УДК 517.5+517.9

О. В. Шавала

ПРО ГОЛОМОРФНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯННЯ $f'' + a_0 f = 0$, НУЛІ ЯКИХ ЗАДОВОЛЬНЯЮТЬ УМОВУ БЛЯШКЕ

O. V. Shavala. *On the holomorphic solutions of the equation $f'' + a_0 f = 0$, the zeros of which satisfy the Blaschke condition* , Matematychni Studii, **28** (2007) 213–216.

Classes are found, in which the holomorphic in a unit disc solution of the equation $f''+a_0 f = 0$ exists, the sequence of zeros of which satisfies the Blaschke condition.

Е. В. Шавала. *О голоморфных решениях уравнения $f'' + a_0 f = 0$, нули которых удовлетворяют условие Бляшке* // Математичні Студії. – 2007. – Т.28, №2. – С.213–216.

Найдены классы, в которых существует аналитическое в единичном круге решение уравнения $f'' + a_0 f = 0$, последовательность нулей которого удовлетворяет условие Бляшке.

У статті [1] вивчалося питання про класи, в яких існує аналітичний в крузі $U(0; 1) = \{z : |z| < 1\}$ розв'язок рівняння

$$f'' + a_0 f = 0 \tag{1}$$

з послідовністю нулів (λ_j), яка задовольняє умову Бляшке

$$\sum_j (1 - |\lambda_j|) < +\infty \tag{2}$$

та інтерполяційну умову

$$\inf\Big\{\prod_{j\neq k} \Big|\frac{\lambda_k - \lambda_j}{1 - \overline{\lambda}_j \lambda_k}\Big| : k\Big\} = \delta > 0. \tag{3}$$

Зокрема, в [1] доведено, що за умов (2) і (3) існує така аналітична в $U(0; 1)$ функція a_0, що рівняння (1) має аналітичний і обмежений в $U(0; 1)$ розв'язок f, для якого (λ_j) є послідовністю нулів. У зв'язку з цим виникає питання про класи, в яких може існувати відповідний розв'язок рівняння (1), якщо виконується лише умова (2). За умови (2) добуток Бляшке (тут $|\psi_j| = 1$ і $\psi_j = \overline{\lambda_j}/ |\lambda_j|$, якщо $\lambda_j \neq 0$)

$$B(z) = \prod_j \psi_j \frac{\lambda_j - z}{1 - \overline{\lambda_j} z}$$

для круга $U(0; 1)$ є ([2, с.86]) рівномірно збіжним на кожному компакті із $U(0; 1)$, функція B аналітична в $U(0; 1)$ і $|B(z)| \leq 1$ для $z \in U(0; 1)$. Нехай $M_\theta(r) = \max\{|\theta(z)| : |z| = r\}$ і $\mu_\theta(r) = \max\{|\theta_n| r^n : n \geq 0\}$ – відповідно максимум модуля та максимальний член цілої функції $\theta(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \theta_n z^n$. Доведемо, зокрема, таке твердження.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 34M05.

Теорема 1. *Нехай* (λ_j) *– довільна послідовність різних точок з круга* $U(0;1)$, *яка задовольняє умову (2),* θ *– ціла функція така, що в кожній точці* λ_n

$$\mu_\theta\left(1/(1-|\lambda_n|)\right) \geq |B'(\lambda_n)|^{-2}. \tag{4}$$

Тоді існує така аналітична в $U(0;1)$ *функція* a_0, *що рівняння (1) має аналітичний в* $U(0;1)$ *розв'язок* f, *для якого* (λ_j) *– послідовність нулів і*

$$M_f(r) \leq \exp\left\{c(1-r)^{-5}\mu_\theta\big(2/(1-r)\big)\right\}\ (r \in [0;1)),$$

