УДК 517.574

А. Ф. Гришин, А. Шуиги

К ТЕОРИИ ПРЕДЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ АЗАРИНА

A. F. Grishin, A. Chouigui. *On the theory of limit sets of Azarin*, Matematychni Studii, **28** (2007) 162–174.

There are four theorems in the note. Three of them are variants of known theorems. The first theorem is criterion for a family of subharmonic functions in a domain to have the property of sequential compactness. In the second theorem it is wrote general form of Azarin's limit set of subharmonic functions of entire order. From the fourth theorem it is followed that the investigation of Azarin's limit set of subharmonic functions of any proximate order is reduced to the case of constant proximate order. In addition it is constructed an example showing a conjecture of Azarin is failed. The third theorem is right variant of the conjecture of Azarin.

А. Ф. Гришин, А. Шуиги. *К теории предельных множеств Азарина* // Математичні Студії. – 2007. – Т.28, №2. – С.162–174.

Доказываются четыре теоремы, три из которых являются уточнениями известных теорем. Первая – это критерий компактности семьи субгармонических в некоторой области функций. Во второй теореме находится общий вид предельного множества Азарина для субгармонических функций целого порядка. В четвертой теореме доказывается, что изучение предельного множества Азарина для произвольного уточненного порядка сводится к случаю, когда уточненный порядок является постоянной функцией. Кроме того строится пример, опровергающий одно предположение Азарина. Третья теорема — это правильный вариант предположения Азарина.

Дифференцируемая на $(0,\infty)$ функция $\rho(r)$ называется *уточнённым порядком* в смысле Валирона, если $\rho(r)\to\rho,\ r\ln r\rho'(r)\to 0\ (r\to\infty)$. Свойства уточнённого порядка можно найти в ([1]). Новые результаты имеются в ([2]).

Пусть $v(z)$ — *субгармоническая* во всей плоскости *функция уточнённого порядка* $\rho(r)$, а μ — положительная *мера уточнённого порядка* $\rho(r)$. Первое означает, что

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{M(r,v)}{V(r)}<\infty,\quad \text{второе означает, что } \varlimsup_{r\to\infty}\frac{\mu(B(0,r))}{V(r)}<\infty,$$

где $M(r,v)=\max\{v(re^{i\theta})\colon \theta\in[0,2\pi]\}, B(0,r)=\{z\colon |z|\le r\}, V(r)=r^{\rho(r)}$. *Траектории Азарина* субгармонической функции v и меры μ определяются, соответственно, как семейство субгармонических функций $v_t(z)=\dfrac{v(tz)}{V(t)}$ и семейство мер

$$\mu_t(E)=\frac{\mu(tE)}{V(t)},\ t\in(0,\infty).$$

Основополагающей работой по теории *предельных множеств* является ([3]). Однако, вышеуказанные траектории рассматривались уже в работе [4]. Отметим еще обзор [5] по теории предельных множеств.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 31A05.

Важным фактом, на который опирается построение предельных множеств, является следующий. *Если функция v и мера μ имеют уточнённый порядок $\rho(r)$, то положительные полутраектории Азарина v_t и μ_t (часть траекторий, для которой $t \geq 1$) являются компактными множествами, если их рассматривать как множества в пространстве обобщённых функций.*

Мы не указали топологию в пространстве обобщённых функций. Слова о компактности означают следующее. Для произвольной последовательности $t_n \to +\infty$ $(n \to \infty)$ существует подпоследовательность t_{n_k} такая, что последовательность $v_{t_{n_k}}(z)$ (соответственно последовательность $\mu_{t_{n_k}}$) будет сходящейся.

Предельное множество Азарина $\mathrm{Fr}\ v$ субгармонической функции v определяется как множество всех субгармонических функций $u(z)$ вида

$$u(z) = \lim v_{t_n}(z),\ t_n \to +\infty\ (n \to \infty).$$

Предельное множество Азарина $\mathrm{Fr}\ \ \mu$ меры μ определяется как множество всех мер ν вида

$$\nu = \lim \mu_{t_n},\ t_n \to +\infty\ (n \to \infty).$$

Пределы в обеих случаях понимаются в смысле теории обобщённых функций. Это означает следующее. Для любой основной функции φ (финитной бесконечно дифференцируемой функции) выполняются соответственно равенства

$$\lim_{n\to\infty} \iint v_{t_n}(z)\varphi(z)dm_2(z) = \iint u(z)\varphi(z)dm_2(z), \quad \lim_{n\to\infty} \iint \varphi(z)d\mu_{t_n}(z) = \iint \varphi(z)d\nu(z),$$

где m_2 — плоская мера Лебега.

После этого краткого вступления начинаем изложение наших результатов.

Теорема 1. *Для того, чтобы семейство $v_\lambda(z)$, $\lambda \in \Lambda$ субгармонических функций в области G было компактным в смысле теории обобщённых функций, необходимо и достаточно, чтобы:*

1) для любого компакта $K \subset G$ выполнялось соотношение

$$S(K) = \sup\{\sup\{v_\lambda(z)\colon z \in K\}\colon \lambda \in \Lambda\} < \infty,$$

2) существовал компакт $K_1 \subset G$ такой, что

$$I(K_1) = \inf\{\sup\{v_\lambda(z)\colon z \in K_1\}\colon \lambda \in \Lambda\} > -\infty.$$

"Достаточная" часть теоремы 1 — это теорема 2.7.1.1 из лекций В.С. Азарина [6]. Условия 1) и 2) из текста теоремы, как условия гарантирующие компактность семейства, появились в работе Л. Хёрмандера [7] (см. также [8], глава 4, теорема 4.1.9).

Несмотря на сказанное, мы даём полное доказательство теоремы 1. Наше доказательство и доказательство теоремы 2.7.1.1 основаны на одних и тех же идеях, но предлагаемое доказательство нам кажется проще. Доказательство Хёрмандера совсем иное.

