УДК 517. 925

М. А. Белозерова

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОДНОГО КЛАССА РЕШЕНИЙ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

M. A. Belozerova. *Asymptotic properties of a class of solutions of essential nonlinear differential equations of the second order*, Matematychni Studii, **29** (2008) 52–62.

Asymptotic representations of a class of solutions of nonautonomous differential equations of the second order with nonlinearities of more general than Emden-Fowler type are established.

М. А. Белозерова. *Асимптотические свойства одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка* // Математичні Студії. – 2008. – Т.29, №1. – С.52–62.

Устанавливаются асимптотические представления достаточно широкого класса решений неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейностями, близкими к степенным.

В развитии асимптотической теории существенно нелинейных дифференциальных уравнений несомненно важна роль так называемого обобщенного уравнения Емдена-Фаулера $y'' = \alpha_0 p(t)|y|^{\sigma_0}|y'|^{\sigma_1}$, где $\alpha_0 \in \{-1,1\}$, $p\colon [a,\omega) \to (0,+\infty)$ — непрерывная функция $(-\infty < a < \omega \le +\infty)$. Это уравнение было ранее детально исследовано (см., например, [1—5]), его частные случаи применялись во многих областях естествознания.

В данной работе рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение более общего вида

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y') \qquad (1),$$

в котором $\alpha_0 \in \{-1,1\}$, $p\colon [a,\omega) \to (0,+\infty)$ — непрерывная функция $(-\infty < a < \omega \le +\infty)$, $\varphi_i\colon \Delta_{Y_i} \to (0,+\infty)$ ($i \in \{0;1\}$) — строго монотонные, дважды непрерывно-дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{z\to Y_i,\ z\in\Delta_{Y_i}} \frac{z\varphi_i'(z)}{\varphi_i(z)} = \sigma_i, \qquad \overline{\lim_{z\to Y_i,\ z\in\Delta_{Y_i}}} \left|\frac{z\varphi_i''(z)}{\varphi_i'(z)}\right| < +\infty \quad (i \in \{0;1\}), \tag{2}$$

где

$$Y_i = \begin{cases} \text{либо } 0, \\ \text{либо } \pm\infty, \end{cases} \qquad \Delta_{Y_i} = \begin{cases} \text{либо } [y_i^0, Y_i), \\ \text{либо } (Y_i, y_i^0], \end{cases} \tag{3}$$

(при $Y_i = +\infty$ $(Y_i = -\infty)$ считаем $y_i^0 > 0$ $(y_i^0 < 0)$ соответственно)

$$\sigma_i \in \mathbb{R}, \quad \text{причем } \sigma_0 + \sigma_1 \ne 1. \tag{4}$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 34E10.

Решение y уравнения (1) будем называть $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$–решением, если

$$y^{(i)}\colon [t_0, \omega) \longrightarrow \Delta_{Y_i}, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t) = Y_i \quad (i \in \{0; 1\}), \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = \lambda_0. \tag{5}$$

Такого типа решения ранее исследовались (см. [6-11]) лишь для уравнений, в которых $\varphi_1(y') \equiv 1$. Настоящая работа посвящена $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$–решениям в одном из наиболее сложных для изучения особом случае, когда $\lambda_0 = 1$. Из вида уравнения (1) следует, что каждое его $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$–решение является строго монотонным вместе со своей первой производной. Поэтому при изучении таких решений, очевидно, необходимо считать, что

$$y_1^0 > 0 \text{ если } \Delta_{Y_0} = [y_0^0, Y_0), \qquad y_1^0 < 0 \text{ если } \Delta_{Y_0} = (Y_0, y_0^0]. \tag{6}$$

В силу первого из условий (2) каждая из функций φ_i $(i \in \{0, 1\})$ в некотором смысле близка к степенной, а именно имеет вид $\varphi_i(z) = |z|^{\sigma_i}\theta_i(z)$, где $\theta_i\colon \Delta_{Y_i} \to (0, +\infty)$ такова, что

$$\lim_{z\to Y_i,\ z\in\Delta_{Y_i}} z\theta_i'(z)/\theta_i(z) = 0. \tag{7}$$

Будем говорить, что функция $\varphi_i(z)$, где $i \in \{0, 1\}$, удовлетворяет условию S_i, если для любой непрерывно дифференцируемой функции $L\colon \Delta_{Y_i} \to (0; +\infty)$ такой, что

$$\lim_{z\to Y_i,\ z\in\Delta_{Y_i}} zL'(z)/L(z) = 0,$$

имеет место соотношение $\theta_i(zL(z)) = \theta_i(z)(1 + o(1))$ при $z \to Y_i$ $(z \in \Delta_{Y_i})$.

Условию S_i, например, удовлетворяют функции $\varphi_i(z)$, для которых $\theta_i(z)$ имеют конечный предел при $z \to Y_i$, а также функции вида $|z|^{\sigma_i}|\ln|z||^{\mu_i}$, $|z|^{\sigma_i}|\ln|\ln|z|||^{\mu_i}$.

Введем следующие обозначения, полагая

$$I(t) = \int_{A_\omega}^t p(\tau)\,d\tau, \ A_\omega = \begin{cases} a, & \text{если } \int_a^\omega p(\tau)\,d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{если } \int_a^\omega p(\tau)\,d\tau < +\infty, \end{cases}$$

и в случае, когда $\lim\limits_{t\uparrow\omega} |I(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} \operatorname{sign} y_i^0 = Y_i$ $(i \in \{0; 1\})$,

$$J_1(t) = \int_{B_\omega^1}^t \theta_1\left(|I(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} \operatorname{sign} y_1^0\right) |I(\tau)|^{1-\sigma_1} p^{\sigma_1}(\tau)\,d\tau,$$

где $B_\omega^1 = b$, если $\int_b^\omega \theta_1\left(|I(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} \operatorname{sign} y_1^0\right) |I(\tau)|^{1-\sigma_1} p^{\sigma_1}(\tau)\,dt = +\infty$

и $B_\omega^1 = \omega$, если $\int\limits_b^\omega \theta_1\left(|I(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} \operatorname{sign} y_1^0\right) |I(\tau)|^{1-\sigma_1} p^{\sigma_1}(\tau)\,dt < +\infty$,

$$J_2(t) = \int_{B_\omega^2}^t \theta_0\left(|I(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} \operatorname{sign} y_0^0\right) |I(\tau)|^{\sigma_0} p^{1-\sigma_0}(\tau)\,d\tau,$$

где $B_\omega^2 = b$, если $\int\limits_b^\omega \theta_0\left(|I(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} \operatorname{sign} y_0^0\right) |I(\tau)|^{\sigma_0} p^{1-\sigma_0}(\tau)\,dt = +\infty$

и $B_\omega^2 = \omega$, если $\int\limits_b^\omega \theta_0\left(|I(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} \operatorname{sign} y_0^0\right) |I(\tau)|^{\sigma_0} p^{1-\sigma_0}(\tau)\,dt < +\infty$,

а $b \in (a; \omega)$ выбрано так, чтобы $|I(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} \operatorname{sign} y_i^0 \in \Delta_{Y_i}$, $(i \in \{0; 1\})$ при $t \in [b; \omega)$.

