УДК 517.956

В. В. Городецький, О. М. Ленюк

ДВОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

V. V. Gorodetsky, O. M. Lenyuk. *Two-point problem for one class of evolutionary equations*, Matematychni Studii, **28** (2007) 175–182.

We establish the correct solvability of the two-point problem for evolutionary equations with a pseudo-Bessel operator in the case when a boundary condition is a generalized function of distribution type.

В. В. Городецкий, О. М. Ленюк. *Двухточечная задача для одного класса эволюционных уравнений* // Математичні Студії. – 2007. – Т.28, №2. – С.175–182.

Устанавливается корректная разрешимость двухточечной задачи для эволюционных уравнений с псевдо–бесселевым оператором в случае, когда граничное условие является обобщенной функцией типа распределений.

Протягом останніх десятиліть інтенсивно розвивається теорія псевдодиференціальних операторів (ПДО), які формально можна подати у вигляді $F^{-1}_{\sigma\to x}[a(t,x;\sigma)F_{x\to\sigma}]$, $\{x,\sigma\}\subset\mathbb{R}^n$, $t>0$, де a — функція (символ), що задовольняє певні умови, F, F^{-1} — пряме та обернене перетворення Фур'є. Імпульсом для такого розвитку послужив той факт, що ПДО тісно пов'язані з важливими задачами аналізу і сучасної математичної фізики. Серед нових розділів цієї теорії особливої уваги заслуговує теорія рівнянь з ПДО, побудованими за негладкими однорідними символами. Випадок однорідних символів має важливі застосування в теорії випадкових процесів. Теорія ПДО з негладкими символами тісно пов'язана також із сучасною теорією фракталів.

Дослідженням ПДО та задачі Коші для еволюційних рівнянь з ПДО займались M. Nagase, R. Shinkai, C. Tsutsumi, М. А. Шубін, М. Тейлор, Л. Хермандер, Ю. А. Дубінський, Б. Й. Пташник, С. Д. Ейдельман, Я. М. Дрінь, А. Н. Кочубей, М. В. Федорюк та ін. При цьому отримано результати про розв'язність задачі Коші у різних функціональних просторах.

До псевдодиференціальних рівнянь формально можна віднести і сингулярні еволюційні рівняння з оператором Бесселя (B-параболічні рівняння), який вироджується по певній просторовій змінній, а саме рівняння при цьому вироджується на межі області, оскільки оператор Бесселя

$$B_\nu=\frac{d^2}{dx^2}+\frac{2\nu+1}{x}\frac{d}{dx},\quad \nu>-\frac{1}{2},$$

можна визначити за допомогою співвідношення $B_\nu\varphi=-F^{-1}_{B_\nu}[\sigma^2F_{B_\nu}[\varphi]]$, де F_{B_ν} — перетворення Бесселя, φ — елемент простору, в якому вказане перетворення визначене. До

2000 *Mathematics Subject Classification:* 35F10.

класу псевдодиференціальних рівнянь природно віднести еволюційні рівняння з оператором $A = F_{B_\nu}^{-1}[a \cdot F_{B_\nu}]$, де a — однорідний негладкий у точці 0 символ (A надалі називатимемо псевдобесселевим оператором). Для таких рівнянь задача Коші та двоточкова задача не вивчені. У цій праці у випадку, коли крайова умова є узагальненою функцією типу розподілів, встановлюється коректна розв'язність двоточкової задачі для рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + Au(t,x) = 0, \quad t \in (0,T), x \in \mathbb{R}_+^{n+1}.$$

Досліджується структура фундаментального розв'язку такої задачі, знайдено умови, за яких розв'язок подається у вигляді згортки крайової умови та фундаментального розв'язку.

Нехай $x = (x', x_{n+1})$, $x' = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|x'\| = (x_1^2 + ... + x_n^2)^{1/2}$, $x_{n+1} \in \mathbb{R}_+$, $\Omega_+ = (0,T) \times \mathbb{R}_+^{n+1}$, T — фіксоване додатне число, $\mathbb{R}_+^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$, $k = (k', k_{n+1}) \in \mathbb{Z}_+^{n+1}$, $k' = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $|k| = |k'| + k_{n+1}$, $|k'| = k_1 + \dots + k_n$, $D_x^k = D_{x'}^{k'} D_{x_{n+1}}^{k_{n+1}}$, $D_{x'}^{k'} = D_{x_1}^{k_1} \dots D_{x_n}^{k_n}$, γ — фіксоване число з множини $(1, +\infty) \setminus \{2, 3, 4, \dots\}$, $\gamma_0' : = n + [\gamma]$, $\gamma_0 : = 1 + [\gamma] + p_0$, $p_0 = 2\nu + 1 \in \mathbb{N}$, $\nu > 0$ — фіксоване число з множини $\{3/2; 5/2; 7/2; \dots\}$, $M(x') : = 1 + \|x'\|$, $\widetilde{M}(x_{n+1}) : = 1 + |x_{n+1}|$.