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Пусть семейство $v_\lambda(z)$ компактно в смысле теории обобщенных функций. Пусть μ_λ — риссовкая мера v_λ. Поскольку $\mu_\lambda = \frac{1}{2\pi}\triangle v_\lambda$, а операция дифференцирования непрерывна в пространстве обобщённых функций, то семейство мер μ_λ, $\lambda \in \Lambda$ также компактно. Отсюда легко следует, что для любого компакта $K \subset G$ справедливо соотношение

$$M(K) = \sup\{\mu_\lambda(K) : \lambda \in \Lambda\} < \infty.$$

Покажем, что для любого компакта $K \subset G$ выполняется неравенство $S(K) < \infty$. Для этого достаточно доказать, что для любого круга $B(z_0, R) = \{z :\ |z - z_0| \leq R\}$ такого, что $B(z_0, R) \subset G$ выполняется неравенство $S(B(z_0, R)) < \infty$. Пусть $B(z_0, R) \subset G$, а число $\delta > 0$ таково, что $B(z_0, R + 2\delta) \subset G$. Напишем представление Рисса для круга $C(z_0, R + 2\delta) = \{z : \ |z - z_0| < R + 2\delta\}$

$$v_\lambda(z) = \iint\limits_{B(z_0,R+2\delta)} \ln|z - \zeta| d\mu_\lambda(\zeta) + u_\lambda(z), \tag{1}$$

где $u_\lambda(z)$ — некоторая гармоническая функция в круге $C(z_0, R + 2\delta)$. Докажем, что семейство $u_\lambda(z), \ \lambda \in \Lambda$ ограничено в круге $B(z_0, R)$. Если это не так, то существует последовательность $u_n(z)$ функций этого семейства такая, что

$$\sup\{|u_n(z)| : \ z \in B(z_0, R)\} \geq n, \tag{2}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что соответствующие последовательности $v_n(z)$ и μ_n сходятся как обобщённые функции в области G. Пусть теперь φ произвольная основная функция такая, что $\operatorname{supp}\varphi \subset C(z_0, R+\delta)$. Тогда из равенства (1) следует, что последовательность (u_n, φ) сходится. Это означает, что последовательность $u_n(z)$ как последовательность обобщённых функций в $C(z_0, R + \delta)$ является сходящейся. По лемме Вейля предельная функция u является регулярной обобщённой функцией, которая представляется некоторой гармонической функцией $u(z)$. Из теоремы 4.4.2 [5] следует, что последовательность $u_n(z)$ сходится равномерно в круге $B(z_0, R)$ к $u(z)$. Это противоречит (2). Равномерная ограниченность семейства $u_\lambda(z)$ в круге $B(z_0, R)$ доказана. Теперь из (1) следует, что при $z \in B(z_0, R)$

$$v_\lambda(z) \leq \big(\ln 2(R + \delta)\big)\mu_\lambda\big(B(z_0, R + 2\delta)\big) + u_\lambda(z).$$

Отсюда следует конечность $S(B(z_0, R))$ и $S(K)$ для компакта $K \subset G$. Необходимость условия 1) доказана.

Условие 2) следует из такого утверждения: *Для любого круга $B(z_0, R)$ такого, что $B(z_0, R) \subset G$ выполняется неравенство $I(B(z_0, R)) > -\infty$.*

Докажем это утверждения. Если оно не верно, то существует круг $B(z_0, R)$ и последовательность $v_n(z)$ функций из семейства такая, что $v_n(z) \leq -n$ при $z \in B(z_0, R)$. Пусть φ положительная не равная тождественному нулю основная функция и такая, что $\operatorname{supp}\varphi \subset C(z_0, R)$. Тогда $(v_n, \varphi) \to -\infty$ $(n \to \infty)$. Это противоречит компактности семейства $v_\lambda(z)$. Необходимость доказана.

Достаточность. Доказательство достаточности мы разобьём на несколько этапов. На первом этапе мы докажем, что для любого круга $B(z_0, R)$ такого, что $B(z_0, R) \subset G$ выполняется неравенство $I(B(z_0, R)) > -\infty$. Если это не так, то существует круг $B(z_0, R) \subset G$ такой, что $I(B(z_0, R)) = -\infty$. Из этого, в свою очередь, следует, что существует последовательность $v_n(z)$ функций семейства такая, что $v_n(z) \leq -n$ для $z \in B(z_0, R)$. Пусть $B(z_1, R_1)$ такой круг, что $B(z_1, R_1) \subset G$ и граница круга $B(z_1, R_1)$ пересекает круг $B(z_0, R)$ по некоторой дуге. Пусть $R_2 > R_1$ и таково, что $B(z_1, R_2) \subset G$ и граница круга $B(z_1, R_2)$ пересекает круг $B(z, R)$ по дуге ℓ_1. Пусть ℓ_2 — дуга дополнительная к ℓ_1 на границе круга $B(z_1, R_2)$. Напишем для круга $C(z_1, R_2)$ представление Грина для функции $v_n(z)$

$$v_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B(z_0,R_2)} \frac{\partial G(z, \zeta)}{\partial n} v_n(\zeta) ds - \iint_{C(z_0,R_2)} G(z, \zeta) d\mu(\zeta).$$

Из этого, с учётом неравенств $G(z, \zeta) \geq 0, \ v_n(\zeta) \leq S(B(z_0, R_2)), \ v_n(\zeta) \leq -n$ при $\zeta \in \ell_1$, $\dfrac{\partial G(z, \zeta)}{\partial n} \geq \delta > 0$ при $\zeta \in \ell_1, \ z \in B(z_1, R_1)$, получаем при $z \in B(z_1, R_1)$ неравенство

$$v_n(z) \leq -\frac{\delta n}{2\pi} \int\limits_{\ell_1} ds + \frac{1}{2\pi} (S(B(z_0, R)))_+ \int\limits_{\ell_2} \frac{\partial G(z, \zeta)}{\partial n} ds \leq -\frac{\delta n}{2\pi} \int\limits_{\ell_1} ds + (S(B(z_0, R)))_+,$$

где $a_+ = \max(a, 0)$. Из этого неравенства следует, что $I(B(z_1, R_1)) = -\infty$. Из доказанного и из того, что любые два круга, лежащие в G можно соединить цепочкой кругов таких, что граница каждого последующего круга пересекает предыдущий по некоторой дуге следует, что $I(B(z_0, R)) = -\infty$ для любого круга $B(z_0, R) \subset G$. Это противоречит условию 2) теоремы. Первый этап завершён.