Теорема 1. *Пусть соблюдается (6) и функция φ_1 удовлетворяет условию S_1. Тогда для существования у уравнения (1) $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-решений необходимо, а если*

$$\sigma_1 \in R \setminus \{1, 2\}, \quad \textit{либо} \qquad \sigma_1 = 2 \quad \textit{и} \quad \sigma_0 > -1, \tag{8}$$

то и достаточно выполнение условий

$$\lim_{t\uparrow\omega} y_i^0 |I(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} = Y_i \quad (i \in \{0;1\}), \tag{9}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{I(t)J_1'(t)}{p(t)J_1(t)} = 1, \quad \alpha_0 y_0^0 > 0, \quad \alpha_0 y_1^0 (1-\sigma_0-\sigma_1) I(t) > 0, \quad \textit{при } t \in [b,\omega). \tag{10}$$

Для каждого такого решения имеют место при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления

$$\frac{y(t)}{\varphi_0(y(t))|y(t)|^{\sigma_1}} \sim \alpha_0 |1-\sigma_0-\sigma_1|^{2-\sigma_1} |J_1(t)|, \quad \frac{y'(t)}{y(t)} \sim \frac{J_1'(t)}{(1-\sigma_1-\sigma_0)J_1(t)}. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $y\colon [t_0,\omega) \to \mathbb{R}$ — $P_\omega(Y_0;Y_1;1)$-решение уравнения (1). Тогда из равенства

$$\left(\frac{y'(t)}{\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))}\right)' = \frac{y''(t)}{\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))}\left(1 - \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} \cdot \frac{y(t)\varphi_0'(y(t))}{\varphi_0(y(t))} - \frac{y'(t)\varphi_1'(y'(t))}{\varphi_1(y'(t))}\right)$$

с учетом (1), (2) и (5) в случае, когда $\int\limits_a^\omega p(\tau)\,d\tau = +\infty$, следует, что

$$\frac{y'(t)}{\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))} = \alpha_0(1-\sigma_0-\sigma_1)I(t)[1+o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \tag{12}$$

В случае же, когда $\int\limits_a^\omega p(\tau)\,d\tau < +\infty$, получим либо (12), либо

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{y'(t)}{\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))} = c \neq 0. \tag{13}$$

Покажем, что (13) не может иметь места. При $\sigma_1 \neq 1$ в силу первого из условий (5) и (2) функция $\frac{y'(t)}{\varphi_1(y'(t))}$ имеет либо нулевой либо бесконечный предел при $t \uparrow \omega$. Если бы соблюдалось условие (13), то функция $\varphi_0(y(t))$ имела бы соответственно нулевой либо бесконечный предел при $t \uparrow \omega$. При $\sigma_1 = 1$ в силу (4) $\sigma_0 \neq 0$ и аналогично функция $\varphi_0(y(t))$, а значит и функция $\frac{y'(t)}{\varphi_1(y'(t))}$имела бы соответственно нулевой либо бесконечный предел при $t \uparrow \omega$. Поэтому, используя правило Лопиталя получили бы

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{y'(t)}{\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\left[\frac{1}{\varphi_0(y(t))}\right]'}{\left[\frac{\varphi_1(y'(t))}{y'(t)}\right]'} =$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} \, \frac{y'(t)}{\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))} \, \frac{y(t)\varphi_0'(y(t))}{\varphi_0(y(t))} \, \frac{1}{1 - \frac{y'(t)\varphi_1'(y'(t))}{\varphi_1(y'(t))}}.$$

В силу (2) и (5) это означало бы справедливость равенства $c = \begin{cases} \frac{c\sigma_0}{1-\sigma_1} \text{ при } \sigma_1 \neq 1, \\ \infty \text{ при } \sigma_1 = 1, \end{cases}$ которое в совокупности с (4) противоречит (13). Таким образом, (12) имеет место в обоих случаях.

Используя (1), (12) и (5) получаем при $t \uparrow \omega$ асимптотические соотношения

$$\frac{y^{(i+1)}(t)}{y^i(t)} \sim \frac{p(t)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I(t)} \quad (i \in \{0;1\}), \tag{14}$$

из которых следует второе и третье из условий (10). Интегрируя (14) по промежутку $[t_0, t] \subset [t_0, \omega)$, и учитывая определение $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$–решения, имеем

$$ln|y^{(i)}(t)| = \frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1} ln|I(t)|[1+o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega \quad (i \in \{0; 1\}), \tag{15}$$

откуда получаем (9). Положим $\varepsilon(t) = \frac{(1-\sigma_0-\sigma_1)ln|y'(t)|}{ln|I(t)|} - 1$, $L(z) = |I(t(z))|^{\frac{\varepsilon(t(z))}{1-\sigma_0-\sigma_1}}$, где $t(z)$ — функция, обратная для $z = |I(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} \operatorname{sign} y_1^0$. Из (15) следует, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} \varepsilon(t) = 0, \quad |y'(t)| = |I(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} L\left(|I(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} \operatorname{sign} y_1^0\right).$$

Используя (15) и (14) получим $\lim\limits_{z\to Y_1,\ z\in\Delta_{Y_1}} \frac{zL'(z)}{L(z)} = \lim\limits_{t\uparrow\omega} \frac{I(t)}{I'(t)}\left(\varepsilon'(t) ln|I(t)| + \varepsilon(t)\frac{I'(t)}{I(t)}\right) = = \lim\limits_{t\uparrow\omega}(1-\sigma_0-\sigma_1)\left(\frac{I(t)y''(t)}{I'(t)y'(t)} - \frac{ln|y'(t)|}{ln|I(t)|} + \frac{\varepsilon(t)}{1-\sigma_0-\sigma_1}\right) = 0$. Поэтому в силу условия S_1 и (14) соотношение (12) может быть переписано при $t \uparrow \omega$ в виде

$$\frac{y'(t)\operatorname{sign} y_1^0}{\varphi_0(y(t))|y(t)|^{\sigma_1}} = |1-\sigma_0-\sigma_1|^{1-\sigma_1}|I(t)|^{1-\sigma_1}|p(t)|^{\sigma_1}\theta_1\left(y_1^0|I(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\right)[1+o(1)]. \tag{16}$$

Таким образом, с использованием (2), (5), (4) и правила Лопиталя, будем иметь

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{y(t)\operatorname{sign} y_1^0}{J_1(t)\varphi_0(y(t))|y(t)|^{\sigma_1}} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\left[\frac{y(t)\operatorname{sign} y_1^0}{|y_1^0|\varphi_0(y(t))|y(t)|^{\sigma_1}}\right]'}{J_1'(t)} =$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega} \frac{y'(t)\operatorname{sign} y_1^0}{J_1'(t)\varphi_0(y(t))|y(t)|^{\sigma_1}}\left[1 - \frac{y(t)\varphi_0'(y(t))}{\varphi_0(y(t))} - \sigma_1\right] = |1-\sigma_0-\sigma_1|^{1-\sigma_1}(1-\sigma_0-\sigma_1).$$

Отсюда следует первое из представлений (11), из которого с учетом (16) получим второе из представлений (11). В силу второго из представлений (11), четвертого из условий (5), (1) и вида функции J_1 имеет место первое из условий (10).

