УДК 517.53

Ю. С. Трухан, М. М. Шеремета

ПРО ОБМЕЖЕНІСТЬ l–ІНДЕКСУ КАНОНІЧНОГО ДОБУТКУ НУЛЬОВОГО РОДУ ТА ДОБУТКУ БЛЯШКЕ

Yu. S. Trukhan, M. M. Sheremeta. *On the boundedness of l-index of a canonical product of zero genus and of a Blaschke product*, Matematychni Studii, **29** (2008) 45–51.

Conditions on zeros under which a canonical product of zero genus is entire function of bounded l-index and a Blaschke product is an analytic function of bounded l-index in the unit disk are investigated.

Ю. С. Трухан, М. Н. Шеремета. *Об ограниченности l-индекса канонического произведения нулевого рода и произведения Бляшке* // Математичні Студії. – 2008. – Т.29, №1. – С.45–51.

Исследованы условия на нули, при которых каноническое произведение нулевого рода является целой функцией ограниченного l-индекса, а произведение Бляшке является аналитической в единичном круге функцией ограниченного l-индекса.

1. Вступ. Для додатної неперервної на $[0,+\infty)$ функції l ціла функція f називається ([1, с. 5]) функцією обмеженого l-індексу, якщо існує $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!\ l^n(|z|)} \le \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!\ l^k(|z|)}:\ 0 \le k \le N\right\} \tag{1}$$

для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in \mathbb{C}$. Для $l(x) \equiv 1$ звідси отримуємо означення ([2]) цілої функції обмеженого індексу.

Подібно, якщо l — така додатна і неперевна на $[0,1)$ функція, що $l(r) > \beta/(1-r)$ для всіх $r \in [0,1)$, де $\beta = \text{const} > 1$, то аналітична в одиничному крузі $\mathbb{D} = \{z\colon\ |z| < 1\}$ функція f називається ([1, с. 71]) функцією обмеженого l-індексу, якщо існує $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що нерівність (1) правильна для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in \mathbb{D}$.

Нарешті, для аналітичної в $\{z\colon\ |z| < R\}$, $0 < R \le +\infty$, функції f з упорядкованими за неспаданням модулів нулями z_n через $n(r,f)$ будемо позначати лічильну функцію нулів, тобто $n(r,f) = \sum_{|z_n| \le r} 1$, $0 \le r < R$.

Нехай

$$\pi(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{c_n}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|c_n|} < +\infty \tag{2}$$

— канонічний добуток нульового роду. Якщо $c_1 \le c_k - c_{k-1} \nearrow +\infty\ (2 \le k \to +\infty)$, то ([3]) π є цілою функцією обмеженого індексу. Цей результат уточнено в [4], де показано, що за цієї умови на c_n існує спадна до 0 додатна неперервна на $[0,1)$ функція l, для якої π є цілою функцією обмеженого l-індексу.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 30D15.

Клас додатних неперервних на $[0,+\infty)$ функцій l таких, що $l(r+O(1/l(r)))=O(l(r))$ при $r\to+\infty$ позначимо через Q. Обмеженість l-індексу канонічного добутку (2) для певної функції $l\in Q$ досліджено в [5 – 6]. Найзагальнішим у цьому напрямі є результат, отриманий в [6] для додатних c_n, але, як видно з його доведення (див. також [7]) він правильний і у випадку комплексних c_n.

Теорема А. *Нехай $n^\gamma/|c_n|\searrow 0(n\to\infty)$ для деякого $\gamma\in(0,\,1]$. Для того, щоб ціла функція (2) була обмеженого l-індексу з деякою функцією $l\in Q$ такою, що $l(r)\asymp r^{-1}n(r,\pi)\ln n(r,\pi)\ (r\to+\infty)$ досить, а у випадку додатних c_n і необхідно, щоб*

$$\sum_{k=n(r,\pi)}^{\infty}\frac{1}{|c_k|}=O\big(r^{-1}n(r,\pi)\ln n(r,\pi)\big),\quad r\to+\infty. \tag{3}$$

Як зауважено в [6], степеневу функцію n^γ у теоремі А замінити повільно зростаючою функцією $\psi(n)$, взагалі кажучи, не можна. На це вказує наступна теорема.