а $c \in (0;+\infty)$ *— деяка стала.*

Складнішим є питання про те, чи може задана аналітична в $U(0;1)$ функція, послідовність нулів якої задовольняє умову (2), бути розв'язком рівняння (1), в якому функція a_0 аналітична в $U(0;1)$. Отриманий нами в цьому зв'язку результат простіше формулюється для півплощини. Нехай $b(z) = \prod\limits_j \varphi_j \dfrac{z-\lambda_j}{z+\overline{\lambda_j}}$, $\quad \varphi_j = \begin{cases} 1, & |\lambda_j| \leq 1, \\ -\overline{\lambda_j}/\lambda_j, & |\lambda_j| > 1, \end{cases}$ – добуток Бляшке для півплощини $\mathbb{C}_+ = \{z : \mathrm{Re}z > 0\}$. Якщо послідовність (λ_j) точок з півплощини $\mathbb{C}_+$ задовольняє умову $\sum\limits_j \mathrm{Re}\lambda_j/\left(1+|\lambda_j|^2\right) < +\infty$, то добуток Бляшке є ([3, с.30]) рівномірно збіжним на кожному компакті з $\mathbb{C}_+$, функція b аналітична в $\mathbb{C}_+$ і $|b(z)| \leq 1$ для $z \in \mathbb{C}_+$.

Теорема 2. *Якщо функція* a_0 *аналітична у півплощині* $\mathbb{C}_+ = \{z : \mathrm{Re}z > 0\}$, *то добуток Бляшке для* $\mathbb{C}_+$ *не може бути розв'язком рівняння (1) у півплощині* $\mathbb{C}_+$, *якщо виконується принаймні одна з п'яти умов: 1)* $\lambda_k = \lambda_m$ *для деяких* k *та* m, $k \neq m$; *2) множина* $\{\lambda_k\}$ *є скінченною; 3) множина* $\{\mathrm{Re}\lambda_k\}$ *має найменший елемент; 4) всі* λ_k *мають однакову дійсну частину; 5) множина* $\{\mathrm{Im}\lambda_k\}$ *має найменший або найбільший елемент.*

Для доведення цих теорем нам потрібні наступні допоміжні твердження.

Лема 1. *Для того щоб аналітична в однозв'язній області* G *функція* $f \neq 0$ *була розв'язком в* G *рівняння (1) для деякої аналітичної в* G *функції* a_0, *необхідно і достатньо, щоб виконувалась принаймні одна з умов: 1)* f *аналітична в* G *і не має там нулів; 2)* f *аналітична в* G *з простими нулями в* G, $f'(\lambda) \neq 0$ *і* $f''(\lambda) = 0$ *для кожного її нуля* $\lambda \in G$; *3)* f *аналітична в* G *з простими нулями в* G *і для кожного її нуля* $\lambda \in G$

$$\lim_{z\to\lambda}\left(\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{1}{z-\lambda}\right) = 0.$$

Для отримання цього твердження достатньо врахувати, що $a_0(z) = -f''(z)/f(z)$, $f''(z)/f(z) = f''(\lambda)/(f'(\lambda)(z-\lambda)) + \psi(z)$, $\lim\limits_{z\to\lambda}\left(f'(z)/f(z) - 1/(z-\lambda)\right) = 0,5f''(\lambda)/f'(\lambda)$ для кожного простого нуля $\lambda \in G$ функції f, де ψ – аналітична функція в точці λ, а також згадати теорему Коші про єдиність розв'язку задачі Коші.

Лема 2. *Нехай* (λ_j) *– довільна послідовність різних комплексних чисел з* $U(0;1)$, *яка задовольняє умову (2). Для того щоб функція* $f = Be^g$, *де* g *– аналітична в* $U(0;1)$ *функція, була розв'язком в* $U(0;1)$ *рівняння (1) для деякої аналітичної в* $U(0;1)$ *функції* a_0, *необхідно і достатньо, щоб у кожній точці* λ_n *виконувалась рівність*

$$B''(\lambda_n) + 2B'(\lambda_n)g'(\lambda_n) = 0.$$

Для отримання цієї леми досить зауважити, що $f'' = (B'' + 2B'g' + g'^2B + g''B)e^g$ (див. також [4, с.296-298], [1, с.57]).