Достаточность. Пусть наряду с (9) и (10) соблюдаются условия (8). Рассмотрим функцию $\Phi(y) = \int_{Y_0^*}^{y} \frac{dz}{\varphi_0(z)|z|^{\sigma_1}}$, где $Y_0^* = y_0^0$, если $\left|\int_{y_0^0}^{Y_0} \frac{dz}{\varphi_0(z)|z|^{\sigma_1}}\right| = +\infty$, $Y_0^* = Y_0$, если $\left|\int_{y_0^0}^{Y_0} \frac{dz}{\varphi_0(z)|z|^{\sigma_1}}\right| < +\infty$. Поскольку Φ строго монотонна на Δ_{Y_0} и $\lim\limits_{y\to Y_0,\ y\in\Delta_{Y_0}} \Phi(y) = \Phi_0 = = \begin{cases} \pm\infty, & \text{если } Y_0^* = y_0^0, \\ 0, & \text{если } Y_0^* = Y_0, \end{cases}$ то для неё существует обратная функция Φ^{-1}, заданная в силу (2) на промежутке $\Delta_{\Phi_0} = [C_{\varphi_0}, \Phi_0)$, если $C_{\varphi_0} < \Phi_0$, $\Delta_{\Phi_0} = (\Phi_0, C_{\varphi_0}]$, если $C_{\varphi_0} > \Phi_0$, где $C_{\varphi_0} = \int_{Y_0^*}^{y_0^0} \frac{dz}{\varphi_0(z)|z|^{\sigma_1}}$, причем

$$\lim_{z\to\Phi_0,\ z\in\Delta_{\Phi_0}} \Phi^{-1}(z) = Y_0. \tag{17}$$

Кроме того, согласно правилу Лопиталя

$$\lim_{y\to Y_0,\ y\in\Delta_{Y_0}} \frac{\Phi(y)\varphi_0(y)|y|^{\sigma_1}}{y} = \frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}. \tag{18}$$

Уравнение (1) с помощью преобразования

$$\Phi(y(t)) = \frac{J_1(t)\operatorname{sign} y_1^0}{|1-\sigma_0-\sigma_1|^{\sigma_1-1}}[1+z_1(x)], \qquad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{J_1^*(t)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)J_1(t)}[1+z_2(x)], \tag{19}$$

где

$$
\begin{gathered}
x=\beta \\
ln|J_1(t)|, \quad \beta=\text{sign }(\alpha_0 y_1^0(1-\sigma_0-\sigma_1)), \\
J_1^*(t)=\Big||J_1(t)|^{-\sigma_1}I(t)\theta_1\left(y_1^0|I(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\right)\Big|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}
\end{gathered} \tag{20}
$$

сведем, учитывая первое из условий (10) к системе дифференциальных уравнений

$$
\begin{cases} z_1'=\beta\big[-1-z_1+\frac{B}{C}F(x,z_1)(1+z_2)\big], \\ z_2'=\beta(1+z_2)\Big[\big|BG(x)(1+z_2)\big|^{\sigma_1-1}\frac{K(x,z_1,z_2)}{F(x,z_1)\text{sign }y_1^0}-\frac{BJ_1^*(t(x))}{J_1'(t(x))}(z_2+1)+M(x)\Big], \end{cases} \tag{21}
$$

в которой $B=\dfrac{1}{1-\sigma_1-\sigma_0}$, $\quad C=|1-\sigma_0-\sigma_1|^{1-\sigma_1}(\text{sign }y_1^0)$,

$$
F(x,z_1)=\frac{Y(t(x),z_1)}{J_1(t(x))\varphi_0(Y(t(x),z_1))|Y(t(x),z_1)|^{\sigma_1}}, \quad G(x)=\frac{I(t(x))J_1^*(t(x))}{P(t(x))J_1(t(x))},
$$

$$
M(x)=\frac{1}{1-\sigma_1}\left(1-\frac{J_1^*(t(x))}{J_1'(t(x))G(x)}\left[1+\frac{|I(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}(\text{sign }y_1^0)\theta_1'\big(|I(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\text{sign }y_1^0\big)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)\theta_1\big(|I(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\text{sign }y_1^0\big)}\right]\right),
$$

$$
K(x,z_1,z_2)=\frac{\theta_1(Y^{[1]}(t(x),z_1,z_2))}{\theta_1\big(|I(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\text{sign }y_1^0\big)},
$$

$$
Y(t,z_1)=\Phi^{-1}(CJ_1(t)(1+z_1)), \quad Y^{[1]}(t,z_1,z_2)=\frac{BY(t,z_1)J_1^*(t)}{J_1(t)}(1+z_2).
$$

Из определения функции J_1 с учетом первого из условий (10) следует, что

$$
\lim_{t\uparrow\omega}J_1'(t)/J_1^*(t)=1 \tag{22}
$$

В силу (17), (6), (9) и первого из условий (10), $\lim\limits_{t\uparrow\omega}Y(t,\xi)=Y_0$ при $|\xi|\leq\frac{1}{2}$. С использованием правила Лопиталя и (2) для каждого такого ξ находим

$$
\begin{gathered}
\lim_{t\uparrow\omega}\frac{Y(t,\xi)}{J_1(t)\varphi_0(Y(t,\xi))|Y(t,\xi)|^{\sigma_1}}=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\big[\frac{Y(t,\xi)}{\varphi_0(Y(t,\xi))|Y(t,\xi)|^{\sigma_1}}\big]'}{J_1'(t)}= \\
=\lim_{t\uparrow\omega}C(1+\xi)\big[1-\sigma_1-\frac{Y(t,\xi)\varphi_0'(Y(t,\xi))}{\varphi_0(Y(t,\xi))}\big]=\frac{C(1+\xi)}{B}.
\end{gathered}
$$