Теорема Б. *Нехай ψ — повільно зростаюча неперервно диференційовна на $[1,\,+\infty)$ функція така, що $\psi'(2x)\asymp\psi'(x)\,(x\to+\infty)$. Тоді існує ціла функція (2) з наступними властивостями: а) $\psi(n)/c_n\searrow 0\,(n\to\infty)$; б) $\sum\limits_{c_k\geq r}1/c_k=O\big(n(r,\pi)/r\big)\ (r\to+\infty)$; в) π не є функцією обмеженого l-індексу з $l(r)\asymp r^{-1}n(r,\pi)\ln n(r,\pi)\,(r\to+\infty)$.*

Нехай тепер

$$B(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{|a_k|}{a_k}\frac{a_k-z}{1-\overline{a}_kz},\quad \sum_{k=1}^{\infty}(1-|a_k|)<+\infty, \tag{4}$$

— добуток Бляшке, а l — додатна і неперервна на $[0,1)$ функція. Як і в [1, с. 71], для $q\in[0,\,\beta)$ покладемо

$$\lambda_1(q)=\inf\{l(r)/l(r_0)\colon\ |r-r_0|\leq q/l(r_0),\,0\leq r_0<1\},$$

$$\lambda_2(q)=\sup\{l(r)/l(r_0)\colon\ |r-r_0|\leq q/l(r_0),\,0\leq r_0<1\}$$

і будемо говорити, що $l\in Q_\beta(\mathbb{D})\,(\beta>1)$, якщо $l(r)>\beta/(1-r)$ для всіх $r\in[0,1)$ і $0<\lambda_1(q)\leq\lambda_2(q)<+\infty$ для всіх $q\in[0,\,\beta)$.

Теорема В. *Нехай $n(1-|a_n|)\searrow 0(n\to\infty)$. Для того, щоб добуток Бляшке (4) був аналітичною в $\mathbb{D}$ функцією обмеженого l-індексу з деякою функцією $l\in Q_\beta(\mathbb{D})\,(\beta>1)$ такою, що $l(r)\asymp(1-r)^{-1}n(r,B)\ln n(r,B)\,(r\to 1)$ досить, а у випадку додатних a_n і необхідно, щоб*

$$\sum_{k=2n(r,B)}^{\infty}(1-|a_k|)=O\left((1-r)n(r,B)\ln n(r,B)\right),\quad r\to 1. \tag{5}$$

В [9] зауважено, що умову $n(1-|a_n|)\searrow 0(n\to\infty)$ у теоремі В можна замінити умовою $n^\gamma(1-|a_n|)\searrow 0(n\to\infty)$, $\gamma\in(0,1]$, але не можна, взагалі кажучи, замінити умовою $\psi(n)(1-|a_n|)\searrow 0(n\to\infty)$, де ψ — повільно зростаюча функція, тобто правильний наступний аналог теореми Б.

Теорема Г. *Нехай ψ — повільно зростаюча неперервно диференційовна на $[1,\,+\infty)$ функція така, що $\psi'(2x)\asymp\psi'(x)\,(x\to+\infty)$. Тоді існує добуток Бляшке (4) з наступними властивостями: а) $\psi(n)(1-a_n)\searrow 0\,(n\to\infty)$; б) $\sum\limits_{a_k\geq r}(1-a_k)=O((1-r)n(r,B))$ при $r\to 1$; в) B не є функцією обмеженого l-індексу з $l(r)\asymp(1-r)^{-1}n(r,B)\ln n(r,B)\,(r\to 1)$.*

Через Ψ позначимо клас неперервно диференційовних додатних зростаючих до $+\infty$ на $[1,+\infty)$ функцій ψ таких, що ψ' — незростаюча функція і $\psi'(2x) \asymp \psi'(x)$ $(x \to +\infty)$. Метою нашої статті є дослідження обмеженості l-індексу канонічного добутку нульового роду за умови $\psi(n)/|c_n| \searrow 0$ $(n \to \infty)$ і добутку Бляшке за умови $\psi(n)(1-|a_n|) \searrow 0$ $(n \to \infty)$, де $\psi \in \Psi$. Ми покажемо, що умова (3) є достатньою для обмеженості l - індексу канонічного добутку нульового роду за умови $\psi(n)/|c_n| \searrow 0$ $(n \to \infty)$ з можливо дещо більшою, ніж у теоремі A, функцією l. Подібна ситуація має місце і для добутків Бляшке. На це вказують дві наступні теореми.

