УДК 517.5

Б. В. Винницький, В. М. Дільний

ФОРМУЛИ ТИПУ КОШІ ТА ПУАССОНА ДЛЯ ОДНОГО ВАГОВОГО ПРОСТОРУ ГАРДІ

B. V. Vynnytskyi, V. M. Dil'nyi. *On Cauchy and Poisson type formulas for one weighted Hardy space*, Matematychni Studii, **28** (2007) 209–212.

For the space of analytic in the half-plane $\mathbb{C}_+ = \{z : \mathrm{Re} z > 0\}$ functions such that $\sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma r|\sin\varphi|} dr \right\}^{1/p} < +\infty$ we obtain the representation formula $-\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} \frac{f(iv)e^{-i\sigma(z-iv)}}{iv-z}dv - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^0 \frac{f(iv)e^{i\sigma(z-iv)}}{iv-z}dv - \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{f(u)\sin\sigma(z-u)}{u-z}du = \begin{cases} f(z), z\in\mathbb{C}_+, \\ 0,\ z\in\ \mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{C}}_+ \end{cases}$ and an analogue of the Poisson integral. These results are true for usual Hardy space also.

Б. В. Винницкий, В. М. Дильный. *О формулах типа Коши и Пуассона для одного весового пространства Харди* // Математичні Студії. – 2007. – Т.28, №2. – С.209–212.

Для пространства аналитических в полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z : \mathrm{Re} z > 0\}$ функций, для которых $\sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma r|\sin\varphi|} dr \right\}^{1/p} < +\infty$, получены формула $-\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} \frac{f(iv)e^{-i\sigma(z-iv)}}{iv-z}dv - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^0 \frac{f(iv)e^{i\sigma(z-iv)}}{iv-z}dv - \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{f(u)\sin\sigma(z-u)}{u-z}du = \begin{cases} f(z), z\in\mathbb{C}_+, \\ 0,\ z\in\ \mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{C}}_+ \end{cases}$ и аналог формулы Пуассона. Эти результаты справедливы и для обычного пространства Харди.

Позначимо через $H^p(\mathbb{C}_+), 1 \leqslant p < +\infty$, простір Гарді у півплощині $\mathbb{C}_+ = \{z : \mathrm{Re} z > 0\}$, тобто множину функцій, які є аналітичними у $\mathbb{C}_+$ і справедливо $\sup_{x>0} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p dy \right\}^{1/p} < +\infty$. Функції з цього простору мають [1, с.142] майже скрізь (м. с.) на $\partial\mathbb{C}_+$ кутові граничні значення, які теж позначаємо через f і $f \in L^p[\partial\mathbb{C}_+]$. Добре відомими є для $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$ аналоги формул Коші та Пуассона відповідно

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathbb{C}_+} \frac{f(t)}{t-z}dt = \begin{cases} f(z), z\in\mathbb{C}_+, \\ 0, z\in\ \mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{C}}_+, \end{cases} \qquad f(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xf(iv)}{(y-v)^2+x^2}dv, z\in\mathbb{C}_+.$$

Нехай $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+), 1 \leqslant p < +\infty, \sigma \geqslant 0,$ — клас функцій, аналітичних у правій півплощині $\mathbb{C}_+$ для яких

$$\sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma r|\sin\varphi|} dr \right\}^{1/p} < +\infty.$$

Класи $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ досліджувались в ([2]), де, зокрема, встановлено, що функції $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ м.с. на $\partial\mathbb{C}_+$ мають кутові граничні значення $f(iy)$, і $f(iy)e^{-\sigma|y|} \in L^p(\mathbb{R})$. В [3] доведено, що для випадку $\sigma = 0$ простір $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ збігається з простором Гарді $H^p(\mathbb{C}_+)$, тому $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ можна розглядати як узагальнення класичного простору Гарді у півплощині. Метою цієї статті є встановлення аналогів формул Коші та Пуассона для просторів $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Ми одержали наступні твердження.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 30D50.

Теорема 1. *Якщо* $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+), 1 \leqslant p < +\infty, \sigma \geqslant 0$, *то*
$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(iv)e^{-i\sigma(z-iv)}}{iv-z}dv - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{f(iv)e^{i\sigma(z-iv)}}{iv-z}dv - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(u)\sin\sigma(z-u)}{u-z}du = \begin{cases} f(z), z \in \mathbb{C}_+, \\ 0, z \in \mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{C}}_+. \end{cases}$$

Теорема 2. *Якщо* $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+), 1 \leqslant p < +\infty, \sigma \geqslant 0$, *то для* $z = x + iy \in \mathbb{C}_+$