Тогда с учетом (9), (7),(10) и (22) при $t\uparrow\omega$ будем иметь

$$
\frac{I(t)\big(Y^{[1]}(t,\xi,0)\big)'}{I'(t)Y^{[1]}(t,\xi,0)}=G(x(t))\big(C(1+\xi)\frac{J_1(t)\varphi_0(Y(t,\xi))}{Y(t,\xi)|Y(t,\xi)|^{-\sigma_1}}-\frac{J_1'(t)}{J_1^*(t)}M(x(t))\big)\sim B \tag{24}
$$

Это означает, что $|Y^{[1]}(t,\xi,0)|=|I(t)|^{\frac{1+o(1)}{1-\sigma_0-\sigma_1}}$ при $t\uparrow\omega$. Так как в силу монотонности функции Φ^{-1} имеет место одно из неравенств

$$
\begin{gathered}
\tfrac{1}{2}\big|Y^{[1]}\big(t,\tfrac{1}{2},0\big)\big|<\big|Y^{[1]}(t,z_1,z_2)\big|<\tfrac{3}{2}\big|Y^{[1]}\big(t,\tfrac{3}{2},0\big)\big| \quad \text{при} \quad |z_i|\leq\tfrac{1}{2}, \\
\tfrac{1}{2}\big|Y^{[1]}\big(t,\tfrac{3}{2},0\big)\big|<\big|Y^{[1]}(t,z_1,z_2)\big|<\tfrac{3}{2}\big|Y^{[1]}\big(t,\tfrac{1}{2},0\big)\big| \quad \text{при} \quad |z_i|\leq\tfrac{1}{2},
\end{gathered}
$$

то учитывая (9) и (10), можно выбрать число $t_0\in[a,\omega)$ так, чтобы $Y(t(x),z_1)\in\Delta_{Y_0}$, $Y^{[1]}(t,z_1,z_2)\in\Delta_{Y_1}$, $|I(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\text{sign }y_1^0\in\Delta_{Y_1}$ при $t\in[t_0,\omega)$ и $|z_i|\leq\frac{1}{2}$ $(i\in\{1;2\})$.

Теперь рассмотрим систему дифференциальных уравнений (21) на множестве

$$
\Omega=[x_0,+\infty)\times D, \quad \text{где} \quad x_0=\beta \quad ln|J_1(t_0)|, \quad D=\big\{(z_1,z_2)\colon |z_i|\leq\frac{1}{2},\ i\in\{1;2\}\big\}.
$$

На этом множестве правые части системы (21) являются непрерывными функциями по переменной x и дважды непрерывно дифференцируемыми по переменным z_1,z_2, причем

$$F'_{z_1}(x,z_1)=C\big(1-\sigma_1-\frac{Y(t(x),z_1)\varphi_0'(Y(t(x),z_1))}{\varphi_0(Y(t(x),z_1))}\big),$$
$$F''_{z_1^2}(x,z_1)=-\frac{C^2Y(t(x),z_1)\varphi_0'(Y(t(x),z_1))}{\varphi_0(Y(t(x),z_1))F(x,z_1)}\times$$
$$\times\big[1-\frac{Y(t(x),z_1)\varphi_0'(Y(t(x),z_1))}{\varphi_0(Y(t(x),z_1))}+\frac{Y(t(x),z_1)\varphi_0''(Y(t(x),z_1))}{\varphi_0'(Y(t(x),z_1))}\big],$$
$$K'_{z_1}(x,z_1,z_2)=\frac{C}{F(x,z_1)}\,\frac{Y^{[1]}(t(x),z_1,z_2)\theta_1'\big(Y^{[1]}(t(x),z_1,z_2)\big)}{\theta_1\big(|I(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\operatorname{sign} y_1^0\big)},\quad K'_{z_2}(x,z_1,z_2)=$$
$$=\frac{Y^{[1]}(t(x),z_1,z_2)\theta_1'(Y^{[1]}(t(x),z_1,z_2))}{(1+z_2)\theta_1\big(|I(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\operatorname{sign} y_1^0\big)},\quad K''_{z_1^2}(x,z_1,z_2)=K'_{z_1}(x,z_1,z_2)\frac{C}{F(x,z_1)}\times$$
$$\times\big[\frac{Y^{[1]}(t(x),z_1,z_2)\theta_1''\big(Y^{[1]}(t(x),z_1,z_2)\big)}{\theta_1'(Y^{[1]}(t(x),z_1,z_2))}-\frac{F'_{z_1}(x,z_1)}{C}+1\big],$$
$$K''_{z_2^2}(x,z_1,z_2)=K'_{z_2}(x,z_1,z_2)\frac{Y^{[1]}(t(x),z_1,z_2)\theta_1''(Y^{[1]}(t(x),z_1,z_2))}{(1+z_2)\theta_1'(Y^{[1]}(t(x),z_1,z_2))},$$
$$K''_{z_2,z_1}(x,z_1,z_2)=\frac{K'_{z_1}(x,z_1,z_2)}{1+z_2}\big[\frac{Y^{[1]}(t(x),z_1,z_2)\theta_1''(Y^{[1]}(t(x),z_1,z_2))}{\theta_1'(Y^{[1]}(t(x),z_1,z_2))}+1\big].$$

Разложив при каждом фиксированном $x\in[x_0,+\infty)$ функции $F(x,z_1)$ и $\frac{1}{F(x,z_1)}$ по формуле Тейлора с остатком в форме Лагранжа в окрестности $z_1=0$ до второго порядка включительно, функцию $K(x,z_1,z_2)$ — в окрестности точки $(z_1,z_2)=(0,0)$, а функцию $|1+z_2|^{\sigma_1-1}$ — в окрестности точки $z_2=0$, перепишем систему (21) в виде

$$\begin{cases} z_1'=F_1(x)+A_{11}(x)z_1+A_{12}(x)z_2+R_1(x,z_1,z_2),\\ z_2'=F_2(x)+A_{21}(x)z_1+A_{22}(x)z_2+R_2(x,z_1,z_2),\end{cases}\tag{25}$$