Теорема 1. *Для того, щоб для довільної функції $\psi \in \Psi$ і довільної функції $l \in Q$ такої, що*

$$\frac{\psi(n(r,\pi))}{r\psi'(n(r,\pi))} \ln n(r,\pi) = O(l(r)), \quad r \to +\infty, \tag{6}$$

з незростання послідовності $(\psi(k)/|c_k|)$ випливала обмеженість l-індексу цілої функції (2) досить, а у випадку додатних нулів і необхідно, щоб виконувалась умова (3).

Теорема 2. *Для того, щоб для довільної функції $\psi \in \Psi$ і довільної функції $l \in Q_\beta(\mathbb{D})$ $(\beta > 1)$ такої, що*

$$\frac{\psi(n(r,B)) \ln n(r,B)}{(1-r)\psi'(n(r,B)} = O(l(r)), \quad r \to 1, \tag{7}$$

з незростання послідовності $\psi(k)(1-|a_k|)$ випливала обмеженість l-індексу добутку Бляшке (4) досить, а у випадку додатних нулів і необхідно, щоб виконувалась умова (5).

Доведення теореми 1. Для канонічного добутку (2), функції $l \in Q$ і числа $q \in (0,+\infty)$ позначимо $G_q(\pi) = \bigcup_k \{z\colon\ |z-c_k| \le q/l(|c_k|)\}$ і $n(r,z_0,1/\pi) = \sum_{|c_k-z_0|\le r} 1$. Безпосереднім наслідком з теореми 2.1 ([1, с. 27]) з $G=\mathbb{C}$ і $l(z)=l(|z|)$ є наступний критерій обмеженості l-індексу добутку (2).

Лема 1. *Нехай $l \in Q$. Канонічний добуток (2) є обмеженого l-індексу тоді і тільки тоді, коли: 1) для кожного $q>0$ існує таке $P(q)>0$, що $|\pi'(z)/\pi(z)| \le P(q)l(|z|)$ для всіх $z \in \mathbb{C}\setminus G_q(\pi)$; 2) для кожного $q>0$ існує таке $n^*(q) \in \mathbb{N}$, що $n(q/l(|z_0|), z_0, 1/\pi) \le n^*(q)$ для кожного $z_0 \in \mathbb{C}$.*

З доведенням наступних двох лем можна ознайомитись, наприклад, в [7].

Лема 2. *Якщо $l \in Q$ і $|c_{n+1}|-|c_n| \ge 2q_0/l(|c_n|)$ для деякого $q_0>0$ і всіх $k \ge 1$, то виконується умова 2) леми 1.*

Лема 3. *Якщо $l \in Q$, $|c_n| \le |z| \le |c_{n+1}|$, $|z-c_n| \ge q/l(|c_n|)$ і $|z-c_{n+1}| \ge q/l(|c_{n+1}|)$, то*

$$\frac{1}{|z-c_n|} + \frac{1}{|z-c_{n+1}|} \le P_1(q)l(|z|), \quad P_1(q) \equiv const > 0.$$

Лема 4. *Якщо $\psi \in \Psi$ і послідовність $(|c_k|/\psi(k))$ неспадна, то для $\mu > \nu$*

$$|c_\mu| - |c_\nu| \ge \frac{|c_\mu|}{\psi(\mu)}\psi'(\mu)(\mu-\nu) \ge \frac{|c_\nu|}{\psi(\nu)}\psi'(\mu)(\mu-\nu).$$