Символом Φ позначимо сукупність функцій $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, парних по змінній x_{n+1}, які задовольняють нерівності

$$|D_x^k \varphi(x)| \equiv \left| \frac{\partial^{|k|} \varphi(x_1, \dots, x_{n+1})}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_{n+1}^{k_{n+1}}} \right| \leq \frac{c_k}{M(x')^{\gamma_0' + |k'|} \cdot \widetilde{M}(x_{n+1})^{\gamma_0 + k_{n+1}}}, \quad k \in \mathbb{Z}_+^{n+1}, x \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Введемо в Φ зліченну систему норм за формулами

$$\|\varphi\|_p : = \sup_{x \in \mathbb{R}^{n+1}} \Big\{ \sum_{m=0}^{p} \sum_{|k|=m} M(x')^{\gamma_0' + |k'|} \widetilde{M}(x_{n+1})^{\gamma_0 + k_{n+1}} |D_x^k \varphi(x)| \Big\}, \quad \varphi \in \Phi, p \in \mathbb{Z}_+.$$

Очевидно, що $\|\varphi\|_0 \leq \|\varphi\|_1 \leq \|\varphi\|_2 \leq \dots$, $\varphi \in \Phi$, тобто ці норми є попарно зрівняними. Використовуючи результати, одержані в ([1]) твердимо, що Φ — повний досконалий зліченно нормований простір. Збіжність у просторі Φ можна охарактеризувати ще й так: послідовність $\{\varphi_s, s \geq 1\} \subset \Phi$ збігається в просторі Φ до функції $\varphi \in \Phi$ тоді й тільки тоді, коли вона: 1) обмежена в Φ, тобто $\forall p \in \mathbb{Z}_+, \exists c = c(p) > 0, \forall s \geq 1 : \|\varphi_s\|_p \leq c$; 2) правильно збігається в Φ, а саме, для довільного $k \in \mathbb{Z}_+^{n+1}$ послідовність $\{D_x^k(\varphi_s - \varphi), s \geq 1\}$ збігається до нуля рівномірно на кожному компакті $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}_+^{n+1}$.

Із результатів, наведених в ([1]) випливає, що у Φ визначена і неперервна операція зсуву аргументу $T_{\xi'}$ по змінних $x_1, \dots, x_n$, тобто

$$T_{\xi'} : \ \varphi(x) \to \varphi(x' + \xi', x_{n+1}), \quad \varphi \in \Phi, \xi' \in \mathbb{R}^n,$$

а також операція $T_{x_{n+1}}^{\xi_{n+1}}$ узагальненого зсуву аргументу за змінною x_{n+1}:

$$T_{x_{n+1}}^{\xi_{n+1}} \varphi(x) = b_\nu \cdot \int_0^\pi \varphi(x', \sqrt{x_{n+1}^2 + \xi_{n+1}^2 - 2x_{n+1}\xi_{n+1}\cos\omega}) \sin^{2\nu} \omega d\omega,$$

де $b_\nu = \Gamma(\nu+1)/(\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2))$; ця операція відповідає оператору Бесселя B_ν, який діє за змінною x_{n+1} ([2]).

На елементах простору Φ визначена і є неперервною операція перетворення Фур'є-Бесселя, яку надалі позначатимемо символом $F_{D,B}$:

$$\psi(\sigma) \equiv F_{D,B}[\varphi](\sigma) : = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \varphi(x', x_{n+1}) e^{-i(x',\sigma')} j_\nu(\sigma_{n+1} x_{n+1}) x_{n+1}^{2\nu+1} dx' dx_{n+1}, \quad \varphi \in \Phi,$$

тут j_ν — нормована функція Бесселя.

Символом Φ' позначимо простір усіх лінійних неперервних функціоналів над відповідним простором основних функцій зі слабкою збіжністю. Оскільки в просторі Φ визначена операція зсуву аргументу та операція узагальненого зсуву аргументу, то згортку узагальненої функції $f \in \Phi'$ з основною функцією задамо формулою

$$(f * \varphi)(x) = \langle f_\xi, T_{\xi'} T_{x_{n+1}}^{\xi^{n+1}} \widehat{\varphi}(-x', x_{n+1})\rangle = \langle f_\xi, T_{x_{n+1}}^{\xi^{n+1}} \varphi(x' - \xi', x_{n+1})\rangle, \quad \varphi \in \Phi,$$

де $\widehat{\varphi}(x', x_{n+1}) = \varphi(-x', x_{n+1})$; при цьому $f * \varphi$ є нескінченно диференційовною функцією. Якщо $f * \varphi \in \Phi$, $\forall \varphi \in \Phi$ і із співвідношення $\varphi_s \to 0$, $s \to \infty$ у просторі Φ випливає, що $f * \varphi_s \to 0$, $s \to \infty$ у просторі Φ, то функціонал f називається *згортувачем* у просторі Φ.

Перетворення Фур'є-Бесселя узагальненої функції $f \in \Phi'$ визначимо за допомогою співвідношення

$$\forall \varphi \in \Psi = F_{D,B}[\Phi] \colon \langle F_{D,B}[f], \varphi\rangle = \langle f, F_{D,B}^{-1}[\varphi]\rangle,$$

а обернене перетворення Фур'є-Бесселя $F_{D,B}^{-1}$:

$$F_{D,B}^{-1}[\varphi](x) = (2\pi)^{-n} c_\nu \cdot \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \varphi(\sigma', \sigma_{n+1}) e^{i(x',\sigma')} j_\nu(\sigma_{n+1} x_{n+1}) \sigma_{n+1}^{2\nu+1} d\sigma' d\sigma_{n+1},$$

де $c_\nu = (2^{2\nu}\Gamma^2(\nu+1))^{-1}$. Для перетворення Фур'є-Бесселя узагальнених функцій з простору Φ' правильним є таке твердження ([3]): *якщо узагальнена функція $f \in \Phi'$ — згортувач у просторі Φ, то $F_{D,B}[f * \varphi] = F_{D,B}[f] \cdot F_{D,B}[\varphi]$ для довільної основної функції $\varphi \in \Phi$.*

Нехай $a \colon \mathbb{R}^{n+1} \to [0, +\infty)$ — неперервна, парна за змінною x_{n+1} функція, однорідна порядку $\gamma \in (1, +\infty) \setminus \{2, 3, \dots\}$ (тобто $a(\lambda\xi) = \lambda^\gamma a(\xi)$, $\lambda > 0$), яка:

1) нескінченно диференційовна при $\xi \neq 0$;

2) похідні функції a задовольняють умову

$$\forall k \in \mathbb{Z}_+^{n+1}\ \exists c_k > 0\ \forall \xi \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \colon\ |D_\xi^k a(\xi)| \le c_k \|\xi\|^{\gamma - |k|};$$

3) $\exists \delta_0 > 0\ \forall \xi \in \mathbb{R}^{n+1} \colon a(\xi) \ge \delta_0 \|\xi\|^\gamma$.