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{xe^{-i\sigma(z-iv)}f(iv)}{(y-v)^2+x^2}dv + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{xe^{i\sigma(z-iv)}f(iv)}{(y-v)^2+x^2}dv - \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{xf(u)\sin\sigma(z-u)}{(u-z)(u+\overline{z})}du, \quad (1)$$

$$f(z) = \frac{i}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{(v-y)e^{-i\sigma(z-iv)}f(iv)}{(y-v)^2+x^2}dv + \frac{i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{(v-y)e^{i\sigma(z-iv)}f(iv)}{(y-v)^2+x^2}dv -$$
$$-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{(u-iy)f(u)\sin\sigma(z-u)}{(u-z)(u+\overline{z})}du. \quad (2)$$

Зауважимо, що оскільки $H^p_{\sigma_1}(\mathbb{C}_+) \subset H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $0 \leqslant \sigma_1 < \sigma$, то формули, встановлені у теоремах 1 і 2 залишаються правильними і коли $f \in H^p_{\sigma_1}(\mathbb{C}_+)$. Наскільки нам відомо, і у випадку $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$ вони є новими.

Для доведення теорем наведемо деякі допоміжні твердження. Нехай $E^p[\mathbb{C}(\alpha,\beta)]$, $0 < \beta - \alpha \leqslant 2\pi, 1 \leqslant p < +\infty$, – простір функцій, аналітичних у куті $\mathbb{C}(\alpha,\beta) = \{z : \alpha < \arg z < \beta\}$, для яких $\sup_{\alpha<\varphi<\beta}\left\{\int_0^{+\infty}|f(re^{i\varphi})|^p dr\right\}^{1/p} < +\infty$. Ці простори досліджувались у [4]. Там, зокрема, доведено, що функції з цих просторів мають м. с. на $\partial\mathbb{C}(\alpha,\beta)$ кутові граничні значення, які теж позначаємо через f, $f \in L^p[\partial\mathbb{C}(\alpha,\beta)]$ і

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathbb{C}(\alpha,\beta)}\frac{f(t)}{t-z}dt = \begin{cases} f(z), z \in \mathbb{C}(\alpha,\beta), \\ 0, z \in \mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{C}(\alpha,\beta)}. \end{cases} \quad (3)$$

Доведення теореми 1. Нехай $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Тоді $f(z)e^{i\sigma z} \in E^p[\mathbb{C}(0,\pi/2)]$ і тому з рівності (3) маємо
$$\frac{e^{-i\sigma z}}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathbb{C}(0,\pi/2)}\frac{f(t)e^{i\sigma t}}{t-z}dt = \begin{cases} f(z), z \in \mathbb{C}(0,\pi/2), \\ 0, z \in \mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{C}(0,\pi/2)}. \end{cases} \quad (4)$$

Оскільки також $f(z)e^{-i\sigma z} \in E^p[\mathbb{C}(-\pi/2,0)]$, то подібно

$$\frac{e^{i\sigma z}}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathbb{C}(-\pi/2,0)}\frac{f(t)e^{-i\sigma t}}{t-z}dt = \begin{cases} f(z), z \in \mathbb{C}(-\pi/2,0), \\ 0, z \in \mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{C}(-\pi/2,0)}. \end{cases} \quad (5)$$

Додавши формули (4) та (5), отримаємо потрібну формулу для всіх z за винятком множини $\{z : \mathrm{Im} z = 0, \mathrm{Re} z > 0\}$. Але кожен з інтегралів у лівій частині формули збігається абсолютно і рівномірно на кожному компакті із $\mathbb{C}_+$, тому сума цих інтегралів є аналітичною у $\mathbb{C}_+$ функцією, а тому за теоремою єдиності для аналітичних функцій збігається з функцією f для всіх $z \in \mathbb{C}_+$. □

Відзначимо, що формула з теореми 1 є еквівалентною при $1 \leqslant p \leqslant 2$ до формули, встановленої першим зі співавторів у ([5])

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} \frac{f(iv)}{iv-z}dv - \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{f_2(u)}{u-z}du - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^0 \frac{f(iv)+f_2(iv)}{iv-z}dv - f_4(z),$$

де $f_4(z) = \begin{cases} f_2(z), z \in \mathbb{C}(-\pi/2;0), \\ 0, z \in \ \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{C}(-\pi/2;0)}, \end{cases}$ $\quad f_2 \in H^p_{2\sigma}(\mathbb{C}_+),\ f(iv)+f_2(iv) \in L^p(-\infty;0),$ $f(z)e^{-i\sigma z} \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, і для майже всіх $\tau \leqslant 0$

$$\frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} f_2(u)e^{\tau u}du + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} f(iv)e^{i\tau v}dv + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 (f(iv)+f_2(iv)e^{i\tau v}dv = 0.$$