Справді, для деякого $\xi \in (\nu,\, \mu)$ маємо

$$|c_\mu| - |c_\nu| = \tfrac{|c_\mu|}{\psi(\mu)}\psi(\mu) - \tfrac{|c_\nu|}{\psi(\nu)}\psi(\nu) \ge \tfrac{|c_\mu|}{\psi(\mu)}(\psi(\mu)-\psi(\nu)) =$$
$$\tfrac{|c_\mu|}{\psi(\mu)}\psi'(\xi)(\mu-\nu) \ge \tfrac{|c_\mu|}{\psi(\mu)}\psi'(\mu)(\mu-\nu) \ge \tfrac{|c_\nu|}{\psi(\nu)}\psi'(\mu)(\mu-\nu).$$

З леми 4 випливає, що $|c_{n+1}|-|c_n|\ge|c_n|\frac{\psi'(n+1)}{\psi(n)}\ge|c_n|\frac{\psi'(n)}{K\psi(n)}$. Тому, якщо функція $l\in Q$ задовольняє умову (6), то за лемою 2 виконується умова 2) леми 1 і, отже, для доведення достатності умови (3) нам треба перевірити, чи виконується умова 1) леми 1. Для цього доведемо ще три леми.

Лема 5. *Якщо $\psi\in\Psi$, $|c_n|\le|z|\le|c_{n+1}|$ і послідовність $(|c_k|/\psi(k))$ неспадна, то*

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{|z|-|c_k|}\le\frac{\psi(n(r,\pi))}{r\psi'(n(r,\pi))}\ln n(r,\pi),\quad r=|z|. \tag{8}$$

Справді, використовуючи лему 4, маємо $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{|z|-|c_k|}=\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{1-|c_k|/r}\le$

$$\le\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{|c_n|}{|c_n|-|c_k|}\le\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{|c_n|}{(|c_n|/\psi(n))\psi'(n)(n-k)}\le\frac{\psi(n(r,\pi))}{r\psi'(n(r,\pi))}\ln n(r,\pi).$$

Лема 6. *Якщо $\psi\in\Psi$, $|c_n|\le|z|\le|c_{n+1}|$ і послідовність $(|c_k|/\psi(k))$ неспадна, то*

$$\sum_{k=n+2}^{2n+1}\frac{1}{|c_k|-|z|}\le K_1\frac{\psi(n(r,\pi))}{r\psi'(n(r,\pi))}\ln n(r,\pi),\quad K_1\equiv const. \tag{9}$$

Справді, як і вище, маємо

$$\sum_{k=n+2}^{2n+1}\frac{1}{|c_k|-|z|}=\frac{1}{r}\sum_{k=n+2}^{2n+1}\frac{1}{|c_k|/r-1}\le\frac{1}{r}\sum_{k=n+2}^{2n+1}\frac{1}{|c_k|/|c_{n+1}|-1}=\frac{1}{r}\sum_{k=n+2}^{2n+1}\frac{|c_{n+1}|}{|c_k|-|c_{n+1}|}\le$$

$$\frac{1}{r}\sum_{k=n+2}^{2n+1}\frac{|c_{n+1}|}{(|c_{n+1}|/\psi(n+1))\psi'(k)(k-(n+1))}\le\frac{\psi(n(r,\pi)+1)}{r\psi'(2n(r,\pi)+1)}\ln n(r,\pi). \tag{10}$$

З незростання ψ' випливає нерівність $\psi(2x)-\psi(2)\le 2(\psi(x)-\psi(1))$ для всіх $x\ge1$, а отже, $\psi(2x)\asymp\psi(x)$ і тим паче $\psi(x+1)\asymp\psi(x)$ при $x\to+\infty$. Тому, враховуючи ще умову $\psi'(2x)\asymp\psi'(x)$ $(x\to+\infty)$, з (10) отримуємо (9).