Зазначимо, що функція a є *мультиплікатором* у просторі $\Psi = F_{D,B}[\Phi]$. У зв'язку з цим розглянемо оператор $A \colon \Phi \to \Phi$, який визначимо за допомогою співвідношення

$$\forall \varphi \in \Phi \colon A\varphi = F_{D,B}[a F_{D,B}[\varphi]].$$

З властивостей перетворення Фур'є-Бесселя (прямого і оберненого) випливає, що A — лінійний і неперервний оператор у просторі Φ.

Розглянемо двоточкову задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = 0, \quad (t, x) \in \Omega_+, \tag{1}$$

$$\mu_1 u(t, \cdot)|_{t=0} - \mu_2 u(t, \cdot)|_{t=T} = \varphi \tag{2}$$

(тут вважаємо, що $\mu_1 > \mu_2 > 0$). Класичний розв'язок $u \in C^1((0, T), \Phi)$ задачі (1), (2) шукаємо за допомогою перетворення Фур'є-Бесселя, тому припускаємо, що функція φ є елементом простору Φ. За допомогою безпосередніх обчислень знаходимо, що розв'язок задачі (1), (2) має вигляд

$$u(t, x) = (2\pi)^{-n} c_\nu \cdot \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \frac{\exp\{-ta(\sigma)\}\widetilde{\varphi}(\sigma)}{\mu_1 - \mu_2 \exp\{-Ta(\sigma)\}} \exp\{i(x', \sigma')\} j_\nu(x_{n+1}\sigma_{n+1}) \sigma_{n+1}^{2\nu+1} d\sigma' d\sigma_{n+1},$$

де $\widetilde{\varphi}(\sigma) = F_{D,B}[\varphi(x)]$. Введемо позначення

$$G(t, T, x) = F_{D,B}^{-1}\Big[\frac{\exp\{-ta(\sigma)\}}{\mu_1 - \mu_2 \exp\{-Ta(\sigma)\}}\Big] =$$

$$= (2\pi)^{-n} c_\nu \cdot \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \frac{\exp\{-ta(\sigma)\}}{\mu_1 - \mu_2 \exp\{-Ta(\sigma)\}} e^{-i(x',\sigma')} j_\nu(x_{n+1}\sigma_{n+1}) \sigma_{n+1}^{2\nu+1} d\sigma. \tag{3}$$

Тоді для $t \in (0, T), x \in \mathbb{R}_+^{n+1}$

$$u(t,x)=\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} T_{x_{n+1}}^{\xi_{n+1}} G(t,T,x'-\xi')\varphi(\xi',\xi_{n+1})\xi_{n+1}^{2\nu+1}d\xi' d\xi_{n+1} = G(t,T,x)*\varphi(x).$$

Справді, скористаємося тим, що $j_\nu(\sigma_{n+1}\xi_{n+1})j_\nu(x_{n+1}\sigma_{n+1}) = T_{x_{n+1}}^{\xi_{n+1}} j_\nu(x_{n+1}\sigma_{n+1})$. Тоді

$$u(t,x)=(2\pi)^{-n}c_\nu\cdot\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}}\frac{\exp\{-ta(\sigma)\}}{\mu_1-\mu_2\exp\{-Ta(\sigma)\}}e^{i(x',\sigma')}\times$$

$$\times\Big(\int_{\mathbb{R}^{n+1}}\varphi(\xi',\xi_{n+1})e^{-i(\sigma',\xi')}j_\nu(\sigma_{n+1}\xi_{n+1})\xi_{n+1}^{2\nu+1}d\xi\Big)j_\nu(x_{n+1}\sigma_{n+1})\sigma_{n+1}^{2\nu+1}d\sigma=$$

$$=\int_{\mathbb{R}^{n+1}}T_{x_{n+1}}^{\xi_{n+1}}\Big((2\pi)^{-n}c_\nu\cdot\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}}\frac{\exp\{-ta(\sigma)\}}{\mu_1-\mu_2\exp\{-Ta(\sigma)\}}e^{i(\sigma',x'-\xi')}\times$$

$$\times j_\nu(x_{n+1}\sigma_{n+1})\sigma_{n+1}^{2\nu+1}d\sigma\Big)\varphi(\xi',\xi_{n+1})\xi_{n+1}^{2\nu+1}d\xi=$$

$$=\int_{\mathbb{R}^{n+1}}T_{x_{n+1}}^{\xi_{n+1}}G(t,T,x'-\xi',x_{n+1})\varphi(\xi',\xi_{n+1})\xi_{n+1}^{2\nu+1}d\xi=G(t,T,x)*\varphi(x),\quad (t,x)\in\Omega_+.$$

Тут враховано, що $\forall\sigma\in\mathbb{R}_+^{n+1}\colon (\mu_1-\mu_2\exp\{-Ta(\sigma)\})^{-1}\le(\mu_1-\mu_2)^{-1},\quad \mu_1>\mu_2,$

$$|j_\nu(x_{n+1}\sigma_{n+1})|\le A_\nu,\quad \forall x_{n+1}\in\mathbb{R},\sigma_{n+1}\in\mathbb{R},\exp\{-ta(\sigma)\}\le\exp\Big\{-\frac{t\delta_0}{n+1}\sum_{i=1}^n|\sigma_i|^\gamma\Big\};$$