Лема 3. *Нехай виконується (2). Тоді* $|B''(z)| \le 2(1-|z|)^{-3}$, $z \in U(0;1)$.

Доведення. Нехай $z \in U(0;1)$ фіксоване, $R \in (|z|;1)$ – довільне, тоді за інтегральною формулою Коші $B''(z) = \dfrac{2!}{2\pi i}\displaystyle\int_{|\tau|=R} \dfrac{B(\tau)}{(\tau - z)^3} d\tau$, звідки $|B''(z)| \le 2R(R-|z|)^{-3}$. Спрямовуючи $R \to 1-0$, отримуємо наше твердження.

□

Доведення теореми 1. Виберемо послідовність (s_n) так, щоб для чисел $\widehat{s}_n = s_n - 4$ виконувалось $\mu_\theta(\delta_n) = \theta_{\widehat{s}_n}\delta_n^{\widehat{s}_n}$, де $\delta_n = (1-|\lambda_n|)^{-1}$. Тоді $\mu_\theta(t) \ge \theta_{\widehat{s}_n} t^{\widehat{s}_n}$, $t \in [0;+\infty)$. Нехай $b_n = -0,5B''(\lambda_n)/B'(\lambda_n)$ і

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B(z)}{z-\lambda_n}\frac{b_n}{B'(\lambda_n)}\Big(\frac{1-|\lambda_n|^2}{1-\overline{\lambda_n}z}\Big)^{s_n}.$$

Доведемо, що цей ряд є рівномірно збіжним на кожному компакті з $U(0;1)$ і тому функція F аналітична в $U(0;1)$ і задовольняє умову $F(\lambda_n) = b_n$. Справді, оскільки $|B(z)/(z-\lambda_n)| \le 1/(1-|z|)$ і $\big|(1-|\lambda_n|^2)/(1-\overline{\lambda_n}z)\big| \le 2(1-|\lambda_n|)/(1-|z|)$, то, враховуючи нерівності (2), (4) і лему 3, подібно до того, як це робилось в [5, с.884], отримуємо $\left|\frac{B(z)}{z-\lambda_n}\right| \frac{|B''(\lambda_n)|}{2|B'(\lambda_n)|^2} \left|\frac{1-|\lambda_n|^2}{1-\overline{\lambda_n}z}\right|^{s_n} \le \frac{1}{1-|z|}\frac{1}{(1-|\lambda_n|)^3}\frac{1}{|B'(\lambda_n)|^2}\left(2\frac{1-|\lambda_n|}{1-|z|}\right)^{s_n} \le \frac{16(1-|\lambda_n|)}{(1-|z|)^5}\frac{1}{|B'(\lambda_n)|^2}\frac{\theta_{\widehat{s}_n}\left(\frac{2}{1-|z|}\right)^{\widehat{s}_n}}{\theta_{\widehat{s}_n}\left(\frac{1}{1-|\lambda_n|}\right)^{\widehat{s}_n}} \le \frac{16(1-|\lambda_n|)}{(1-|z|)^5}\frac{1}{|B'(\lambda_n)|^2}\frac{\mu_\theta\left(\frac{2}{1-|z|}\right)}{\mu_\theta\left(\frac{1}{1-|\lambda_n|}\right)} \le \frac{16\mu_\theta\left(\frac{2}{1-|z|}\right)}{(1-|z|)^5}(1-|\lambda_n|)$. Тому, за умовою (2), функція F — аналітична в $U(0;1)$ та $F(\lambda_n) = b_n$. Нехай $g(z) = \int_0^z F(\zeta)d\zeta$. Тоді $g'(\lambda_n) = F(\lambda_n) = b_n$ і $M_g(r) \le rM_F(r) \le M_F(r) \le 16\mu_\theta(2/(1-r))/(1-r)^5$, $r \in [0;1), c$ — деяка стала. Отже, побудована функція g задовольняє умови леми 2. Тому функція $f = Be^g$ шуканий розв'язок рівняння (1), в якому $a_0 = -g'^2 - g'' - (B'' + 2B'g')/B$. □

Подібно доводиться така теорема.