Лема 7. *Якщо $\psi\in\Psi$, $|c_n|\le|z|\le|c_{n+1}|$ і послідовність $(|c_k|/\psi(k))$ неспадна, то*

$$\sum_{k=2(n+1)}^{\infty}\frac{1}{|c_k|-|z|}\le K_2\frac{\psi(n(r,\pi))}{n(r,\pi)\psi'(n(r,\pi))}\sum_{k=2(n+1)}^{\infty}\frac{1}{|c_k|},\quad K_2\equiv const. \tag{11}$$

Справді, як у доведенні лем 4 і 6, маємо

$$\sum_{k=2(n+1)}^{\infty}\frac{1}{|c_k|-|z|}\le\sum_{k=2(n+1)}^{\infty}\frac{1}{|c_k|-|c_{n+1}|}\le\sum_{k=2(n+1)}^{\infty}\frac{1}{|c_k|}\frac{\psi(k)}{\psi(k)-\psi(n+1)}\le$$

$$\le\frac{\psi(2(n+1))}{\psi(2(n+1))-\psi(n+1)}\sum_{k=2(n+1)}^{\infty}\frac{1}{|c_k|}\le K_2\frac{\psi(n(r,\pi))}{n(r,\pi)\psi'(n(r,\pi))}\sum_{k=2(n+1)}^{\infty}\frac{1}{|c_k|}.$$

Для завершення доведення достатності умови (3) використаємо рівність

$$\frac{\pi'(z)}{\pi(z)}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{z-c_k}+\left(\frac{1}{z-c_n}+\frac{1}{z-c_{n+1}}\right)+\sum_{k=n+2}^{2n+1}\frac{1}{z-c_k}+\sum_{k=2n+2}^{\infty}\frac{1}{z-c_k}.$$

Якщо $|c_n|\le|z|\le|c_{n+1}|$ і $z\in\mathbb{C}\setminus G_q(\pi)$, то за лемами 5, 3, 6 і 7 звідси отримуємо

$$\frac{|\pi'(z)|}{|\pi(z)|}\le\frac{\psi(n(r,\pi))}{r\psi'(n(r,\pi))}\ln n(r,\pi)+P_1(q)l(r)+K_1\frac{\psi(n(r,\pi))}{r\psi'(n(r,\pi))}\ln n(r,\pi)+$$

$$+K_2\frac{\psi(n(r,\pi))}{n(r,\pi)\psi'(n(r,\pi))}\sum_{k=2(n+1)}^{\infty}\frac{1}{|c_k|}.$$

З огляду на умови (6) і (3), з останньої нерівності випливає, що $\frac{|\pi'(z)|}{|\pi(z)|}\le P_2(q)l(r)$, $P_2(q)\equiv\text{const}>0$, для всіх $|z|\ge|c_1|$, $z\notin G_q(\pi)$. Використовуючи принцип максимуму модуля і додатність функції l, неважко показати, що така ж нерівність (можливо, з іншою сталою $P_2(q)$ є правильною і для $|z|\le|c_1|$, $z\notin G_q(\pi)$. Отже, умова 1) леми 1 виконується і з огляду на цю лему достатність умови (3) доведено.

Припустимо тепер, що умова (3) не виконується і всі $c_k>0$. Виберемо $\psi(x)\equiv x$. Тоді $\psi\in\Psi$ і, як показано в [5], існує функція $l\in Q$ така, що

$$l(r)\asymp\frac{n(r,\pi)\ln n(r,\pi)}{r}=\frac{\psi(n(r,\pi))\ln n(r,\pi)}{r\psi'(n(r,\pi))}\,(r\to+\infty)$$

і π не є функцією обмеженого l-індексу. Це вказує на необхідність умови (3) у теоремі 1. Теорему 1 доведено. □

Доведення теореми 2. Нехай $\beta>1$, $l\in Q_\beta(\mathbb{D})$ і $q\in(0,\beta)$, а $G_q(B)$ і $n(r,z_0,1/B)$ визначені, як вище. З теореми 2.1 з [1, с. 27] випливає також наступна лема.