звідси вже випливає збіжність інтеграла (3) та правильність здійснених перетворень. Безпосередньо встановлюємо, що $G(t,T,x)$ диференційовна по t і нескінченно диференційовна по x функція. Оскільки $(\mu_1-\mu_2\exp\{-Ta(\sigma)\})^{-1}=\mu_2^{-1}(\frac{\mu_1}{\mu_2}-\exp\{-Ta(\sigma)\})^{-1}=$ $=\mu_2^{-1}\mu^{-1}(1-\mu^{-1}\exp\{-Ta(\sigma)\})^{-1}=\mu_2^{-1}\sum_{k=0}^\infty\mu^{-k-1}\exp\{-a(\sigma)kT\}$, де $\mu=\mu_1\mu_2^{-1}>1$, то легко бачити, що $G(t,T,x)=\mu_2^{-1}\sum_{k=0}^\infty\mu^{-k-1}G(t+kT,x),(t,x)\in\Omega_+$, де $G(t+kT,x)=$ $(2\pi)^{-n}c_\nu\cdot\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}}e^{-(t+kT)a(\sigma)-i(x',\sigma')}j_\nu(x_{n+1}\sigma_{n+1})\sigma_{n+1}^{2\nu+1}d\sigma$, $G(t,x)$ — фундаментальний розв'язок рівняння (1), для якого правильними є такі оцінки ([4]):

$$|D_x^mG(t,x)|\le c_mt^{1+[\gamma]/\gamma}(t^{1/\gamma}+\|x'\|)^{-(|m'|+\gamma_0')}(t^{1/\gamma}+|x_{n+1}|)^{-(m_{n+1}+\gamma_0)},\tag{4}$$

$m\in\mathbb{Z}_+^{n+1}$, $t\in(0,T)$, $x\in\mathbb{R}^{n+1}$, стала $c_m>0$ не залежить від t (при встановленні оцінок (4) використовуються методи теорії задачі Коші для рівномірно параболічних та B-параболічних рівнянь). Враховуючи (4), знайдемо, що

$$|D_x^mG(t,T,x)|\le\mu_2^{-1}\sum_{k=0}^\infty\mu^{-k-1}|D_x^mG(t+kT,x)|\le$$

$$\le\mu_2^{-1}c_m\sum_{k=0}^\infty\mu^{-k-1}\frac{(t+kT)^{1+[\gamma]/\gamma}}{[(t+kT)^{1/\gamma}+\|x'\|]^{|m'|+\gamma_0'}[(t+kT)^{1/\gamma}+|x|_{n+1}]^{m_{n+1}+\gamma_0}}.\tag{5}$$

Зауваження 1. *Із оцінок (5) похідних функції G випливає, що при кожному $t\in(0,T)$ функція G, як функція аргументу x, є елементом простору Φ.*

Оскільки $\frac{\exp\{-ta(\sigma)\}}{\mu_1-\mu_2\exp\{-Ta(\sigma)\}}=\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}}G(t,T,x)e^{i(x',\sigma')}j_\nu(x_{n+1}\sigma_{n+1})x_{n+1}^{2\nu+1}dx$, $a(0)=0$, $j_\nu(0)=1$, то

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}}G(t,T,x)x_{n+1}^{2\nu+1}dx=\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\ .\tag{6}$$

Лема 1. $G(t,T,\cdot)\to\dfrac{\delta}{\mu_1-\mu_2}$ *при $t\to+0$ у просторі Φ', де δ — дельта-функція Дірака.*

Доведення. Врахувавши співвідношення (6), для довільної основної функції $\varphi\in\Phi$ маємо

$$\Big|\langle G(t,T,\cdot),\varphi\rangle-\tfrac{\langle\delta,\varphi\rangle}{\mu_1-\mu_2}\Big|=\Big|\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}}G(t,T,x)\varphi(x)x_{n+1}^{2\nu+1}dx-\tfrac{\varphi(0)}{\mu_1-\mu_2}\Big|\le$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |G(t,T,x)| \cdot |\varphi(x) - \varphi(0)| \cdot x_{n+1}^{2\nu+1} dx \equiv I(t).$$

Оскільки $\varphi \in \Phi$, то застосувавши формулу про скінченні прирости знайдемо, що $|\varphi(x) - \varphi(0)| \leq L(\|x'\| + \|x_{n+1}|)$, де $L = \max\left\{\max\limits_{\mathbb{R}^{n+1}}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right|, \ldots, \max\limits_{\mathbb{R}^{n+1}}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_{n+1}}\right|\right\}$. Візьмемо ε з проміжку $(0,T)$ і покладемо $t_0 = \varepsilon$. Тоді $|\varphi(x) - \varphi(0)| < 2L\varepsilon^\alpha$, якщо тільки $\|x'\| < t_0^\alpha$, $|x_{n+1}| < t_0^\alpha$, де $\alpha = \{\gamma\}/(4[\gamma]\gamma)$. Отже,

$$I(t) < 2L \cdot \varepsilon^\alpha \cdot \int_{\|x'\| < t_0^\alpha} \int_0^{t_0^\alpha} |G(t,T,x)| x_{n+1}^{2\nu+1} dx' dx_{n+1} +$$
$$+ \int_{\|x'\| \geq t_0^\alpha} \int_{t_0^\alpha}^{+\infty} |G(t,T,x)| \cdot |\varphi(x) - \varphi(0)| x_{n+1}^{2\nu+1} dx' dx_{n+1} \equiv 2L\varepsilon^\alpha \cdot I_1(t) + I_2(t).$$

Оцінимо $I_1(t)$. Легко бачити, що $I_1(t) \leq \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |G(t,T,x)| x_{n+1}^{2\nu+1} dx' dx_{n+1}$. Врахувавши зображення функції $G(t,T,x)$ знайдемо, що