На втором этапе мы докажем, что для любого компакта $K \subset G$ величина $M(K) = \sup\{\mu_\lambda(K) : \lambda \in \Lambda\}$ удовлетворяет неравенству $M(K) < \infty$. Для этого достаточно доказать, что для любого круга $B(z_0, R) \subset G$ выполняется неравенство $M(B(z_0, R)) < \infty$. Если это не так, то существует круг $B(z_0, R) \subset G$ и последовательность функций $v_n(z)$ из семейства такие, что $\mu_n(B(z_0, R)) \geq n$, где μ_n — риссовская мера v_n. Пусть $R_1 > R$ и такое, что $B(z_0, R_1) \subset G$. Пишем представление Грина для функции $v_n(z)$ в круге $C(z_0, R_1)$:

$$v_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B(z_0,R_1)} \frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial n} v_n(\zeta) ds - \iint_{C(z_0,R_1)} G(z,\zeta) d\mu_n(\zeta).$$

Из этого представления и неравенств $v_n(\zeta) \leq S(B(z_0, R_1))$ при $\zeta \in \partial B(z_0, R_1)$, $G(z, \zeta) \geq \delta$ при $z, \zeta \in B(z_0, R)$, $\mu_n(B(z_0, R)) \geq n$ следует неравенство при $z \in B(z_0, R)$

$$v_n(z) \leq S(B(z_0, R_1)) - \delta n.$$

Из него, в свою очередь, следует, что $I(B(z_0, R)) = -\infty$. Это противоречит доказанному на первом этапе. Заметим, что из доказанного и теоремы 0.6 из [10] следует, что семейство мер $\mu_\lambda, \lambda \in \Lambda$ является компактным.

На третьем этапе мы докажем следующее. Пусть D — ограниченная область, $\overline{D} \subset G$ и пусть

$$v_\lambda(z) = \iint_D \ln|z - \zeta| d\mu_\lambda(\zeta) + u_\lambda(z)$$

суть представление Рисса функции $v_\lambda(z)$ в области D. Пусть K — компакт, $K \subset D$. Тогда семейство гармонических функций $u_\lambda(z)$ равномерно ограничено на K. Пусть D_1 и D_2 — такие области, что $K \subset D_1 \subset \overline{D}_1 \subset D_2 \subset \overline{D}_2 \subset D$. Покажем вначале, что семейство $u_\lambda(z)$ равномерно ограничено сверху на множестве $\overline{D}_1$. Пусть $2\delta = \rho(\overline{D}_1, CD_2)$, где C — символ дополнения, $CD_2 = \mathbb{C} \backslash D_2$. Тогда $\delta > 0$. Имеем при $z \in \overline{D}_1$

$$u_\lambda(z) = \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_\lambda\big(z + \delta e^{i\varphi}\big) d\varphi = \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_\lambda\big(z + \delta e^{i\varphi}\big) d\varphi - \tfrac{1}{2\pi} \iint_D \int_0^{2\pi} \ln\left|z - \zeta + \delta e^{i\varphi}\right| d\varphi d\mu_\lambda(\zeta) =$$

$$= \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_\lambda\big(z + \delta e^{i\varphi}\big) d\varphi - \iint_D \max\big(\ln|z - \zeta|, \ln\delta\big) d\mu_\lambda(\zeta).$$

Отсюда следует, что $u_\lambda(z) \leq S(\overline{D}) + M(\overline{D}) \ln_+ \delta^{-1}$. Равномерная ограниченность сверху семейства $u_\lambda(z)$ на $\overline{D}_1$ доказана.

Пусть $B(z_1, \delta) \subset D_1$. При $z \in D$ имеем $u_\lambda(z) = v_\lambda(z) - \iint_D \ln|z - \zeta| d\mu_\lambda(\zeta)$. Если d — диаметр D, то $u_\lambda(z) \geq v_\lambda(z) - \mu_\lambda(\overline{D}) \ln d \geq v_\lambda(z) - M(\overline{D}) \ln_+ d$. Отсюда следует, что

$$\inf\big\{\sup\big\{u_\lambda(z) : \ z \in B(z_1, \delta)\big\} : \lambda \in \Lambda\big\} \geq I(B(z_1, \delta)) - M(\overline{D}) \ln_+ d.$$

Из этого факта применением теоремы Гарнака к области D_1 и положительным гармоническим функциям

$$M - u_\lambda(z), \ M = \sup\{\sup\{u_\lambda(z) : z \in D_1\} : \lambda \in \Lambda\},$$

получаем равномерную ограниченность семейства $u_\lambda(z)$ на K. Третий этап завершён.

Теперь мы *завершаем доказательство теоремы.* Пусть $v_n(z)$ — произвольная последовательность функций семейства. Нам нужно доказать, что из этой последовательности можно выделить сходящуюся в смысле теории обобщённых функций подпоследовательность. Учитывая замечание в конце второго этапа, мы можем считать, что последовательность μ_n риссовских мер v_n является сходящейся ($\mu_n \to \mu$ $(n \to \infty)$). Пусть теперь G_m — такая последовательность ограниченных областей, что

$$G_0 \subset \overline{G}_0 \subset G_1 \subset \overline{G}_1 \subset \dots, \; G = \bigcup_{m=0}^{\infty} G_m,$$

и что все области G_m измеримы по Жордану относительно меры μ ($\mu(\partial G_m) = 0$). Пишем представление Рисса для функций $v_\lambda(z)$ в области G_m

$$v_\lambda(z) = \iint_{\overline{G}_m} \ln|z-\zeta| d\mu_\lambda(\zeta) + u_\lambda(m, z),$$

где $u_\lambda(m, z)$ — гармоническая функция в области G_m. По доказанному на третьем этапе последовательность функций $u_n(2, z)$ будет равномерно ограниченной, а, следовательно, и компактной в области G_1. Поэтому существует подпоследовательность $v_n^{(1)}(z)$ последовательности $v_n(z)$ такая, что последовательность $u_n^{(1)}(2, z)$ будет равномерно сходящейся при $z \in \overline{G}_0$. Отметим, что функции $v_n^{(1)}(z)$ и $u_n^{(1)}(2, z)$ связаны соотношением

$$v_n^{(1)}(z) = \iint\limits_{\overline{G}_2} \ln|z-\zeta| d\mu_n^1(\zeta) + u_n^{(1)}(2, z),$$

где μ_n^1 — риссовская мера функции $v_n^{(1)}$. Аналогично, существует подпоследовательность $v_n^{(2)}(z)$ последовательности $v_n^{(1)}(z)$ такая, что последовательность $u_n^{(2)}(3, z)$ будет равномерно сходящейся при $z \in \overline{G}_1$.