Лема 8. *Для функції $l\in Q_\beta(\mathbb{D})$, $\beta>1$, добуток Бляшке (4) є обмеженого l-індексу тоді і тільки тоді, коли: 1) для кожного $q\in(0,\beta)$ існує таке $P(q)>0$, що $|B'(z)/B(z)|\le P(q)l(|z|)$ для всіх $z\in\mathbb{D}\setminus G_q(B)$; 2) для кожного $q\in(0,\beta)$ існує таке $n^*(q)\in\mathbb{N}$, що $n(q/l(|z_0|),z_0,1/B)\le n^*(q)$ для кожного $z_0\in\mathbb{D}$.*

З доведеннями двох наступних аналогів лем 2 і 3 можна ознайомитись у статтях [8, 10].

Лема 9. *Умова 2) леми 8 виконується, якщо $l\in Q_\beta(\mathbb{D})$, $\beta>1$, і $|a_{k+1}|-|a_k|>$ $>2q_0/l(|a_k|)$ для деякого $q_0\in(0,\beta)$ і всіх $k\ge k_0$.*

Лема 10. *Якщо $l\in Q_\beta(\mathbb{D})$ $(\beta>1)$, $|a_n|\le|z|\le|a_{n+1}|$, $|z-a_n|\ge q/l(|a_n|)$ і $|z-a_{n+1}|\ge$ $\ge q/l(|a_{n+1}|)$, $0<q<\beta$, то $\dfrac{1}{|z-a_n|}+\dfrac{1}{|z-a_{n+1}|}\le P_1(q)l(|z|)$, $\quad P_1(q)\equiv const>0$.*

Аналогом леми 4 є така лема.

Лема 11. *Якщо $\psi\in\Psi$ і послідовність $(\psi(k)(1-|a_k|))$ незростаюча, то для $\mu>\nu$*

$$|a_\mu|-|a_\nu|\ge(1-|a_\nu|)\frac{\psi'(\mu)}{\psi(\mu)}(\mu-\nu)\ge(1-|a_\mu|)\frac{\psi'(\mu)}{\psi(\nu)}(\mu-\nu).$$

Справді, для деякого $\xi\in(\nu,\mu)$ маємо

$$|a_\mu|-|a_\nu|=\frac{\psi(\nu)(1-|a_\nu|)}{\psi(\nu)}-\frac{\psi(\mu)(1-|a_\mu|)}{\psi(\mu)}\ge\frac{\psi(\nu)(1-|a_\nu|)}{\psi(\nu)}-\frac{\psi(\nu)(1-|a_\nu|)}{\psi(\mu)}=$$
$$=(1-|a_\nu|)\frac{\psi'(\xi)(\mu-\nu)}{\psi(\mu)}\ge(1-|a_\nu|)\frac{\psi'(\mu)(\mu-\nu)}{\psi(\mu)}\ge(1-|a_\mu|)\frac{\psi'(\mu)(\mu-\nu)}{\psi(\nu)}.$$

Використовуючи властивості функції $\psi\in\Psi$, з леми 11 отримуємо

$$|a_{n+1}|-|a_n|\ge(1-|a_n|)\frac{\psi'(n+1)}{\psi(n+1)}\ge\frac{\psi'(n)(1-|a_n|)}{C\psi(n)\ln n}\ln n,\quad C\equiv\text{const}>0,$$

а отже, якщо функція l задовольняє умову (7), то $|a_{n+1}|-|a_n|\ge q/l(|a_n|)$ для кожного $q>0$ і всіх $n\ge n_0(q)$. Тому за лемою 9 виконується умова 2) леми 8 і для доведення достатності умови (5) нам потрібно перевірити, чи виконується умова 1) леми 8. Для цього нам потрібні три наступні леми.