Теорема 3. *Нехай* (λ_j) *— довільна послідовність різних точок з круга* $U(0;1)$, *яка задовольняє умову (2),* θ *— ціла функція така, що в кожній точці* λ_n

$$\mu_\theta\left(1/(1-|\lambda_n|)\right) \ge |B''(\lambda_n)||B'(\lambda_n)|^{-2}.$$

Тоді існує аналітична в $U(0;1)$ *функція* a_0 *така, що рівняння (1) має аналітичний в* $U(0;1)$ *розв'язок* f, *для якого* (λ_j) *– послідовність нулів і*

$$M_f(r) \le \exp\left\{c(1-r)^{-2}\mu_\theta\big(2/(1-r)\big)\right\} \ (r \in [0;1))$$

а $c \in (0;+\infty)$ *— деяка стала.*

Зазначимо, що ([1, с.57]) $\dfrac{B''(\lambda_n)}{B'(\lambda_n)} = \dfrac{2\overline{\lambda_n}}{1-|\lambda_n|^2} - 2\displaystyle\sum_{j\ne n}\dfrac{1-|\lambda_j|^2}{(1-\overline{\lambda_j}\lambda_n)(\lambda_j-\lambda_n)}$ і тому ([2, с.331]) за умов (2), (3) $|B''(\lambda_n)/B'(\lambda_n)| \le c_1/(1-|\lambda_n|)$, $|B_1'(\lambda_n)|(1-|\lambda_n|) > \delta/2$, де $c_1 \in (0;+\infty)$ – стала. Отже, в даному випадку можна вибрати $\theta(z) = 2c_1/\delta$ і за теоремою 3 для відповідного розв'язку отримуємо оцінку $M_f(r) \le \exp\left(c_2(1-r)^{-2}\right)$, $r \in [0;1)$, $c_2 = 2cc_1/\delta$, що значно гірше, ніж вже згадуваний результат з [1]. *Питання про точність* теорем 1 та 3 залишається відкритим. Зазначимо, що за вибору віток многозначних функцій $\sqrt{\tau}$, $\sqrt[4]{\tau}$ такого, що функція

$$f(z) = \sqrt[4]{(z-1)^3(z+1)}\left(\sin\sqrt{(z+1)/(1-z)}\right),\ f(0) = e^{\frac{3\pi}{4}i}\sin 1,$$

аналітична в $U(0;1)$, — f є розв'язком рівняння (1) в крузі $U(0;1)$, де $a_0(z) = -(z+7)/(4(z+1)^2(z-1)^3)$ — аналітична функція в $U(0;1)$, і $M_f(r) \ge |f(z^*)| \ge \exp\left(c_3/\sqrt{1-r}\right)$, де z^* — така точка з $U(0;1)$, що $|z^*| = r$ і $\mathrm{Im} z^* = 1-r$ (тут і далі c_j — додатні сталі). При цьому послідовність $\lambda_j = ((\pi j)^2 - 1)/((\pi j)^2 + 1)$, $j \in \mathbb{N}$, є послідовністю нулів функції f, задовольняє умову (2) і за лемою Кабайли-Ньюмена ([6, с.206]), не задовольняє умову (3). Більше того,

$$|B'(\lambda_k)| = \frac{1}{1-|\lambda_k|^2}\prod_{j\neq k}\left|\frac{\lambda_k-\lambda_j}{1-\overline{\lambda}_j\lambda_k}\right| \geq \frac{1}{1-|\lambda_k|^2}\cdot\left|\frac{((\sin z)/z)'}{((\mathrm{sh} z)/z)'}(\pi k)\right| \geq c_4(\pi k)^2 e^{-\pi k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тому умова (4) буде виконуватись, якщо вибрати $\theta(z) = c_5 \cos c_5\sqrt{z}$ і, отже, за теоремою 1 для відповідного розв'язку f правильна оцінка $M_f(r) \leq \exp\left(\exp\left(\frac{c_6}{\sqrt{1-r}}\right)\right)$, $r \in [0;1)$.