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |G(t,T,x)| x_{n+1}^{2\nu+1} dx = \mu_2^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \left| \sum_{k=0}^\infty \mu^{-k-1} G(t+kT,x) \right| x_{n+1}^{2\nu+1} dx \leq$$
$$\leq \mu_2^{-1} \sum_{k=0}^\infty \mu^{-k-1} \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |G(t+kT,x)| x_{n+1}^{2\nu+1} dx, \tag{7}$$

де $G(t+kT,x) = (2\pi)^{-n} c_\nu \cdot \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} e^{-(t+kT)a(\sigma) - i(x',\sigma')} j_\nu(x_{n+1}\sigma_{n+1}) \sigma_{n+1}^{2\nu+1} d\sigma$. Здійснивши в (7) заміну змінної $x_i = (t+kT)^{1/\gamma} y_i$, $i \in \{1,\ldots,n+1\}$, дістанемо, що

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |G(t+kT,x)| x_{n+1}^{2\nu+1} dx = (t+kT)^{-(n+2\nu+2)/\gamma} \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |G(t+kT,(t+kT)^{1/\gamma} y)| y_{n+1}^{2\nu+1} dy.$$

З однорідності функції G маємо такі співвідношення

$$G(t+kT,(t+kT)^{1/\gamma} y) = (2\pi)^{-n} c_\nu \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} e^{-(t+kT)a(\xi) - i((t+kT)^{1/\gamma} y', \xi')} \times$$
$$\times j_\nu((t+kT)^{1/\gamma} y_{n+1} \xi_{n+1}) \xi_{n+1}^{2\nu+1} d\xi = \left| (t+kT)^{1/\gamma} \xi_i = z_i \right| = (2\pi)^{-n} c_\nu (t+kT)^{-(n+2\nu+2)/\gamma} \times$$
$$\times \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} e^{-a(z) - i(y',z')} j_\nu(y_{n+1} z_{n+1}) z_{n+1}^{2\nu+1} dz = (t+kT)^{-(n+2\nu+2)/\gamma} G_0(y),$$

де $G_0(y) = F_{D,B}^{-1}[e^{-a(z)}](y), G_0 \in \Phi$. Отже, $I_1(t) \leq \mu_2^{-1} \sum_{k=0}^\infty \mu^{-k-1} \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |G_0(y)| y_{n+1}^{2\nu+1} dy = b_0, \forall t \in (0,T)$, де стала $b_0 > 0$ не залежить від t.

Для того, щоб здійснити оцінку I_2, знову врахуємо властивість однорідності функції $a(\xi)$. Здійснивши заміну змінної інтегрування $\xi_i = t^{1/\gamma} \eta_i$, $i = \{1,\ldots,n+1\}$, подамо $G(t,T,x)$ у такому вигляді

$$G(t,T,x) = (2\pi)^{-n} c_\nu t^{(n+2\nu+2)/\gamma} \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \frac{e^{-t^2 a(\eta) - i(x', t^{1/\gamma}\eta')}}{\mu_1 - \mu_2 e^{-tTa(\eta)}} j_\nu(t^{1/\gamma} x_{n+1} \eta_{n+1}) \eta_{n+1}^{2\nu+1} d\eta.$$

Скориставшись методикою проведення оцінок функції G знайдемо, що для $\|x'\| \geq a > 0$, $|x_{n+1}| \geq a > 0$ правильними є нерівності

$$|G(t,T,x)| \leq c_0 t^{(n+2\nu+2)/\gamma} \sum_{k=0}^\infty \frac{\mu^{-k-1}(t^2+ktT)^{1+[\gamma]/\gamma}}{[(t^2+ktT)^{1/\gamma} + t^{1/\gamma}\|x'\|]^{n+[\gamma]}} \frac{1}{[(t^2+ktT)^{1/\gamma} + t^{1/\gamma}|x_{n+1}|]^{\gamma_0}} \leq$$
$$\leq \frac{c t^{(n+2\nu+2)/\gamma} \cdot t^{1+[\gamma]/\gamma}}{\|x'\|^{n+[\gamma]} |x_{n+1}|^{\gamma_0} \cdot t^{(n+[\gamma])/\gamma} \cdot t^{\gamma_0/\gamma}} = \frac{c t^{\{\gamma\}/\gamma}}{\|x'\|^{n+[\gamma]} \cdot |x_{n+1}|^{\gamma_0}}, \tag{8}$$

стала c залежить від μ, T і не залежить від t. Далі, врахувавши обмеженість функції φ, а також оцінку (8) дістанемо, що $(\forall t < t_0)$:

$$I_2(t) \leq c_1 t^{\{\gamma\}/\gamma} \int_{\|x'\| \geq t_0^\alpha} \|x'\|^{-(n+[\gamma])} dx' \cdot \int_{t_0^\alpha}^{+\infty} |x_{n+1}|^{-\gamma_0} dx_{n+1} \leq$$

$\leq c_2 t^{\{\gamma\}/\gamma} \int_{t_0^\alpha}^{+\infty} \rho^{-(1+[\gamma])} d\rho \cdot \int_{t_0^\alpha}^{+\infty} |x_{n+1}|^{-(1+[\gamma])} dx_{n+1} = \widetilde{c}_2 t^{\{\gamma\}/\gamma} t_0^{-[\gamma]\alpha} \cdot t_0^{-[\gamma]\alpha} \leq c_3 t_0^{\{\gamma\}/(2\gamma)} = c_3 \cdot \varepsilon^{\{\gamma\}/(2\gamma)}$. Отже, $(\forall \varepsilon \in (0,T))$ $(\exists t_0 = \varepsilon)$ $(\forall t\colon\ 0 < t < t_0) \Longrightarrow I(t) < 2Lb_0\varepsilon^\alpha + c_3 \cdot \varepsilon^{2\alpha[\gamma]}$. Якщо $\varepsilon \geq T$, то за $t_0 = t_0(\varepsilon)$ можна взяти довільне фіксоване число з проміжку $(0,T)$. Лему доведено. $\square$

Лема 2. $G(t,T,\cdot) \to \dfrac{\delta}{\mu_1 - \mu_2}$ *при* $t \to T - 0$ *у просторі* Φ'.