Лема 12. *Якщо $\psi\in\Psi$, послідовність $(\psi(k)(1-|a_k|))$ незростаюча і $|a_n|\le|z|\le|a_{n+1}|$, то*
$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1-|a_k|}{(|z|-|a_k|)(1-|a_k||z|)}\le\frac{\psi(n(r,B))\ln n(r,B)}{\psi'(n(r,B))(1-r)}\quad (r=|z|).$$

Справді, використовуючи лему 11, маємо
$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1-|a_k|}{(|z|-|a_k|)(1-|a_k||z|)}\le\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{r-|a_k|}=\frac{1}{1-r}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(1-|a_k|)/(1-r)-1}\le$$
$$\le\frac{1}{1-r}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(1-|a_k|)/(1-|a_n|)-1}\le\frac{1}{1-r}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1-|a_n|}{|a_n|-|a_k|}\le\frac{\psi(n(r,B))\ln n(r,B)}{\psi'(n(r,B))(1-r)}.$$

Лема 13. *Якщо $\psi\in\Psi$, послідовність $(\psi(k)(1-|a_k|))$ незростаюча і $|a_n|\le|z|\le|a_{n+1}|$, то*
$$\sum_{k=n+2}^{2n+1}\frac{1-|a_k|}{(|a_k|-|z|)(1-|a_k||z|)}\le\frac{2C_1\psi(n(r,B))\ln n(r,B)}{\psi'(n(r,B))(1-r)},\quad C_1\equiv const>0.$$

Справді, як вище, маємо
$$\sum_{k=n+2}^{2n+1}\frac{1-|a_k|}{(|a_k|-|z|)(1-|a_k||z|)}\le\sum_{k=n+2}^{2n+1}\frac{1}{|a_k|-r}=\frac{1}{1-r}\sum_{k=n+2}^{2n+1}\frac{1}{1-(1-|a_k|)/(1-r)}\le$$
$$\le\frac{1}{1-r}\sum_{k=n+2}^{2n+1}\frac{1}{1-(1-|a_k|)/(1-|a_{n+1}|)}=\frac{1}{1-r}\sum_{k=n+2}^{2n+1}\frac{1-|a_{n+1}|}{|a_k|-|a_{n+1}|}\le$$
$$\le\frac{\psi(2n+1)\ln n}{\psi'(2n+1)(1-r)}\le\frac{C_1\psi(n)\ln n}{\psi'(n)(1-r)}=\frac{C_1\psi(n(r,B))\ln n(r,B)}{\psi'(n(r,B))(1-r)}.$$

Лема 14. *Якщо $\psi\in\Psi$, послідовність $(\psi(k)(1-|a_k|))$ незростаюча і $|a_n|\le|z|\le|a_{n+1}|$, то*
$$\sum_{k=2(n+1)}^{\infty}\frac{1-|a_k|}{(|a_k|-|z|)(1-|a_k||z|)}\le\frac{C_2\psi(n(r,B))}{\psi'(n(r,B))n(r,B)(1-r)^2}\sum_{k=2(n+1)}^{\infty}(1-|a_k|),\ C_2\equiv const>0.$$

Справді, для $k\ge 2(n+1)$ маємо $1-|a_k|r\ge|a_k|(1-r)\ge|a_{2n+2}|(1-r)$ і
$$|a_k|-r=(1-r)\Big(1-\frac{1-|a_k|}{1-r}\Big)\ge(1-r)\Big(1-\frac{1-|a_k|}{1-|a_{n+1}|}\Big)\ge(1-r)\Big(1-\frac{\psi(n+1)}{\psi(k)}\Big)\ge$$
$$\ge(1-r)\Big(1-\frac{\psi(n+1)}{\psi(2(n+1))}\Big)\ge(1-r)\frac{\psi'(2(n+1))(n+1)}{\psi(2(n+1))}\ge(1-r)\frac{\psi'(n)n}{2C\psi(n)}.$$
Тому
$$\sum_{k=2(n+1)}^{\infty}\frac{1-|a_k|}{(|a_k|-|z|)(1-|a_k||z|)}\le\frac{C_2\psi(n(r,B))}{\psi'(n(r,B))n(r,B)(1-r)^2}\sum_{k=2(n+1)}^{\infty}(1-|a_k|).$$
Для завершення доведення достатності умови (5) використаємо рівність
$$\frac{B'(z)}{B(z)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-|a_k|^2}{(z-a_k)(1-\overline{a}_kz)}.$$
Якщо $|a_n|\le|z|\le|a_{n+1}|$ і $z\notin G_q(B)$, то за лемами 11 – 14 з огляду на умову (5) маємо
$$\frac{|B'(z)|}{|B(z)|}\le 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1-|a_k|}{(|z|-|a_k|)(1-|a_k||z|)}+2\left(\frac{1}{|z-a_n|}+\frac{1}{|z-a_{n+1}|}\right)+$$
$$+2\sum_{k=n+2}^{2n+1}\frac{1-|a_k|}{(|a_k|-|z|)(1-|a_k||z|)}+2\sum_{k=2(n+1)}^{\infty}\frac{1-|a_k|}{(|a_k|-|z|)(1-|a_k||z|)}\le$$