Таким образом по индукции строится счётное число последовательностей $v_n^{(k)}(z)$ со свойствами:
1) последовательность $v_n^{(k+1)}(z)$ есть подпоследовательность последовательности $v_n^{(k)}(z)$;
2) последовательность $u_n^{(k)}(k+1, z)$ будет равномерно сходящейся на множестве $\overline{G}_{k-1}$.
Пусть $v_n^{(\infty)}(z)$ — диагональная последовательность ($v_n^{(\infty)}(z) = v_n^{(n)}(z)$). Тогда, если

$$v_n^{\infty}(z) = \iint\limits_{G_{m+1}} \ln|z-\zeta| d\mu_n^{(\infty)}(\zeta) + u_n^{(\infty)}(m+1, z), \tag{3}$$

то последовательность $u_n^{(\infty)}(m+1, z)$ будет равномерно сходиться на множестве $\overline{G}_m$. Покажем, что последовательность $v_n^{(\infty)}$ сходится как последовательность обобщённых функций в области G. Пусть φ — произвольная основная функция в области G. Тогда существует m такое, что $\mathrm{supp}\varphi \subset \overline{G}_m$. Из равенства (3) следует, что

$$\left(v_n^{\infty}, \varphi\right) = \iint_{\overline{G}_{m+1}} b(\zeta) d\mu_n^{(\infty)}(\zeta) + \iint u_n^{(\infty)}(m+1, z)\varphi(z) dm_2(z),$$

где $b(\zeta) = \iint \ln|z-\zeta|\varphi(z) dm_2(z)$. Функция $b(\zeta)$ является непрерывной, множество $\overline{G}_{m+1}$ измеримо по Жордану относительно меры μ. По теореме $0.5'$ из [10]

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{\overline{G}_{m+1}} b(\zeta) d\mu_n^{(\infty)}(\zeta) = \iint_{\overline{G}_{m+1}} b(\zeta) d\mu(\zeta).$$

Поскольку последовательность $u_n^{(\infty)}(m+1, z)$ равномерно сходится на $\overline{G}_m$, скажем к функции $u(m+1, z)$, а $\mathrm{supp}\varphi \subset \overline{G}_m$, то

$$\lim_{n\to\infty} \iint u_n^{(\infty)}(m+1, z)\varphi(z) dm_2(z) = \iint_{\overline{G}_m} u(m+1, z)\varphi(z) dz.$$

Из этого следует сходимость последовательности $\left(v_n^{\infty}, \varphi\right)$. Теорема 1 доказана. □

В теории представлений субгармонических функций конечного порядка важную роль играют следующие функции

$$H_0(z) = H(z) = \ln|1-z|, \quad H_k(z) = \mathrm{Re}\,\Big(\ln(1-z) + z + \ldots + \frac{1}{k}z^k\Big),\ k \geq 1.$$

Для доказательства следующей теоремы нам будут нужны три леммы.

Лемма 1. *Пусть $\rho \geq 1$ — целое число, μ_n — последовательность положительных мер, удовлетворяющая условиям:*
1) последовательность μ_n как последовательность обобщённых функций сходится к μ,
2) существуют числа $b_1 > \rho - 1,\ b_2 < \rho + 1,\ M > 0$ такие, что выполняются неравенства

$$\mu_n(B(0,r)) < Mr^{b_1},\ r \in (0,1],\ \mu_n(B(0,r)) < Mr^{b_2},\ r > 1,$$

3) мера μ не нагружает окружность $|\zeta| = r$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\iint\limits_{B(0,r)} H_{\rho-1}\big(\frac{z}{\zeta}\big)d\mu_n(\zeta) + \iint\limits_{CB(0,r)} H_\rho\big(\frac{z}{\zeta}\big)d\mu_n(\zeta)\Big) = \iint\limits_{B(0,r)} H_{\rho-1}\big(\frac{z}{\zeta}\big)d\mu(\zeta) + \iint\limits_{CB(0,r)} H_\rho\big(\frac{z}{\zeta}\big)d\mu(\zeta),$$

где сходимость понимается, как сходимость обобщённых функций.

Доказательство. Пусть φ — произвольная ненулевая основная функция, $M_1 = \sup\{|z| : z \in \mathrm{supp}\varphi\}$. Выберем числа ε и N так, чтобы $0 < \varepsilon < M_1 < \frac{1}{2}N < \infty$ и чтобы мера μ не нагружала окружностей $|\zeta| = \varepsilon,\ |\zeta| = N$. Считаем также, что $\varepsilon < 1, N > 1$. Обозначим через μ_n^1 сужение меры μ на круг $B(0,\varepsilon)$, а через μ_n^2 — сужение меры μ на внешность круга $B(0,N)$. Обозначим также $K(a,b) = \{\zeta : a < |\zeta| \leq b\}$. Тогда

$$\iint \varphi(z)\Big(\iint\limits_{B(0,r)} H_{\rho-1}\big(\frac{z}{\zeta}\big)d\mu_n(\zeta) + \iint_{CB(0,r)} H_\rho\big(\frac{z}{\zeta}\big)d\mu_n(\zeta)\Big)dm_2(z) =$$

$$= \iint \varphi(z)\iint_{B(0,r)} H_{\rho-1}\big(\frac{z}{\zeta}\big)d\mu_n^1(\zeta)dm_2(z) + \iint \varphi(z)\iint_{CB(0,r)} H_\rho\big(\frac{z}{\zeta}\big)d\mu_n^2(\zeta)dm_2(z) +$$
$$+\frac{1}{\rho}\iint z^\rho\varphi(z)\iint_{K(r,N)}\frac{d\mu_n(\zeta)}{\zeta^\rho}dm_2(z) +$$
$$+\iint \varphi(z)\iint_{K(\varepsilon,N)} H_{\rho-1}\big(\frac{z}{\zeta}\big)d\mu_n(\zeta)dm_2(z) = J_n^1 + J_n^2 + J_n^3 + J_n^4.$$

Отметим, что в написанном равенстве $r = |z|$. Будем исследовать каждый из интегралов. Имеем

$$|J_n^1| \leq \iint|\varphi(z)|\iint_{B(0,\varepsilon)}\big|H_{\rho-1}\big(\frac{z}{\zeta}\big)\big|d\mu_n(\zeta)dm_2(z) \leq$$
$$\leq \iint_{B(0,\varepsilon)}\iint|\varphi(z)|\big|\ln|z-\zeta|\big|dm_2(z)d\mu_n(\zeta) + \iint|\varphi(z)|dm_2(z)\iint_{B(0,\varepsilon)}\ln\frac{1}{\tau}d\mu_n(\zeta) +$$
$$+\sum_{k=1}^{\rho-1}\frac{1}{k}\iint|z|^k|\varphi(z)|dm_2(z)\iint_{B(0,\varepsilon)}\frac{1}{\tau^k}d\mu_n(\zeta),$$