Доведення. Доведення цього твердження здійснюється за схемою доведення леми 1. Якщо скористатись позначеннями, введеними при доведенні леми 1, то досить довести, що $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists t_0 = t_0(\varepsilon) \in (0,T))$ $(\forall t\colon\ T - t_0 < t < T) \Longrightarrow I(t) < \varepsilon$.

Якщо $\varepsilon \in (0,T)$, то покладемо $t_0 = \varepsilon$ і скористаємось нерівністю $|\varphi(x) - \varphi(0)| < 2L \cdot \varepsilon^{\alpha}$, $\alpha = \{\gamma\}/(4[\gamma]\gamma)$, яка є правильною для $x = (x', x_{n+1})\colon\ ||x'|| < t_0^{\alpha}$, $|x_{n+1}| < t_0^{\alpha}$. Далі встановлюємо оцінку для I_1 (див. лему 1): $I_1(t) \leqslant b_0 =$const, яка справджується для всіх $t \in (0,T)$, зокрема і для $t \in (T - t_0, T)$.

Для того, щоб оцінити I_2 введемо позначення: $t - (T - t_0)\colon = \widetilde{t}$ (очевидно, що $0 < \widetilde{t} < t_0 \Leftrightarrow T - t_0 < t < T$) і здійснимо заміну змінної інтегрування $\xi = \widetilde{t}^{1/\gamma}\eta$. Як і при доведенні леми 1 для функції G отримаємо зображення

$$G(t,T,x) = (2\pi)^{-n} c_\nu \widetilde{t}^{(n+2\nu+2)/\gamma} \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} e^{-t\cdot\widetilde{t}a(\eta) - i(x', \widetilde{t}^{1/\gamma}\eta)} \times$$
$$\times \big(\mu_1 - \mu_2 e^{-\widetilde{t}Ta(\eta)}\big)^{-1} j_\nu\big(\widetilde{t}^{1/\gamma} x_{n+1}\eta_{n+1}\big)\eta_{n+1}^{2\nu+1} d\eta.$$

Звідси дістаємо $(\forall x\colon\ ||x'|| \geqslant a > 0,\quad |x_{n+1}| \geqslant a > 0)$ такі оцінки для функції G

$$\big|G(t,T,x)\big| \leqslant c_0 \widetilde{t}^{(n+2\nu+2)/\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^{-k-1}\cdot\big(t\cdot\widetilde{t} + k\widetilde{t}\cdot T\big)^{1+[\gamma]/\gamma}}{\big[\big(t\widetilde{t} + k\widetilde{t}T\big)^{1/\gamma} + \widetilde{t}^{1/\gamma}||x'||\big]^{n+[\gamma]}} \frac{1}{\big[\big(t\widetilde{t} + k\widetilde{t}T\big)^{1/\gamma} + \widetilde{t}^{1/\gamma}|x_{n+1}|\big]^{\gamma_0}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c\widetilde{t}^{(n+2\nu+2)/\gamma}\cdot\widetilde{t}^{1+[\gamma]/\gamma}}{||x'||^{n+[\gamma]}|x_{n+1}|^{\gamma_0}\cdot\widetilde{t}^{(n+[\gamma])/\gamma}\cdot\widetilde{t}^{\gamma_0/\gamma}} = \frac{c\widetilde{t}^{\{\gamma\}/\gamma}}{||x'||^{n+[\gamma]}|x_{n+1}|^{\gamma_0}}\ .$$

Тоді, $(\forall \widetilde{t} \in (0, t_0))$:

$$I_2(t) \leqslant c_1 \widetilde{t}^{\{\gamma\}/\gamma} \int_{||x'|| \geqslant t_0^{\alpha}} ||x'||^{-(n+[\gamma])} dx' \cdot \int_{t_0^{\alpha}}^{+\infty} |x_{n+1}|^{-\gamma_0} dx_{n+1} \leqslant$$
$$\leqslant c_2 \widetilde{t}^{\{\gamma\}/\gamma} \int_{t_0^{\alpha}}^{+\infty} \rho^{-(1+[\gamma])} d\rho \cdot \int_{t_0^{\alpha}}^{+\infty} x_{n+1}^{-(1+[\gamma])} dx_{n+1} = \widetilde{c}_2 \widetilde{t}^{\{\gamma\}/\gamma}\cdot t_0^{-2\alpha[\gamma]} \leqslant c_3 t_0^{\{\gamma\}/(2\gamma)} = c_3 \varepsilon^{\{\gamma\}/(2\gamma)},$$

тобто для всіх $t \in (T - t_0, T)$. Отже, $\forall \varepsilon \in (0,T)\, \exists t_0 = \varepsilon > 0\, \forall t\colon\ T - t_0 < t < T$ для I_2 справджується така ж оцінка як у лемі 1. Якщо $\varepsilon \geqslant T$, то за $t_0 = t_0(\varepsilon)$ можна взяти довільне фіксоване число з проміжку $(0,T)$. Цим доведено, що $< G(t,\cdot), \varphi > \to \frac{\varphi(0)}{\mu_1 - \mu_2} = < \frac{\delta}{\mu_1 - \mu_2}, \varphi >$, $t \to T - 0$, $\varphi \in \Phi$, тобто $G(t,\cdot) \to \frac{\delta}{\mu_1 - \mu_2}$ при $t \to T - 0$ у просторі Φ'. Лему доведено. □

Надалі функцію $G(t,T,x)$ називатимемо *фундаментальним розв'язком двоточкової задачі* для рівняння (1).