где $F_1(x)=\beta\big[\frac{B}{C}F(x,0)-1\big]$, $F_2(x)=\beta\big[\big|BG(x)\big|^{\sigma_1-1}\frac{K(x,0,0)\operatorname{sign} y_1^0}{F(x,0)}-\frac{BJ_1^*(t(x))}{J_1'(t(x))}+M(x)\big]$,

$$A_{11}(x)=\beta\big[\frac{B}{C}F'_{z_1}(x,0)-1\big],\quad A_{12}(x)=\beta\frac{B}{C}F(x,0),$$
$$A_{21}(x)=\beta\big|BG(x)\big|^{\sigma_1-1}\big[\frac{K'_{z_1}(x,0,0)}{F(x,0)}-\frac{F'_{z_1}(x,0)}{F^2(x,0)}K(x,0,0)\big]\operatorname{sign} y_1^0,$$
$$A_{22}(x)=\beta F_2(x)-\beta\frac{BJ_1^*(t(x))}{J_1'(t(x))}+\frac{\beta\big|BG(x)\big|^{\sigma_1-1}}{F(x,0)\operatorname{sign} y_1^0}\big[(\sigma_1-1)K(x,0,0)+K'_{z_2}(x,0,0)\big],$$
$$R_1(x,z_1,z_2)=\frac{\beta B}{C}\big[F'(x,0)z_1z_2+\frac{1}{2}F''(x,\xi_1)z_1^2(1+z_2)\big]\operatorname{sign} y_1^0,$$
$$R_2(x,z_1,z_2)=\beta[A_{21}(x)z_1z_2+(A_{22}-F_2(x))z_2^2]+\beta(1+z_2)|BG(x)|^{\sigma_1-1}\operatorname{sign} y_1^0\times$$
$$\times\big[\frac{F(x,0)-F'(x,0)z_1}{2F^2(x,0)}\big(|1+\xi_2|^{\sigma_1-3}(\sigma_1-2)(\sigma_1-1)\big(K(x,0,0)-\sum_{i=1}^{2}K'_{z_i}(x,0,0)z_i\big)z_2^2+$$
$$+2(\sigma_1-1)\sum_{i=1}^{2}K'_{z_i}(x,0,0)z_iz_2+|1+z_2|^{\sigma_1-1}\sum_{i,j=1}^{2}K''_{z_iz_j}(x,\xi_3,\xi_4)z_iz_j\big)-\frac{F'(x,0)}{F^2(x,0)}\times$$
$$\times\big((\sigma_1-1)K(x,0,0)z_2z_1+\sum_{i=1}^{2}K'_{z_i}(x,0,0)z_iz_1\big)+$$
$$+\frac{1}{2}\big(\frac{2(F'(x,\xi_5))^2}{(F(x,\xi_5))^3}-\frac{F''(x,\xi)}{F^2(x,\xi_5)}\big)K(x,z_1,z_2)|1+z_2|^{\sigma_1-1}z_1^2\big],$$
$$|\xi_i|<|z_i|\le\frac{1}{2}\quad(i\in\{1,...,5\}).$$

Учитывая (24) и то, что функция $\varphi_1(z)$ удовлетворяет условию S_1, имеем
$$\theta_1\left(Y^{[1]}(t(x),0,0)\right)=\theta_1\left(|I(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\operatorname{sign}y_1^0\right)(1+o(1))\quad \text{при } x\to+\infty.$$
Отсюда $\lim\limits_{x\to+\infty}K(x,0,0)=1$ и согласно (7) $\lim\limits_{x\to+\infty}K'_{z_i}(x,0,0)=0$ $(i\in\{1,2\})$. Поэтому в силу (23), условий (9), (10) и (22) получим, что $\lim\limits_{x\to+\infty}F_i(x)=0$ $(i\in\{1;2\})$, предельная матрица коэффициентов линейной части системы (25) имеет вид
$$A=\lim_{x\to+\infty}\begin{pmatrix}A_{11}(x) & A_{12}(x)\\ A_{21}(x) & A_{22}(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \beta\\ -\beta B & \beta B(\sigma_1-2)\end{pmatrix}$$
и $\lim\limits_{|z_1|+|z_2|\to0}\dfrac{R_i(x,z_1,z_2)}{|z_1|+|z_2|}=0$ $(i\in\{1;2\})$ равномерно по $x\in[x_0,+\infty)$. Запишем для матрицы A характеристическое уравнение $\det[A-\nu E_2]=0$, где E_2–единичная матрица второго порядка:
$$\nu^2-\beta B(\sigma_1-2)\nu+B=0$$
В силу (8) у этого уравнения нет корней с нулевой действительной частью. Таким образом, для системы дифференциальных уравнений (25) выполнены все условия теоремы 2.1 из [12]. Согласно этой теореме система (21) имеет хотя бы одно решение $\{z_i\}_{i=1}^2\colon[x_1,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}^2$ $(x_1\geq x_0)$, стремящееся к нулю при $x\to+\infty$. Ему в силу замен (19), (20), а также соотношения (22) соответствует решение y уравнения (1), допускающее при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления $\Phi(y(t))\sim CJ_1(t)$, $\frac{y'(t)}{y(t)}\sim\frac{J_1'(t)}{(1-\sigma_1-\sigma_0)J_1(t)}$. Используя (18), первое из них перепишем в виде $\frac{y(t)}{\varphi_0(y(t))|y(t)|^{\sigma_1}}\sim C(1-\sigma_0-\sigma_1)J_1(t)$ при $t\uparrow\omega$. Отсюда, с учетом (1), (9), (10), а также условия S_1 следует, что y является $P_\omega(Y_0,Y_1,1)$–решением уравнения (1). Теорема 1 полностью доказана. □

Теорема 2. *Пусть выполняется (6) и функция φ_0 удовлетворяет условию S_0. Тогда для существования у уравнения (1) $P_\omega(Y_0,Y_1,1)$-решений необходимо, а если*
$$\sigma_0\in R\setminus\{0\},\ \sigma_1\in R\setminus\{2\},\ \text{либо}\ \ \sigma_1=2\ \text{и}\ \sigma_0>-1, \tag{26}$$
то и достаточно выполнение (9), а также второго и третьего из условий (10) в совокупности с условием
$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{I(t)J_2'(t)}{p(t)J_2(t)}=1. \tag{27}$$
Для каждого такого решения имеют место при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления
$$\frac{y'(t)}{\varphi_1(y'(t))|y'(t)|^{\sigma_0}}\sim\alpha_0|1-\sigma_0-\sigma_1|^{\sigma_0}(1-\sigma_0-\sigma_1)J_2(t),\quad \frac{y'(t)}{y(t)}\sim\frac{J_2'(t)}{(1-\sigma_1-\sigma_0)J_2(t)}. \tag{28}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $y\colon[t_0,\omega)\to\mathbb{R}$ — $P_\omega(Y_0;Y_1;1)$-решение уравнения (1). Так же, как и при доказательстве теоремы 1, получим (12), (14) и (15), откуда следуют (9), а также второе и третье из условий (10). Аналогично тому, как это делалось при доказательстве теоремы 1, в силу условия S_0 и (15) соотношение (12) может быть переписано при $t\uparrow\omega$ в виде
$$\frac{y''(t)}{\varphi_1(y'(t))|y'(t)|^{\sigma_0}}=\alpha_0|1-\sigma_0-\sigma_1|^{\sigma_0}|I(t)|^{\sigma_0}|p(t)|^{1-\sigma_0}\theta_0\left(\alpha_0|I(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\right)[1+o(1)]. \tag{29}$$

Отсюда, с использованием (2), (5), (4) и правила Лопиталя, получим

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{y'(t)}{J_2(t)\varphi_1(y'(t))|y'(t)|^{\sigma_0}}=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\left[\frac{y'(t)}{\varphi_1(y'(t))|y'(t)|^{\sigma_0}}\right]'}{J_2'(t)}=$$
$$=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{y''(t)}{J_2'(t)\varphi_1(y'(t))|y'(t)|^{\sigma_0}}\Big[1-\frac{y'(t)\varphi_1'(y'(t))}{\varphi_1(y'(t))}-\sigma_0\Big]=\alpha_0|1-\sigma_0-\sigma_1|^{\sigma_0}(1-\sigma_0-\sigma_1).$$

Из данного соотношения следует первое из представлений (28). Из первого из представлений (28) с учетом (29) получим второе из представлений (28). В силу второго из представлений (28), четвертого из условий (5), (1) и вида функции J_2 имеет место (27).