где $\tau = |\zeta|$. Если ввести полярные координаты с полюсом в точке ζ, то при $|\zeta| \leq \varepsilon < 1$ получим

$$\iint|\varphi(z)|\big|\ln|z-\zeta|\big|dm_2(z) \leq 2\pi\|\varphi\|\int_0^{M_1+1}R|\ln R|dR.$$

Здесь $\|\varphi\|$ — чебышевская норма φ. Кроме того

$$\iint|\varphi(z)|dm_2(z) \leq \pi\|\varphi\|M_1^2, \quad \iint|z|^k|\varphi(z)|dm_2(z) \leq \frac{2\pi}{k+2}\|\varphi\|M_1^{k+2}.$$

Если обозначить $\lambda_n(\tau) = \mu_n(B(0,\tau))$, то

$$\iint_{B(0,\varepsilon)}\ln\frac{1}{\tau}\ d\mu_n(\zeta) = \int_0^\varepsilon\ln\frac{1}{\tau}d\lambda_n(\tau) \leq M\big(\frac{1}{b_1} + \ln\frac{1}{\varepsilon}\big)\varepsilon^{b_1},$$

$$\iint_{B(0,\varepsilon)} \frac{1}{\tau^k}\, d\mu_n(\zeta) \le M\frac{b_1}{b_1-k}\varepsilon^{b_1-k},\ k\le\rho-1.$$

Из полученных оценок следует неравенство

$$|J_n^1| \le M_3\|\varphi\|\varepsilon^{b_1+1-\rho}, \tag{4}$$

где M_3 — величина, зависящая только от $M,\ M_1,\ b_1$. Отметим, что если в интеграле J_n^1 меру μ_n заменить на меру μ, то для полученного интеграла J_1 также будет справедливо неравенство $|J^1|\le M_2\|\varphi\|\varepsilon^{b_1+1-\rho}$.

При $|z|\le M_1,\ |\zeta|\ge N$ справедлива оценка $\left|H_\rho\Bigl(\dfrac{z}{\zeta}\Bigr)\right| \le \dfrac{2}{\rho+1}\,\dfrac{r^{\rho+1}}{\tau^{\rho+1}}$. Поэтому

$$|J_n^2| \le 2\iint |z|^{\rho+1}|\varphi(z)|dm_2(z)\iint\limits_{CB(0,N)}\frac{d\mu_n(\zeta)}{\tau^{\rho+1}} \le$$

$$\le \frac{4\pi}{\rho+3}\|\varphi\|M_1^{\rho+3}\int\limits_N^\infty\frac{d\lambda_n(\tau)}{\tau^{\rho+1}} \le \frac{4\pi}{\rho+3}\|\varphi\|M_1^{\rho+3}MN^{b_2-\rho-1} = M_4\|\varphi\|N^{b_2-\rho-1}.$$

Отметим, что если в интеграле J_n^2 меру μ_n заменить на меру μ, то для полученного интеграла J^2 будет справедливо неравенство $|J^2|\le M_5\|\varphi\|N^{b_2-\rho-1}$.

Поскольку мера μ не нагружает окружности $|\zeta|=\varepsilon,\ |\zeta|=r,\ |\zeta|=N$, из теоремы $0.5'$ ([10]) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} J_n^3 = \frac{1}{\rho}\iint z^\rho\varphi(z)\iint\limits_{K(r,N)}\frac{d\mu(\zeta)}{\zeta^\rho}dm_2(z),$$

$$\lim_{n\to\infty} J_n^4 = \iint \varphi(z)\iint\limits_{K(\varepsilon,N)} H_{\rho-1}\Bigl(\frac{z}{\zeta}\Bigr)d\mu(\zeta)dm_2(z).$$

Из всего доказанного следует утверждение леммы. Лемма 1 доказана. □

Лемма 2. *Пусть $\rho(r)$ — нулевой уточнённый порядок, $V(r)=r^{\rho(r)}$, причём $V(r)=V(\frac{1}{r})$. Тогда существует нулевой уточнённый порядок $\widetilde{\rho}(r)$ такой, что выполняется неравенство $V(rt)\le V(r)\widetilde{V}(t),\ r>0,\ t>0$, где $\widetilde{V}(t)=t^{\widetilde{\rho}(t)}$.*

Лемма 2 доказана в [2].

Лемма 3. *Пусть μ — мера уточнённого порядка $\rho(r)$, $\lim_{r\to\infty}\rho(r)=\rho>$, которая не нагружает круг $B(0,1)$. Пусть числа b_1 и b_2 таковы, что $0<b_1<\rho<b_2<\infty$. Если последовательность t_n сходится к $+\infty$, то существует число $M>0$, не зависящее от последовательности, такое, что выполняются неравенства*

$$\mu_{t_n}(B(0,r))\le Mr^{b_1},\ r\in(0,1],\ \mu_{t_n}(B(0,r))\le Mr^{b_2},\ r>1.$$

Доказательство. Имеем $V(r)=r^\rho V_0(r)$, где $V_0(r)=r^{\rho_0(r)},\ \rho_0(r)=\rho(r)-\rho$. Мы можем считать, что выполняется равенство $V_0(r)=V_0(\frac{1}{r})$. Если это не так, то переопределим $V(r)$ на интервале $(0,1)$ так, чтобы написанное равенство выполнялось. Существует число $M_1>0$ такое, что выполняется неравенство $\mu(B(0,r))\le M_1V(r),\ r\in(0,\infty)$. Тогда, применяя лемму 2, получим

$$\mu_{t_n}(B(0,r)) = \frac{\mu(B(0,rt_n))}{V(t_n)} \le M_1\frac{V(rt_n)}{V(t_n)} = M_1r^\rho\frac{V_0(rt_n)}{V_0(t_n)} \le M_1r^\rho\widetilde{V}_0(r).$$

Из этого неравенства и свойств уточнённого порядка следует утверждение леммы. □

Пусть $v(z)$ — субгармоническая функция уточнённого порядка $\rho(r), \rho = \lim \rho(r)$ $(r \to \infty)$ — целое строго положительное число, λ — риссовская мера v. Функция $v(z)$ допускает представление

$$v(z) = \iint\limits_{B(0,1)} \ln|z-\zeta| d\lambda(\zeta) + \iint H_\rho\Big(\frac{z}{\zeta}\Big) d\mu(\zeta) + \mathrm{Re} \sum_{k=0}^{\rho} c_k z^k, \tag{5}$$

где μ — ограничение меры λ на внешность круга $B(0,1)$, c_k — некоторые комплексные числа.