Наслідок 1. *Нехай* $\omega(t,x) = (f * G)(t,x)$, $f \in \Phi', (t,x) \in \Omega_+$. *Тоді граничні співвідношення* $\omega(t,\cdot) \to \frac{f}{\mu_1 - \mu_2}, t \to +0$, $\omega(t,\cdot) \to \frac{f}{\mu_1 - \mu_2}, t \to T - 0$, *виконуються у просторі* Φ'.

Ці властивості є наслідками властивостей функції G (див. леми 1, 2) та властивості неперервності операції згортки в просторі Φ' (роль одиниці виконує δ-функція Дірака). Наприклад, $\omega(t,\cdot) \to (f * G)(t,\cdot) \underset{t\to+0}{\longrightarrow} \big(f * \frac{\delta}{\mu_1 - \mu_2}\big)(\cdot) = \frac{f}{\mu_1 - \mu_2}$ у просторі Φ'.

Із тверджень, доведених в лемах 1, 2 випливає, що для рівняння (1) двоточкову задачу можна формулювати так. Для (1) розглянемо крайову задачу

$$\mu_1 u(t,\cdot)|_{t=0} - \mu_2 u(t,\cdot)|_{t=T} = \varphi, \quad \mu_1 > \mu_2 > 0, \tag{9}$$

де $\varphi \in \Phi'$. Під розв'язком задачі (1), (9) розумітимемо функцію $u \in C^1((0,T),\Phi)$, яка задовольняє рівняння (1), а також крайову умову (9) у тому сенсі, що $\mu_1 \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \mu_2 \lim_{t\to T-0} u(t,\cdot) = \varphi$ (границі розглядаються у просторі Φ'). Символом Φ'_* позначимо сукупність усіх узагальнених функцій з простору Φ', які є згортувачами у просторі Φ.

Теорема 1. *Задача (1), (9) коректно розв'язна в класі узагальнених функцій* Φ'_*. *Розв'язок подається у вигляді згортки*

$$u(t,x) = (\varphi * G)(t,x), \quad \varphi \in \Phi'_*,\ (t,x) \in \Omega_+,$$

де G — *фундаментальний розв'язок двоточкової задачі для рівняння (1).*

Доведення. Переконаємося спочатку в тому, що функція $u(t,x)$ є розв'язком рівняння (1). Справді,

$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\varphi * G)(t,x) = \big(\varphi * \frac{\partial}{\partial t}G\big)(t,x), \quad Au(t,x) = F^{-1}_{D,B}[a(\xi)F_{D,B}[(\varphi * G)(t,x)](\xi)](x).$

Оскільки φ — згортувач у просторі Φ, то

$$F_{D,B}[(\varphi * G)(t,x)](\xi) = F_{D,B}[\varphi](\xi) \cdot F_{D,B}[G](t,\xi) = F_{D,B}[\varphi](\xi) \cdot Q(t,\xi),$$

де $Q(t,\xi) = \exp\{-ta(\xi)\}(\mu_1 - \mu_2 \exp\{-Ta(\xi)\})^{-1}$.

Отже,

$$Au(t,x) = F^{-1}_{D,B}[a(\xi)Q(t,\xi)F_{D,B}[\varphi](\xi)](x) =$$
$$= -F^{-1}_{D,B}\big[\tfrac{\partial}{\partial t}Q(t,\xi)F_{D,B}[\varphi](\xi)\big](x) = -F^{-1}_{D,B}\big[F_{D,B}\big[\tfrac{\partial}{\partial t}G\big] \cdot F_{D,B}[\varphi]\big](x) =$$
$$= -F^{-1}_{D,B}[F_{D,B}[(\varphi * \tfrac{\partial}{\partial t}G)]](x) = -\big(\varphi * \tfrac{\partial}{\partial t}G\big)(t,x).$$

Звідси випливає, що функція $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega_+$, задовольняє рівняння (1). З наслідку 1 дістаємо, що u задовольняє крайову умову у вказаному сенсі

$$\mu_1 \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \mu_2 \lim_{t\to T-0} u(t,\cdot) = \mu_1 \lim_{t\to+0}(\varphi * G)(t,\cdot) - \mu_2 \lim_{t\to T-0}(\varphi * G)(t,\cdot) =$$
$$= \frac{\mu_1}{\mu_1 - \mu_2}\varphi - \frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2}\varphi = \varphi.$$

Зазначимо також, що u неперервно залежить від функції $\varphi \in \Phi'_*$, оскільки операція згортки володіє властивістю неперервності.

Залишається переконатися, що розв'язок задачі (1), (9) єдиний. Для цього розглянемо задачу Коші

$$\frac{\partial v}{\partial t} - A^* v = 0, \quad (t,x) \in [0,t_0) \times \mathbb{R}^{n+1}_+ \equiv \Omega'_+, \quad 0 \le t < t_0 \le T, \tag{10}$$

$$v(t,\cdot)|_{t=t_0} = \psi, \quad \psi \in \Phi'_*, \tag{11}$$

де $A^* = A$ — звуження спряженого оператора до оператора A на простір $\Phi \subset \Phi'$. Умова (11) розуміється в слабкому сенсі. Розглянемо функцію

$$G^*(t - t_0, x) = F^{-1}_{D,B}[e^{(t-t_0)a(\xi)}](x).$$

Розв'язок задачі Коші (10), (11) дається формулою

$$v(t,x) = (\psi * G^*)(t - t_0, x), \quad (t,x) \in \Omega'_+,$$

при цьому $v(t,\cdot) \in \Phi$ при кожному $t \in [0,t_0)$, $v(t,\cdot)$ як абстрактна функція параметра t із значеннями у просторі Φ диференційовна по t ([3]).