Достаточность. Пусть выполняются условия (27), (26), (9), а также второе и третье из условий (10). Рассмотрим функцию

$$\Phi(z)=\int_{Y_1^*}^{z}\frac{d\tau}{\varphi_1(\tau)|\tau|^{\sigma_0}},$$

где $Y_1^*=y_1^0$, если $\Big|\int\limits_{y_0^1}^{Y_1}\frac{dz}{\varphi_1(z)|z|^{\sigma_0}}\Big|=+\infty$, и $Y_1^*=Y_1$, если $\Big|\int_{y_0^1}^{Y_1}\frac{dz}{\varphi_1(z)|z|^{\sigma_0}}\Big|<+\infty$. Поскольку Φ строго монотонна на Δ_{Y_1} и $\lim\limits_{z\to Y_1,\ z\in\Delta_{Y_1}}\Phi(z)=\Phi_1=\begin{cases}\pm\infty, & \text{если } Y_1^*=y_1^0,\\ 0, & \text{если } Y_1^*=Y_1,\end{cases}$ то для неё существует обратная функция Φ^{-1}, заданная в силу (2) на промежутке $\Delta_{\Phi_1}=[C_{\varphi_1},\Phi_1)$, если $C_{\varphi_1}<\Phi_1$, $\Delta_{\Phi_1}=(\Phi_1,C_{\varphi_1}]$, если $C_{\varphi_1}>\Phi_1$, где $C_{\varphi_1}=\int_{Y_1^*}^{y_1^0}\frac{dz}{\varphi_1(z)|z|^{\sigma_0}}$, причем

$$\lim_{z\to\Phi_1,\ z\in\Delta_{\Phi_1}}\Phi^{-1}(z)=Y_1. \tag{30}$$

Кроме того, согласно правилу Лопиталя

$$\lim_{z\to Y_1,\ z\in\Delta_{Y_1}}\frac{\Phi(z)\varphi_1(z)|z|^{\sigma_0}}{z}=\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}. \tag{31}$$

Уравнение (1) с помощью преобразования

$$\Phi(y'(t))=\alpha_0|1-\sigma_0-\sigma_1|^{\sigma_0}J_2(t)[1+z_1(x)],\qquad \frac{y'(t)}{y(t)}=\frac{J_2^*(t)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)J_2(t)}[1+z_2(x)], \tag{32}$$

где

$$x=\beta ln|J_2(t)|,\ \beta=\text{sign}\ (\alpha_0y_1^0(1-\sigma_0-\sigma_1)),\ J_2^*(t)=\Big||J_2(t)|^{\sigma_0-1}I(t)\theta_0\Big(\alpha_0|I(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\Big)\Big|^{\frac{1}{\sigma_0}} \tag{33}$$

сведем, учитывая (27), к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} z_1'=\beta\big[-1-z_1+\frac{K(x,z_1,z_2)}{G(x)}|1+z_2|^{-\sigma_0}\big],\\ z_2'=\beta(1+z_2)\big[\big|1+z_2\big|^{-\sigma_0}\frac{CK(x,z_1,z_2)}{F(x,z_1)G(x)}-\frac{BJ_2^*(t(x))}{J_2'(t(x))}(z_2+1)+M(x)\big],\end{cases} \tag{34}$$

в которой $B=\dfrac{1}{1-\sigma_1-\sigma_0}$, $\quad C=\alpha_0|1-\sigma_0-\sigma_1|^{\sigma_0}$, $K(x,z_1,z_2)=\dfrac{\theta_0(Y(t(x),z_1,z_2))}{\theta_0\big(\alpha_0|I(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\big)}$,

$$F(x,z_1)=\frac{Y^{[1]}(t(x),z_1)}{J_2(t(x))\varphi_1(Y^{[1]}(t(x),z_1))|Y^{[1]}(t(x),z_1)|^{\sigma_0}},\quad G(x)=\frac{I(t(x))J_2'(t(x))}{P(t(x))J_2(t(x))},$$
$$M(x)=\frac{1}{\sigma_0}-\frac{1}{\sigma_0G(x)}\left[1+\frac{\alpha_0|I(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\theta_0'\big(\alpha_0|I(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\big)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)\theta_0\big(\alpha_0|I(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\big)}\right],$$

$$Y^{[1]}(t,z_1)=\Phi^{-1}(CJ_2(t)(1+z_1)),\quad Y(t,z_1,z_2)=\frac{BY^{[1]}(t,z_1)J_2^*(t)}{J_2(t)}(1+z_2).$$

Из определения функции J_2 с учетом (27) следует, что

$$\lim_{t\uparrow\omega}J_2'(t)/J_2^*(t)=1. \tag{35}$$

В силу (30), (6), (27), (9) и третьего из условий (10), $\lim\limits_{t\uparrow\omega}Y^{[1]}(t,\xi)=Y_1$ при $|\xi|\le\frac12$. С использованием правила Лопиталя и (2) для каждого такого ξ находим

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{Y^{[1]}(t,\xi)}{J_2(t)\varphi_1(Y^{[1]}(t,\xi))|Y^{[1]}(t,\xi)|^{\sigma_1}}=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\Big[\frac{Y^{[1]}(t,\xi)}{\varphi_1(Y^{[1]}(t,\xi))|Y^{[1]}(t,\xi)|^{\sigma_0}}\Big]'}{J_2'(t)}=$$

$$=\lim_{t\uparrow\omega}C(1+\xi)\Big[1-\sigma_0-\frac{Y^{[1]}(t,\xi)\varphi_1'(Y^{[1]}(t,\xi))}{\varphi_1(Y^{[1]}(t,\xi))}\Big]=\frac{C(1+\xi)}{B}. \tag{36}$$