Пусть $\nu \in \mathrm{Fr}\ \mu = \mathrm{Fr}\ \lambda,\ r > 0$. Обозначим через $A(\nu, r)$ множество комплексных чисел вида

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_n^\rho}{V(t_n)} \Big(c_\rho + \frac{1}{\rho} \iint\limits_{B(0,rt_n)} \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta^\rho}\Big),$$

где t_n всевозможные последовательности такие, что $t_n \to \infty, \mu_{t_n} \to \nu$ $(n \to \infty)$.

Теорема 2. *Пусть $v(z)$ — субгармоническая функция уточнённого порядка $\rho(r), \rho = \lim_{r\to\infty} \rho(r)$ — целое строго положительное число, λ — риссовская мера v. Для того, чтобы субгармоническая функция $u(z)$ принадлежала множеству $\mathrm{Fr}\ v$, необходимо и достаточно, чтобы существовали мера $\nu \in \mathrm{Fr}\ \lambda$ и функция $a_\nu(r),\ r > 0$ со свойствами: 1) $a_\nu(r) \in A(\nu, r)$, если мера ν не нагружает окружность $|\zeta| = r$; 2) $a_\nu(r_2) - a_\nu(r_1) = \dfrac{1}{\rho} \iint_{B(0,r_2)\setminus B(0,r_1)} \dfrac{d\nu(\zeta)}{\zeta^\rho},\ r_2 > r_1,$ — такие, что для всех $z \in \mathbb{C}$ выполняется равенство*

$$u(z) = \iint_{B(0,r)} H_{\rho-1}\Big(\frac{z}{\zeta}\Big) d\nu(\zeta) + \iint_{CB(0,r)} H_\rho\Big(\frac{z}{\zeta}\Big) d\nu(\zeta) + \mathrm{Re}\ a_\nu(r) z^\rho.$$

Замечание. М. Л. Содин [9], теорема 2, описывал предельное множество $\mathrm{Fr}\ v$ в такой же ситуации. Сформулированная теорема это наша интерпретация теоремы Содина. Для нас формулировка теоремы Содина недостаточно чёткая, а доказательство слишком краткое. Поэтому мы помещаем свою версию доказательства. Заметим ещё, что если $u_1(z)$ и $u_2(z)$ две функции из $\mathrm{Fr}\ v$ с одной и той же риссовской мерой ν, то $u_2(z) - u_1(z) = \mathrm{Re}\ c_{12} z^\rho$ с некоторой комплексной константой c_{12}.

Доказательство. Имеем

$$v_t(z) = \iint\limits_{B(0,r)} H_{\rho-1}\Big(\frac{z}{\zeta}\Big) d\mu_t(\zeta) + \iint\limits_{CB(0,r)} H_\rho\Big(\frac{z}{\zeta}\Big) d\mu_t(\zeta) + \mathrm{Re} \frac{t^\rho}{V(t)} \Big(c_\rho + \frac{1}{\rho} \iint\limits_{B(0,rt)} \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta^\rho}\Big) z^\rho + o(1), \tag{6}$$

при $t \to \infty$. Здесь, по-прежнему, μ — ограничение λ на внешность круга $B(0,1)$.

Пусть $u \in \mathrm{Fr}\ v$. Тогда существует последовательность $t_n \to \infty$ такая, что $v_{t_n}(z) \to u(z),\ \mu_{t_n} \to \nu$. Предположим вначале, что мера ν не нагружает окружность $|\zeta| = r$. Если в равенстве (6) взять $t = t_n$, то, применяя леммы 1 и 3, получим, что для любой основной функции φ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re} \iint z^\rho \varphi(z) \Big(\frac{t_n^\rho}{V(t_n)} \Big(c_\rho + \frac{1}{\rho} \iint\limits_{B(0,rt_n)} \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta^\rho}\Big)\Big) dm_2(z).$$

Это эквивалентно существованию предела

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_n^\rho}{V(t_n)} \Big(c_\rho + \frac{1}{\rho} \iint\limits_{B(0,rt_n)} \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta^\rho}\Big) = a_\nu(r) \in A(\nu, r).$$

Для этого стоит заметить, что если $f_n(r)$ — выражение стоящее под знаком предела, а число r_0 таково, что мера ν не нагружает окружность $|\zeta| = r_0$, то разность $f_n(r) - f_n(r_0)$ имеет предел почти для всех r.
Из этого следует равенство

$$u(z) = \iint_{B(0,r)} H_{\rho-1}\Big(\frac{z}{\zeta}\Big) d\nu(\zeta) + \iint_{CB(0,r)} H_{\rho}\Big(\frac{z}{\zeta}\Big) d\nu(\zeta) + \mathrm{Re}\ a_\nu(r) z^\rho \tag{7}$$

пока что при условии, что мера ν не нагружает окружность $|\zeta| = r$.

Из определения $a_\nu(r)$ следует, что если мера ν не нагружает окружностей, $|\zeta| = r_2$ и $|\zeta| = r_1,\ r_1 < r_2$, то

$$a_\nu(r_2) - a_\nu(r_1) = \frac{1}{\rho} \iint\limits_{K(r_1,r_2)} \frac{d\nu(\zeta)}{\zeta^\rho}.$$

Если теперь взять r_0 таким, что мера ν не нагружает окружность $|\zeta| = r_0$ и взять $a_\nu(r_0)$ из $A(\nu, r_0)$, а для остальных r функцию $a_\nu(r)$ определить равенствами

$$a_\nu(r) = \begin{cases} a_\nu(r_0) + \frac{1}{\rho} \iint\limits_{K(r_0,r)} \frac{d\nu(\zeta)}{\zeta^\rho}, & r > r_0, \\ a_\nu(r_0) - \frac{1}{\rho} \iint\limits_{K(r,r_0)} \frac{d\nu(\zeta)}{\zeta^\rho}, & r < r_0, \end{cases} \tag{8}$$

то формула (7) будет выполняться для всех $z \in \mathbb{C}$.

Обратно, если взять $\nu \in \mathrm{Fr}\ \lambda$, выбрать r_0 так, чтобы мера ν не нагружала окружность $|\zeta| = r_0$, выбрать $a_\nu(r_0)$ из множества $A(\nu, r_0)$, построить $a_\nu(r)$ по формулам (8), а затем построить u по формуле (7), то получим функцию $u(z)$ из предельного множества Азарина функции $v(z)$. Теорема доказана.

