - похідна цієї функції в силу рівняння (7). Неважко переконатися в тому, що

$$a_4(t, x) = 2t^{-2\gamma-1}(x - x_2(t))^2(-\frac{\eta(c)}{\xi(c)} - \gamma + \varphi_4(t, x)), (t, x) \in \Phi_4;$$

тут $\varphi_4\colon D_0 \to \mathbb{R}$ — неперервна функція, $|\varphi_4(t, x)| \leq \sigma_5(t), (t, x) \in \Phi_4$, де $\sigma_5\colon (0, \rho] \to [0, +\infty)$ — деяка неперервна функція, $\lim_{x\to+0} \sigma_5(t) = 0$. Існує таке $\rho_8 \in (0, \tau)$, що для всіх $t \in (0, \rho]$, де $\rho \leq \rho_8$, виконується умова: $a_4(t, x) < 0$ при $(t, x) \in \Phi_4$. Тому, якщо взяти довільну точку $(t_0, x_0) \in \Phi_4$ і розглянути інтегральну криву $J_0\colon (t, x_0(t))$ рівняння (7), що проходить через цю точку, то при досить малому $\delta > 0$ маємо: $(t, x_0(t)) \in D_4$ для $t \in (t_0, t_0 + \delta)(t \leq \rho)$ і $(t, x_1(t)) \overline{\in} \overline{D}_3$ для $t \in (t_0 - \delta, t_0)$. Це доводиться так само, як і подібне твердження для Φ_1. При цьому, оскільки $\gamma < \nu_0 + \lambda + 1$, то для $t \in (0, t(h)]$, де $t(h) \in (0, \rho)$ — достатньо мале, отримаємо

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq |x_1(t) - ct| + |x_2(t) - ct| \leq 2Mt^{\nu_0+\lambda+1} = t^{\nu_0+\lambda+1-\gamma}t^\gamma \tfrac{2M}{h} < t^\gamma h,$$

Це означає, що інтегральна крива $J_1\colon (t, x_1(t))$ рівняння (7) лежить у D_4 при $t \in (0, t(h)]$. З сказаного вище випливає, що при зростанні t від $t = t(h)$ до $t = \rho$ ця інтегральна крива не може мати спільних точок з Φ_4. Тому вона залишається в D_4 при всіх $t \in (0, \rho]$. Отже,

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq t^\gamma h, t \in (0, \rho]. \tag{16}$$

За допомогою (16) неважко переконатися, що

$$|x_1'(t) - x_2'(t)| \leq \sigma_6(t)h, t \in (0, \rho], \tag{17}$$

де $\sigma_6\colon (0, \rho] \to [0, +\infty)$ — деяка неперервна функція, $\lim\limits_{x\to+0} \sigma_6(t) = 0$. Існує таке $\rho_9 \in (0, \tau)$, що для всіх $t \in (0, \rho]$, де $\rho \leq \rho_9$, з (16), (17) випливають (11), (12) і (13). Проведені міркування не залежать від вибору функцій $u_i \in U, i \in \{1, 2\}$. Отже, $T\colon U \to U$ — оператор стиску. Для завершення доведення теореми залишається застосувати до оператора $T\colon U \to U$ принцип Банаха (стиснутих відображень). $\square$

ЛІТЕРАТУРА

1. Андреев А. Ф. *Усиление теоремы единственности O–кривой в* N_2 // Доклады АН СССР. — 1962. — Т.146, №1. — С.9—10.
2. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.— 304 с.
3. Бабкин Б. Н. *О приближенном решении методом Чаплыгина обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, неразрешенных относительно производной*// Прикл. матем. и мех.— 1953.— Т.17, вып.5.— С.634—638.
4. Блинов С. П. *Геометрический метод решения систем дифференциальных уравнений.*— Минск, 1974.— 46с.— Деп. в ВИНИТИ, №2024— 74 Деп.
5. Витюк А. Н. *Обобщенная задача Коши для системы дифференциальных уравнений, не решенной относительно производных*// Диф. уравнения.— 1971.— Т.7, №9.— С.1575—1580.
6. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.— 472 с.
7. Еругин Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. — Минск: Наука и техника, 1972.— 664 с.
8. Еругин Н. П., Штокало И. З., Бондаренко П. С. и др. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. — Киев: Вища школа, 1974.— 472 с.
9. Зернов А. Е. *О разрешимости и асимптотических свойствах решений одной сингулярной задачи Коши*// Диф. уравнения.— 1992.— Т.28, №5.— С.756—760.
10. Зернов А. Е. *Качественный анализ неявной сингулярной задачи Коши*// Укр. мат. журн.— 2001.— Т.53.— №3.— С.302—310.
11. Кигурадзе И. Т. *О задаче Коши для сингулярных систем обыкновенных дифференциальных уравнений*// Диф. уравнения.— 1965.— Т.1, №10.— С.1271—1291.
12. Кигурадзе И. Т. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. — Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1975.— 352 с.
13. Рудаков В. П. *О существовании и единственности решения систем дифференциальных уравнений первого порядка, частично разрешенных относительно производных*// Известия вузов. Матем.— 1971.— №9.— С.79—84.
14. Чечик В. А. *Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностью*// Труды Московск. матем. об-ва.— 1959.— №8.— С.155—198.
15. Anichini G., Conti G. *Boundary value problems for implicit ODE's in a singular case* // Diff. Equation and Dynamical Syst.— 1999.— V.7, №4.— P.437—459.
16. Conti R. *Sulla risoluzione dell'equazione* $F(t, x, \frac{dx}{dt}) = 0$// Ann. mat. pura ed appl.— 1959.—№48.— P.97—102.
17. Frigon M., Kaczynski T. *Boundary value problems for systems of implicit differential equations*// J. Math. Anal. and Appl.— 1993.— V.179, №2.— P.317—326.
18. Kowalski Z. *The polygonal method of solving the differential equation* $y' = h(t, y, y, y')$// Ann. polon. math.— 1963.— V.13, №2.— P.173—204.
19. Kowalsky Z. *A difference method of solving the differential equation* $y' = h(t, y, y, y')$// Ann. polon. math. — 1965.— V.15, №2.— P.121—148.

Південноукраїнський державний педагогічний
університет ім. К. Д. Ушинського, м. Одеса
zernov@ukr.net
yuliak@te.net.ua

Надійшло 9.07.2007
Після переробки 16.10.2007