Тогда с учетом (7), (9) и (35) при $t\uparrow\omega$ будем иметь

$$\frac{I(t)\big(Y(t,\xi,0)\big)'}{I'(t)Y(t,\xi,0)}=G(x(t))\bigg(C(1+\xi)\frac{J_2(t)\varphi_1(Y^{[1]}(t,\xi))}{Y^{[1]}(t,\xi)|Y^{[1]}(t,\xi)|^{-\sigma_0}}-\frac{J_2'(t)}{J_2^*(t)}M(x(t))\bigg)\sim B \tag{37}$$

Это означает, что $|Y(t,\xi,0)|=|I(t)|^{\frac{1+o(1)}{1-\sigma_0-\sigma_1}}$ при $t\uparrow\omega$. Так как в силу монотонности функции Φ^{-1} имеет место одно из неравенств

$$\tfrac12\big|Y(t,\tfrac12,0)\big|<\big|Y(t,z_1,z_2\big|<\tfrac32\big|Y(t,\tfrac32,0)\big|\quad\text{при}\quad |z_i|\le\tfrac12,$$
$$\tfrac12\big|Y(t,\tfrac32,0)\big|<\big|Y(t,z_1,z_2)\big|<\tfrac32\big|Y(t,\tfrac12,0)\big|\quad\text{при}\quad |z_i|\le\tfrac12,$$

то учитывая (9), второе и третье из условий (10), можно выбрать число $t_0\in[a,\omega)$ так, чтобы $Y(t(x),z_1)\in\Delta_{Y_0}$, $Y^{[1]}(t,z_1,z_2)\in\Delta_{Y_1}$, $\alpha_0|I(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\in\Delta_{Y_0}$ при $t\in[t_0,\omega)$ и $|z_i|\le\frac12$ $(i\in\{1;2\})$.

Теперь рассмотрим систему дифференциальных уравнений (34) на множестве

$$\Omega=[x_0,+\infty)\times D,\text{где } x_0=\beta\quad\ln|J_2(t_0)|,\ D=\{(z_1,z_2)\colon |z_i|\le\frac12,\ i\in\{1;2\}\}.$$

На этом множестве правые части системы (34) являются непрерывными функциями по переменной x и дважды непрерывно дифференцируемыми по переменным z_1,z_2. Разложив при каждом фиксированном $x\in[x_0,+\infty[$ функцию $\frac{1}{F(x,z_1)}$ по формуле Тейлора с остатком в форме Лагранжа в окрестности $z_1=0$ до второго порядка включительно, функцию $K(x,z_1,z_2)$ — в окрестности точки $(z_1,z_2)=(0,0)$, а функцию $|1+z_2|^{-\sigma_0}$ — в окрестности точки $z_2=0$, перепишем систему (34) в виде

$$\begin{cases} z_1'=F_1(x)+A_{11}(x)z_1+A_{12}(x)z_2+R_1(x,z_1,z_2),\\ z_2'=F_2(x)+A_{21}(x)z_1+A_{22}(x)z_2+R_2(x,z_1,z_2),\end{cases} \tag{38}$$

где $F_1(x)=\beta\Big[\dfrac{K(x,0,0)}{G(x)}-1\Big]$, $F_2(x)=\beta\Big[\dfrac{CK(x,0,0)}{G(x)F(x,0)}-\dfrac{BJ_1^*(t(x))}{J_1'(t(x))}+M(x)\Big]$,

$$A_{11}(x)=\beta\Big[\frac{K'_{z_1}(x,0,0)}{G(x)}-1\Big],\quad A_{12}(x)=\frac{\beta K(x,0,0)}{G(x)}\Big[\frac{K'_{z_2}(x,0,0)}{K(x,0,0)}-\sigma_0\Big],$$

$$A_{21}(x)=\beta\frac{CK(x,0,0)}{F(x,0)G(x)}\Big[\frac{K'_{z_1}(x,0,0)}{K(x,0,0)}-\frac{F'_{z_1}(x,0)}{F(x,0)}\Big],$$

$$A_{22}(x)=\beta F_2(x)-\beta\frac{BJ_2^*(t(x))}{J_2'(t(x))}+\frac{\beta CK(x,0,0)}{G(x)F(x,0)}\Big[(1-\sigma_0+\frac{K'_{z_2}(x,0,0)}{K(x,0,0)}\Big],$$

$$R_1(x,z_1,z_2)=\frac{\beta}{2G(x)}\times$$
$$\times\big((1+z_2)^{-\sigma_0}\sum_{i,j=1}^{2}K''_{z_iz_j}(x,\xi_1,\xi_2)z_iz_j-\sigma_0\sum_{i=1}^{2}K'_{z_i}(x,0,0)z_iz_2+\frac{\sigma_0(\sigma_0+1)}{|1+\xi_3|^{\sigma_0+2}}K(x,0,0)z_2^2\big),$$
$$R_2(x,z_1,z_2)=\beta A_{21}(x)z_1z_2+\beta(A_{22}(x)-F_2(x))z_2^2+\beta\frac{\alpha_0|B|^{-\sigma_0}}{G(x)}\times$$
$$\times\big[\frac{F(x,0)-F'(x,0)z_1}{2F^2(x,0)}\big(\frac{\sigma_0(\sigma_0+1)}{|1+\xi_3|^{\sigma_0+2}}\big(K(x,0,0)+\sum_{i=1}^{2}K'_{z_i}(x,0,0)z_i\big)z_2^2-$$
$$-2\sigma_0\sum_{i=1}^{2}K'_{z_i}(x,0,0)z_iz_2+|1+z_2|^{-\sigma_0}\sum_{i,j=1}^{2}K'_{z_iz_j}(x,\xi_4,\xi_5)z_iz_j\big)-$$
$$-\frac{F'(x,0)}{F^2(x,0)}\big(\sum_{i=1}^{2}K'_{z_i}(x,0,0)z_iz_1-\sigma_0K(x,0,0z_2z_1\big)+$$
$$+\frac{(F'(x,\xi_6))^2}{(F(x,\xi_6))^3}\big(1-\frac{1}{2}F(x,\xi_6)F''(x,\xi_6)\big)K(x,z_1z_2)|1+z_2|^{-\sigma_0}z_1^2\big],$$
$$|\xi_i|<|z_i|\le\frac{1}{2}\quad(i\in\{1,...,6\}).$$