В. С. Азарин ([3], пункт 3.4), предположил, что если ν принадлежит предельному множеству $\mathrm{Fr}\ \mu$ риссовской меры субгармонической функции целого порядка ρ, то

$$\iint\limits_{K(a,b)} \frac{d\nu(\zeta)}{\zeta^\rho} = 0. \tag{9}$$

Покажем, что это не так. Пусть γ — произвольная положительная мера в кольце $K(1, T)$ такая, что

$$\iint_{K(1,T)} \frac{d\gamma(\zeta)}{\zeta^\rho} = 0,\ \iint_{K\left(1, \frac{1}{2}(1+T)\right)} \frac{d\gamma(\zeta)}{\zeta^\rho} \neq 0.$$

Пусть ν — мера в плоскости, определяемая формулой

$$\nu(E) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T^{n\rho} \gamma\big(T^{-n} E \cap K(1, T)\big).$$

Определим функцию $a(r)$ соотношениями: $a(1) = 0$, $a(r_2) - a(r_1) = \dfrac{1}{\rho} \displaystyle\iint_{K(r_1,r_2)} \frac{d\nu(\zeta)}{\zeta^\rho}$,

а также функцию $v(z) = \displaystyle\iint_{B(0,r)} H_{\rho-1}\big(\frac{z}{\zeta}\big) d\nu(\zeta) + \iint_{CB(0,r)} H_\rho\big(\frac{z}{\zeta}\big) d\nu(\zeta) + \mathrm{Re}\ a(r) z^\rho$.

Эта функция является субгармонической во всей плоскости, удовлетворяет уравнению

$$v(Tz) = T^\rho v(z),$$

а её риссовская мера есть ν. Справедливо соотношение $\nu \in \mathrm{Fr}\ \nu$. Для меры ν соотношение (9) не выполняется.

Правильным вариантом предположения Азарина является следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $v(z)$ — субгармоническая функция целого порядка, μ — её риссовская мера, $\nu \in \mathrm{Fr}\ \mu$. Тогда функция*

$$\psi(a,b) = \iint\limits_{K(a,b)} \frac{d\nu(\zeta)}{\zeta^\rho},\ 0 < a < b < \infty,$$

является ограниченной.

Доказательство. Возьмём $r_0 > 0$ так, чтобы мера ν не нагружала окружность $|\zeta| = r_0$ и выберем $a_\nu(r_0) \in A(\nu, r_0)$. Затем равенствами (8) определим функцию $a_\nu(r)$, а функцию $u(z)$ определим равенством (7). Тогда $u(z) \in \mathrm{Fr}\ \ v$, ν — риссовская мера u,

$$u(z) = \iint\limits_{B(0,r)} H_{\rho-1}\Big(\frac{z}{\zeta}\Big)d\nu(\zeta) + \iint\limits_{CB(0,r)} H_\rho(z,\zeta)d\nu(\zeta) + \mathrm{Re}\ a_\nu(r)z^\rho = \widetilde{u}(z) + \mathrm{Re}\ a_\nu(r)z^\rho.$$

Пусть $\rho(r)$ — уточнённый порядок функции $v(z)$,

$$\Delta = \overline{\lim_{r\to\infty}}\ \frac{\mu(B(0,r))}{V(r)},\ V(r) = r^{\rho(r)}.$$

Пусть мера ν не нагружает окружность $|\zeta| = r$. Тогда по теореме 0.5′ ([10])

$$\nu(B(0,r)) = \lim_{n\to\infty} \mu_{t_n}(B(0,r)),\ \lim_{n\to\infty} \frac{\mu(B(0,rt_n))}{V(t_n)} \le \triangle r^\rho.$$

Очевидно, что неравенство $\nu(B(0,r)) \le \triangle r^\rho$ выполняется для всех $r > 0$.

Стандартные оценки потенциалов с ядрами $H_k\big(\frac{z}{\zeta}\big)$, например [1], глава 1, §13 дают $\widetilde{u}(re^{i\theta}) \le Mr^\rho$ с некоторым M.

Для функции $u(z)$ справедливо ([3]) неравенство $u(re^{i\theta}) \le h(\theta)r^\rho$, где $h(\theta)$ — индикатор функции v. Так как $u(0) = 0$, то из неравенства Йенсена следует, что

$$\int_0^{2\pi} \Big|u(re^{i\theta})\Big| d\theta \le 2\int_0^{2\pi} u^+(re^{i\theta})d\theta \le 2\int_0^{2\pi} h^+(\theta)d\theta r^\rho = 2\pi M_1 r^\rho.$$

Тогда $-\mathrm{Re}\ a_\nu(r)r^\rho \displaystyle\int_\alpha^\beta e^{i\rho\theta}d\theta = \int_\alpha^\beta \widetilde{u}(re^{i\theta})d\theta - \int_\alpha^\beta u(re^{i\theta})d\theta \le 2\pi(M + M_1)r^\rho$. Ввиду произвольности чисел α и β отсюда следует ограниченность $a_\nu(r)$. Теперь из равенства $\psi(a,b) = a_\nu(b) - a_\nu(a)$ следует утверждение теоремы 3. $\square$

Теорема 4. *Пусть $\rho_1(r)$ и $\rho_2(r)$ — уточнённые порядки, такие, что $\lim_{r\to\infty}\rho_1(r) = \lim_{r\to\infty}\rho_2(r) = \rho > 0$. Пусть $\mathrm{w}(z)$ — субгармоническая функция порядка $\rho_1(r)$. Тогда существует субгармоническая функция $v(z)$ порядка $\rho_2(r)$ такая, что соотношения $\mathrm{w}_{t_n} \to u,\ v_{t_n} \to u\ (t_n \to \infty, n \to \infty)$ эививалентны.*

Замечание.*Теорема 4 по формулировке является некоторым усилением теоремы 5 из диссертации В.Б. Гинера [11], в которой утверждается, что* $\mathrm{Fr\ v} = \mathrm{Fr\ w}$. *Предлагаемое ниже доказательство более короткое чем доказательство В.Б. Гинера.*

Доказательство теоремы 4. Пусть μ — риссовская мера $\mathrm{w}(z)$. Не ограничивая общности, можно считать, что мера μ не нагружает круг $B(0,1)$. Определим меру λ условием

$$d\lambda(\zeta) = \frac{V_2(\tau)}{V_1(\tau)}d\mu(\zeta),\ \tau = |\zeta|,\quad V_1(\tau) = \tau^{\rho_1(\tau)},\ V_2(\tau) = \tau^{\rho_2(\tau)}.$$

Рассмотрим вначале случай нецелого ρ. В этом случае, не ограничивая общности, можно считать, что $\mathrm{w}(z) = \displaystyle\iint H_p\Big(\frac{z}{\zeta}\Big)d\mu(\zeta),\ p = [\rho]$. Определяем функцию $v(z)$ равенством $v(z) = \displaystyle\iint H_p\Big(\frac{z}{\zeta}\Big)d\lambda(\zeta)$.