Доведення теореми 2. Припустимо, що добуток Бляшке b є розв'язком рівняння (1). Тоді за теоремою Коші про єдиність розв'язку задачі Коші $q_k := \lim\limits_{z\to\lambda_k}\left(\frac{b'(z)}{b(z)} - \frac{1}{z-\lambda_k}\right) = -\sum\limits_{j\neq k}\left(\frac{1}{\lambda_j-\lambda_k}+\frac{1}{\overline{\lambda}_j+\lambda_k}\right) - \frac{1}{2\mathrm{Re}\lambda_k}$ і за лемою 1 $\sum\limits_{j\neq k}\left(\frac{1}{\lambda_j-\lambda_k}+\frac{1}{\overline{\lambda}_j+\lambda_k}\right) + \frac{1}{2\mathrm{Re}\lambda_k} = 0$ для всіх k. Якщо множина $\{\lambda_k\}$ є скінченною (містить m елементів), то, додавши почленно останні рівності, отримуємо $-\sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{m}\frac{(\mathrm{Re}\lambda_j+\mathrm{Re}\lambda_k)}{\left|\lambda_k+\overline{\lambda}_j\right|^2} = 0$, тобто маємо суперечність.

Далі,

$$\mathrm{Re}(q_k) = -2\sum_{j\neq k}\frac{\mathrm{Re}\lambda_j\left(\left(\mathrm{Re}^2\lambda_j - \mathrm{Re}^2\lambda_k\right) + \left(\mathrm{Im}\lambda_j - \mathrm{Im}\lambda_k\right)^2\right)}{\left|\lambda_j-\lambda_k\right|^2\left|\overline{\lambda}_j+\lambda_k\right|^2} - \frac{1}{2\mathrm{Re}\lambda_k}. \tag{5}$$

Тому, якщо множина $\{\mathrm{Re}\lambda_k\}$ має найменший елемент $\mathrm{Re}\lambda_s$, то $\mathrm{Re}(q_s) < 0$ і знову маємо суперечність. У випадку 4) з рівності (5) отримуємо таку ж суперечність. Якщо ж виконується 5) – суперечність отримуємо з рівності $\mathrm{Im}(q_k) = 4\sum\limits_{j\neq k}\frac{(\mathrm{Im}\lambda_j - \mathrm{Im}\lambda_k)\,\mathrm{Re}\lambda_j\mathrm{Re}\lambda_k}{|\lambda_j-\lambda_k|^2\left|\overline{\lambda}_j+\lambda_k\right|^2}$.

Зауваження. Ми не знаємо добутку Бляшке, що є розв'язком в $\mathbb{C}_+$ рівняння (1), в якому a_0 є аналітичною в $\mathbb{C}_+$ функцією.

ЛІТЕРАТУРА

1. Heittokangas J. *Solutions of $f'' + A(z)f = 0$ in the unit disk having Blaschke sequences as the zeros* // Computational Methods and Function Theory. – 2005. – V.5, №1. – P.49–63.
2. Кусис П. Введение в теорию пространств H^p. – М.: Мир, 1984. – 368 с.
3. Говоров Н.В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом. – М.: Наука, 1986. – 240 с.
4. Heittokangas J., Laine I. *Solutions of $f'' + A(z)f = 0$ with prescribed sequences of zeros* // Acta Mathematica Universitatis Comenianae. – 2005. – V.74, №2. – P.287–307.
5. Винницький Б.В., Шепарович І.Б. *Про інтерполяційні послідовності одного класу функцій, аналітичних в одиничному крузі* // Укр. мат. журн. – 2001. – Т.53, №7. – С.879–886.
6. Никольский Н.К. Лекции об операторе сдвига. – М.: Наука, 1980. – 383 с.

Інститут фізики, математики та інформатики,
Дрогобицький державний педагогічний університет ім. Івана Франка,
Shavala@ukr.net

Надійшло 20.10.2006

Після переробки 10.09.2007