Нехай $Q^t_{t_0}\colon \Phi'_* \to \Phi$ — оператор, який зіставляє функціоналу $\psi \in \Phi'_*$ розв'язок $v(t,\cdot) \in \Phi$ задачі (10), (11)

$$\forall \psi \in \Phi'_*\colon \quad Q^t_{t_0}\psi = (\psi * G^*)(t - t_0, x) \equiv v(t,x), \quad (t,x) \in \Omega'_+.$$

Оператор $Q^t_{t_0}$ є лінійним і неперервним, оскільки такими властивостями володіє операція згортки. Він визначений для довільних t і t_0 таких, що $0 \le t < t_0 \le T$ і володіє властивостями:

$$\forall \psi \in \Phi'_*\colon \quad \frac{dQ^t_{t_0}\psi}{dt} - A^* Q^t_{t_0}\psi = 0, \quad \lim_{t\to t_0} Q^t_{t_0}\psi = \psi$$

(границя розглядається у просторі Φ').

Розглянемо тепер розв'язок $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega'_+$, задачі (1), (9), який трактуватимемо як функціонал з простору $\Phi' \supset \Phi$. Доведемо, що задача (1), (9) може мати лише єдиний розв'язок у просторі Φ'. Для цього досить довести, що єдиним розв'язком рівняння (1) при нульовій крайовій умові може були лише функціонал $u(t,x) \equiv 0$. Застосуємо функціонал $u(t,x)$ до функції $Q^t_{t_0}\psi \in \Phi \subset \Phi'_*$, де ψ — довільний елемент з простору Φ. Використовуючи рівняння (1), (10) та твердження про диференційовні абстрактні функції [5, с. 96] знаходимо, що $(\forall \psi \in \Phi, \quad 0 < t < t_0 \le T)$

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle u(t,\cdot), Q^t_{t_0}\psi\rangle = \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, Q^t_{t_0}\psi \right\rangle + \left\langle u, \frac{\partial Q^t_{t_0}\psi}{\partial t} \right\rangle =$$
$$= -\langle Au, Q^t_{t_0}\psi\rangle + \langle u, A^* Q^t_{t_0}\psi\rangle = -\langle Au, Q^t_{t_0}\psi\rangle + \langle Au, Q^t_{t_0}\psi\rangle = 0.$$

Звідси випливає, що функція $g(t)\colon = \langle u(t,\cdot), Q^t_{t_0}\psi\rangle, \quad 0 < t < t_0 \le T$, є сталою ($g(t) = C \equiv \mathrm{const}$). Оскільки ψ — згортувач у просторі Φ (Φ утворює топологічну алгебру відносно згортки), то звідси дістаємо, що $\psi * G^*(t-t_0,\cdot) \to \psi * G^*(-t_0,\cdot)$ при $t \to +0$ у просторі Φ. Отже, $Q^t_{t_0}\psi = \psi * G^*(t-t_0,\cdot) \to Q^0_{t_0}\psi$ при $t \to +0$ у просторі Φ. Крім того, за доведеним раніше за умови $\varphi = 0$ маємо, що $u(t,\cdot) \to 0$ при $t \to +0$ у просторі Φ'. Тоді із відповідного твердження про абстрактні функції ([5, с.95]) випливає, що

$$c = \langle u(t,\cdot), Q^t_{t_0}\psi\rangle \underset{t\to+0}{\longrightarrow} \langle 0, Q^0_{t_0}\psi\rangle = 0.$$

Отже, $c = 0$, тобто $\langle u(t,\cdot), Q^t_{t_0}\psi\rangle = 0,\ 0 < t < t_0 \le T$. Оскільки $u(t,\cdot)$, $Q^t_{t_0}\psi$ можна розуміти як регулярні узагальнені функції з простору Φ', то правильним є співвідношення

$$\langle u(t,\cdot), Q^t_{t_0}\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} u(t,x) Q^t_{t_0}\psi(x) x^{2\nu+1}_{n+1} dx = \langle Q^t_{t_0}\psi, u(t,\cdot)\rangle. \tag{12}$$

Далі скористаємося тим, що $Q^t_{t_0}\psi \to \psi$ при $t \to t_0$ у просторі Φ', $u(t,\cdot) \to u(t_0,\cdot)$ при $t \to t_0$ у просторі Φ, якщо $t_0 \ne 0$, $t_0 \ne T$. Перейшовши в (12) до границі при $t \to t_0$ знайдемо, що

$$\lim_{t\to+0}\langle u(t,\cdot), Q^t_{t_0}\psi\rangle = \lim_{t\to+0}\langle Q^t_{t_0}\psi, u(t,\cdot)\rangle =$$
$$= \langle Q^{t_0}_{t_0}\psi, u(t_0,\cdot)\rangle = \langle \psi, u(t_0,\cdot)\rangle = \langle u(t_0,\cdot), \psi\rangle = 0.$$

Оскільки t_0 вибране довільним між 0 і T, то $u(t,x) \equiv 0$ для всіх $t \in (0,T)$. Теорему доведено. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Городецький В.В. Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу. – Чернівці: Рута, 1998. – 225 с.
2. Левитан Б.И. *Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье*// Успехи мат. наук – 1951. – Т. 6, вып. 2. – С. 102 – 143.
3. Ленюк О.М. *Перетворення Бесселя одного класу узагальнених функцій типу розподілів* // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. пр. Вип. 336–337. Математика.– Чернівці: Рута, 2007.– С. 95–102.
4. Ленюк О.М. *Задача Коші для еволюційних рівнянь з псевдо-Бесселевими операторами* // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. пр. Вип. 349. Математика.– Чернівці: Рута, 2007.– С. 55–65.
5. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Пространства основных и обобщенных функций.– М.: Физматгиз, 1958.– 308 с.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Надійшло 30.03.2007
Після переробки 4.12.2007