Доведення теореми 2. Нехай $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Тоді правильні рівності (4) та (5). Позначимо через ψ_1 і ψ_2 ліві частини формул (4) та (5) відповідно. Тоді

$$\psi_1(z) - \psi_1(-\overline{z})e^{-2i\sigma\mathrm{Re}z} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} f(it)e^{-i\sigma x-\sigma t+\sigma y}\Big(\frac{1}{it-x-iy} - \frac{1}{it+x-iy}\Big)dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-i\sigma x+i\sigma t+\sigma y}\Big(\frac{1}{t-x-iy} - \frac{1}{t+x-iy}\Big)dt=$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-i\sigma(z-it)}f(it)}{x^2+(t-y)^2}dt + \frac{1}{\pi i}\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-i\sigma(z-t)}f(t)}{(t-iy)^2-x^2}dt.$$

Подібно

$$\psi_2(z) - \psi_2(-\overline{z})e^{2i\sigma\mathrm{Re}z} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{-\infty} f(it)e^{i\sigma x}e^{\sigma t}e^{-\sigma y}\Big(\frac{1}{it-x-iy} - \frac{1}{it+x-iy}\Big)dt-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty} f(t)e^{i\sigma z}e^{i\sigma t}\Big(\frac{1}{t-x-iy} - \frac{1}{t+x-iy}\Big)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^0 \frac{xe^{i\sigma(z-it)}f(it)}{x^2+(t-y)^2}dt - \frac{1}{\pi i}\int_0^{+\infty}\frac{xe^{i\sigma(z-t)}f(t)}{(t-iy)^2-x^2}dt.$$

З іншого боку, з рівностей (4) та (5) маємо

$$\psi_1(z) - \psi_1(-\overline{z})e^{-2i\sigma\mathrm{Re}z} = \begin{cases} f(z), z \in \mathbb{C}(0,\pi/2), \\ 0, z \in \ \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{C}}(0,\pi/2), \end{cases}$$

$$\psi_2(z) - \psi_2(-\overline{z})e^{2i\sigma\mathrm{Re}z} = \begin{cases} f(z), z \in \mathbb{C}(-\pi/2,0), \\ 0, z \in \ \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{C}}(-\pi/2,0). \end{cases}$$

Тому для $z \in \mathbb{C}(-\pi/2,0) \cup \mathbb{C}(0,\pi/2)$ отримуємо

$$f(z) = \psi_1(z) - \psi_1(-\overline{z})e^{-2i\sigma\mathrm{Re}z} + \psi_2(z) - \psi_2(-\overline{z})e^{2i\sigma\mathrm{Re}z} = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-i\sigma(z-it)}f(it)}{x^2+(t-y)^2}dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^0 \frac{xe^{i\sigma(z-it)}f(it)}{x^2+(t-y)^2}dt - \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{xf(t)\sin\sigma(z-t)}{(t-z)(t+\overline{z})}.$$

Для завершення доведення рівності (1) зауважимо, що функція з правої її частини є неперервною на кожному компакті з $\mathbb{C}_+$ і тому збігається з f для кожного $z \in \mathbb{C}_+$. Доведення формули (2) отримуємо за допомогою подібних міркувань, розглядаючи суму $\psi_1(z) + \psi_1(-\overline{z})e^{-2i\sigma \mathrm{Re} z} + \psi_2(z) + \psi_2(-\overline{z})e^{2i\sigma \mathrm{Re} z}$ і враховуючи, що

$$\psi_1(z) + \psi_1(-\overline{z})e^{-2i\sigma \mathrm{Re} z} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{(it-iy)e^{-i\sigma(z-it)}f(it)}{x^2+(t-y)^2}dt + \frac{1}{\pi i}\int\limits_0^{+\infty} \frac{(t-iy)e^{-i\sigma(z-t)}f(t)}{(t-iy)^2-x^2}dt$$

та

$$\psi_2(z) + \psi_2(-\overline{z})e^{2i\sigma \mathrm{Re} z} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{(it-iy)e^{i\sigma(z-it)}f(it)}{x^2+(t-y)^2}dt - \frac{1}{\pi i}\int\limits_0^{+\infty} \frac{(t-iy)e^{i\sigma(z-t)}f(t)}{(t-iy)^2-x^2}dt. \qquad \square$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Кусис П. Введение в теорию пространств H^p. – М.: Наука, 1984. – 368 с.
2. Винницкий Б. В. *О нулях функций, аналитических в полуплоскости, и полноте систем экспонент* // Укр. мат. журн. – 1994. – Т. 46, №5. – С.484–500.
3. Седлецкий А. М. *Эквивалентное определение пространств H^p в полуплоскости и некоторые приложения* // Матем. сб. – 1975. – Т. 96, №1. – С.75–82.
4. Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – М.:Наука, 1966. – 672 с.
5. Винницький Б.В. *Про узагальнення теореми Пелі-Вінера* // Матем. студії – 1995. – №4. – С.37–44.

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,
Інститут фізики, математики та інформатики, кафедра математичного аналізу
dilnyi@ukr.net

Надійшло 24.09.2006