$$\leq 2(1+P_1(q)+C_1)\frac{\psi(n(r,B))\ln n(r,B)}{\psi'(n(r,B))(1-r)}+\frac{C_2\psi(n(r,B))}{\psi'(n(r,B))n(r,B)(1-r)^2}\sum_{k=2(n+1)}^{\infty}(1-|a_k|)\leq$$

$$\leq P_2(q)\frac{\psi(n(r,B))\ln n(r,B)}{\psi'(n(r,B))(1-r)}\leq P(q)l(|z|).$$

Отже, для всіх $|z|\geq|a_1|$ і $z\notin G_q(B)$ маємо $|B'(z)/B(z)|\leq P(q)l(|z|)$. Для $|z|\leq|a_1|$ і $z\notin G_q(B)$ ця оцінка (можливо, з іншою сталою $P(q)$) доводиться з використанням принципу максимуму модуля і додатності функції l. Достатність умови (5) доведено.

Припустимо тепер, що умова (5) не виконується і всі $a_k>0$. Виберемо $\psi(x)\equiv x$. Тоді $\psi\in\Psi$ і, як показано у [8], існує функція $l\in Q_\beta(\mathbb{D})$ $(\beta>1)$ така, що $l(r)\asymp\dfrac{n(r,B)\ln n(r,B)}{1-r}=\dfrac{\psi(n(r,B))\ln n(r,B)}{(1-r)\psi'(n(r,B))}$ $(r\to+\infty)$ і B не є функцією обмеженого l-індексу. Це вказує на необхідність умови (5) у теоремі 2. Теорему 2 доведено. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Sheremeta M.M. Analytic functions of bounded index. — Lviv: VNTL Publishers, 1999. — 141 pp.
2. Lepson B. *Differential equations of infinite order, hyperdirichlet series and entire functions of bounded index*// Proc. Sympos. Pure Math. V.2. — AMS, Providence, Phode Island, 1968. — P.298–307.
3. Fricke G. *Entire functions having positive zeros*// Indian J. Pure Appl. Math. — 1996. — V.5,№5. — P.412–417.
4. Шеремета М.М. *Уточнення однієї теореми Фріке*// Укр. мат. журн. — 1996. — Т.48, №9. — С.1166–1182.
5. Chyzhykov I.E., Sheremeta M.M. *Boundedness of l-index for entire functions of zero genus*// Matematychni Studii. — 2001. — V.16, №2. — P.124–130.
6. Чижиков І.Е., Шеремета М.М. *Про обмеженість l-індексу цілих функцій нульового роду*// Доп. НАН України. — 2003. — №7. — С.33–39.
7. Gol'dberg A.A., Sheremeta M.M. *On the boundedness of l-index of canonical products*// Ukr. Math. Bull. — 2005. — V.2, №1. — P.53–65.
8. Trukhan Yu.S. Sheremeta M.M. *On l-index boundedness of the Blaschke product*// Matematychni Studii. — 2003. — V.19,№1. — P.106–112.
9. Трухан Ю.С. *До обмеженості l-індексу добутку Бляшке*// Вісник Львів. ун-ту, серія мех.-мат. — 2004. Вип. 63. — С.143–147.
10. Трухан Ю.С. Шеремета М.М. *Обмеженість l-індексу добутку Нафталевича-Цудзі*// Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56, №2. — С.247–256.

Львівський національний університет імені Івана Франка
кафедра теорії функцій і теорії ймовірностей
yurik93@mail.ru

Надійшло 23.02.2007