Учитывая (37) и то, что функция $\varphi_0(z)$ удовлетворяет условию S_0, имеем
$$\theta_0\left(Y(t(x),0,0)\right)=\theta_0\left(|I(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\operatorname{sign}y_0^0\right)(1+o(1))\ \text{при}\ x\to+\infty.$$
Отсюда $\lim\limits_{x\to+\infty}K(x,0,0)=1$ и согласно (1.2) $\lim\limits_{x\to+\infty}K'_{z_i}(x,0,0)=0$ $(i\in\{1,2\})$. Поэтому в силу (36), (9), второго и третьего из условий (10), (27) и (35) получим, что $\lim\limits_{x\to+\infty}F_i(x)=0$ $(i\in\{1;2\})$, предельная матрица коэффициентов линейной части системы (38) имеет вид $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\begin{pmatrix}A_{11}(x)&A_{12}(x)\\A_{21}(x)&A_{22}(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\beta&-\beta\sigma_0\\-\beta B&-\beta B(\sigma_0+1)\end{pmatrix}$
и $\lim\limits_{|z_1|+|z_2|\to0}\dfrac{R_i(x,z_1,z_2)}{|z_1|+|z_2|}=0$ $(i\in\{1;2\})$ равномерно по $x\in[x_0,+\infty[$. Запишем для матрицы A характеристическое уравнение $\det[A-\nu E_2]=0$, где E_2 — единичная матрица второго порядка:
$$\nu^2-\beta B(\sigma_1-2)\nu+B=0$$
В силу (26) у этого уравнения нет корней с нулевой действительной частью. Таким образом, для системы дифференциальных уравнений (38) выполнены все условия теоремы 2.1 из [12]. Согласно этой теореме система (34) имеет хотя бы одно решение $\{z_i\}_{i=1}^2\colon[x_1,+\infty)\to\mathbb{R}^2$ $(x_1\ge x_0)$, стремящееся к нулю при $x\to+\infty$. Ему в силу замен (32), (33) а также (35) соответствует решение y уравнения (1), допускающее при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления $\Phi(y'(t))\sim C_2J_2(t)$, $\frac{y'(t)}{y(t)}\sim\frac{J_2'(t)}{(1-\sigma_1-\sigma_0)J_2(t)}$. Используя (31), первое из них перепишем в виде $\dfrac{y'(t)}{\varphi_1(y'(t))|y'(t)|^{\sigma_0}}\sim C_2(1-\sigma_0-\sigma_1)J_2(t)$ при $t\uparrow\omega$.
Отсюда с учетом (1), S_0, (9), второго и третьего из условий (10), (27), y является $P_\omega(Y_0,Y_1,1)$–решением уравнения (1). Теорема 2 полностью доказана. □

Теорема 3. *Пусть соблюдается (6) и при каждом значении $i\in\{0,1\}$ функция $\varphi_i(z)$ удовлетворяет условию S_i. Тогда для существования у уравнения (1) $P_\omega(Y_0,Y_1,1)$-решений необходимо , а если $\sigma_1\in R\setminus\{2\}$, либо $\sigma_1=2$ и $\sigma_0>-1$, то и достаточно выполнение условий (9), (10), (27). Более того, для каждого $P_\omega(Y_0,Y_1,1)$-решения имеют место при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления*

$$y(t) \sim \alpha_0\Big(\big|(1-\sigma_0-\sigma_1)I(t)\big|^{2-\sigma_1}p^{\sigma_1-1}(t)\prod_{i=0}^{1}\theta_i\big(|I(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\operatorname{sign}\, y_i^0\big)\Big)^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}},$$

$$y'(t) \sim \Big(p(t)\Big|\frac{(1-\sigma_0-\sigma_1)I(t)}{p(t)}\Big|^{1+\sigma_0}\prod_{i=0}^{1}\theta_i\big(|I(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\operatorname{sign}\, y_i^0\big)\Big)^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\operatorname{sign}\, y_1^0.$$

Доказательство. Так как при каждом значении $i \in \{0,1\}$ функция $\varphi_i(z)$ удовлетворяет условию S_i, из теорем 1 и 2 следует, что для существования у уравнения (1) $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$–решений необходимо, а если $\sigma_1 \in R\backslash\{2\}$, либо $\sigma_1 = 2$ и $\sigma_0 > -1$, то и достаточно выполнения условий (9), (10) и (27). Кроме того, для каждого такого решения $y\colon [t_0,\omega) \to \mathbb{R}$ в силу (12), (16) и (29) получим $\theta_i(y^{(i)}) \sim \theta_i\big(|I(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1-\sigma_0}}\operatorname{sign}\, y_i^0\big)$ при $t \uparrow \omega$ $(i \in \{0;1\})$. Используя данное соотношение, перепишем (12) в виде

$$\frac{y'(t)}{|y(t)|^{\sigma_0}|y'(t)|^{\sigma_1}} \sim \alpha_0(1-\sigma_0-\sigma_1)I(t)\prod_{i=0}^{1}\theta_i\big(|I(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\operatorname{sign}\, y_i^0\big) \text{ при } t \uparrow \omega.$$

Отсюда, учитывая (14), получаем требуемые асимптотические соотношения.
Теорема 3 полностью доказана. □

ЛИТЕРАТУРА

1. Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. – 1990. – М.: Наука. – 430с.
2. Костин А.В., Евтухов В.М. *Асимптотика решений одного нелинейного дифференциального уравнения*// Докл. АН СССР.– 1976.– Т. 231, № 5.– С. 1059–1062.
3. Евтухов В.М. *Об одном нелинейном дифференциальном уравнении второго порядка*// Докл. АН СССР.– 1977.– Т. 233, № 4.– С. 531–534.
4. Евтухов В.М. *Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка*// Сообщ. АН ГССР.– 1982.– Т. 106, № 3.– С. 473–476.
5. Евтухов В.М. *Асимптотика решений одного полулинейного дифференциального уравнения второго порядка*// Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26, № 5. – С. 776 – 787.
6. Wong P.K. *Existence and asymptotic behavior of proper solutions of a class of second-order nonlinear differential equations*// Pacific. J.Math. – 1963. – V. 13. – P. 737–760.
7. Marić V., Tomić M. *Asymptotic properties of solutions of the equation* $y'' = f(x)\Phi(y)$// Math. Zeit. – 1976. – V. 149. – P. 261–266.
8. Talliaferro S.D. *Asymptotic behavior of the solutions of the equation* $y'' = \Phi(t)f(y)$// SIAM J. Math. Anal. – 1981. – T. 12, № 6. – P. 1–24.
9. Кирилова Л.О. *Асимптотичні властивості розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь другого поряд-ку, які близькі до рівнянь типу Емдена–Фаулера*// Наук. вісник Чернівецького ун–ту. – 2004. – Вип. 228. Математика. – С. 30 – 35.
10. Евтухов В.М., Кириллова Л.А *Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка*// Дифференц. уравнения. – 2005. – Т. 41, № 8. – С. 1053–1061.
11. Кириллова Л.А *Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка*// Нелінійні коливання – 2005. – Т. 8, № 1. – С. 18–28.
12. Евтухов В.М. *Об исчезающих на бесконечности решениях вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений*// Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, № 4. – С. 433–444.

Поступило 18.05.2007