Докажем эквивалентность соотношений

$$\mu_{t_n} \to \nu,\ \lambda_{t_n} \to \nu\ (t_n \to +\infty, n \to \infty), \tag{10}$$

где меры μ_t и λ_t определяются равенствами $\mu_t(E) = \dfrac{\mu(tE)}{V_1(t)},\ \lambda_t(E) = \dfrac{\lambda(tE)}{V_2(t)}$.

Действительно, пусть $\varphi(z)$ — произвольная основная функция с носителем не содержащим нуля. Тогда (предполагается, что $\mu_{t_n} \to \nu$)

$$\lim_{n\to\infty} \iint \varphi(\zeta) d\lambda_{t_n}(\zeta) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{V_2(t_n)} \iint \varphi(\frac{\zeta}{t_n}) d\lambda(\zeta) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{V_2(t_n)} \iint \varphi(\frac{\zeta}{t_n}) \frac{V_2(\tau)}{V_2(\tau)} d\mu(\zeta) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \iint \varphi(\zeta) \frac{V_2(\tau t_n)}{V_1(\tau t_n)}\ \frac{V_1(t_n)}{V_2(t_n)} d\mu_{t_n}(\zeta). \tag{11}$$

Последовательность $\varphi_n(\zeta) = \varphi(\zeta)\dfrac{V_2(\tau t_n)}{V_1(\tau t_n)}\ \dfrac{V_1(t_n)}{V_2(t_n)}$ равномерно финитна и равномерно сходится к функции $\varphi(\zeta)$. Теперь, учитывая ограниченность последовательности $\mu_{t_n}(\mathrm{supp}\ \varphi)$, получаем из (11) $(\lambda_{t_n}, \varphi) \to (\mu, \varphi)$ $(n \to \infty)$. Дополнительное предположение, что $0 \overline{\in} \mathrm{supp}\ \varphi$ можно отбросить с помощью леммы 3 и оценки типа (4), т.е. эквивалетность соотношений (10) доказана.

Из сходимости последовательности w_{t_n} в силу непрерывности операции дифференцирования в пространстве обобщённых функций следует сходимость последовательности μ_{t_n}. Обратно, если последовательность μ_{t_n} сходится, то

$$\mathrm{w}_{t_n} = \iint H_p\Big(\frac{z}{\zeta}\Big) d\mu_{t_n}(\zeta), \quad (\mathrm{w}_{t_n}, \varphi) = \iint b(\zeta) d\mu_{t_n}(\zeta),$$

где $b(\zeta) = \displaystyle\iint H_p\Big(\frac{z}{\zeta}\Big)\varphi(z) dm_2(z)$. Функция $b(\zeta)$ непрерывна в $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ и удовлетворяет соотношениям

$$b(\zeta) = O\Big(\frac{1}{|\zeta|^p}\Big), \zeta \to 0, \quad b(\zeta) = O\Big(\frac{1}{|\zeta|^{p+1}}\Big), \zeta \to \infty.$$

Из этого и леммы 3 следует, что $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \iint b(\zeta) d\mu_{t_n}(\zeta) = \iint b(\zeta) d\nu(\zeta)$. Поэтому последовательность w_{t_n} сходится. Тем самым доказано, что сходимость последовательности w_{t_n} эквивалентна сходимости последовательности λ_{t_n}, причём если $\mathrm{w}_{t_n} \to u, \lambda_{t_n} \to \nu$, то выполняется равенство $u(z) = \displaystyle\iint H_p\Big(\frac{z}{\zeta}\Big) d\nu(\zeta)$.

Из сказанного следует, что для случая нецелого ρ теорема доказана.

Пусть ρ — целое. Не ограничивая общности можно считать, что

$$\mathrm{w}(z) = \iint H_\rho\Big(\frac{z}{\zeta}\Big) d\mu(\zeta) + \mathrm{Re}\ \ c_\rho z^\rho = \iint\limits_{B(0,r)} H_{\rho-1}\Big(\frac{z}{\zeta}\Big) d\mu(\zeta) +$$
$$+ \iint\limits_{CB(0,r)} H_\rho\Big(\frac{z}{\zeta}\Big) d\mu(\zeta) + \mathrm{Re}\ \ z^\rho\Big(c_\rho + \frac{1}{\rho} \iint\limits_{B(0,r)} \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta^\rho}\Big),$$

В качестве $v(z)$ возьмём функцию

$$v(z) = \iint\limits_{B(0,r)} H_{\rho-1}\big(\frac{z}{\zeta}\big)\big(\,d\lambda(\zeta) + d\gamma(\zeta)\big) +$$
$$+ \iint\limits_{CB(0,r)} H_\rho\big(\frac{z}{\zeta}\big)\big(\,d\lambda(\zeta) + d\gamma(\zeta)\big) + \mathrm{Re}\ \ \frac{z^\rho}{\rho} \iint\limits_{B(0,r)} \frac{d\lambda(\zeta) + d\gamma(\zeta)}{\zeta^\rho},$$

где мера λ прежняя, а мера γ подлежит определению.

Меру γ будем выбирать так, чтобы выполнялось условие

$$V_2(r)\Big(c_\rho+\frac{1}{\rho}\iint\limits_{B(0,r)}\frac{d\mu(\zeta)}{\zeta^\rho}\Big)=V_1(r)\Big(\frac{1}{\rho}\iint\limits_{B(0,r)}\frac{d\lambda(\zeta)}{\zeta^\rho}+\frac{1}{\rho}\iint\limits_{B(0,r)}\frac{d\gamma(\zeta)}{\zeta^\rho}\Big). \qquad (12)$$

Пусть $c_\rho=a_\rho+ib_\rho$. Обозначим $L(r)=\dfrac{V_1(r)}{V_2(r)}$, а для меры ω

$$\omega_c(r)=\iint\limits_{B(0,r)}\cos\rho\theta d\omega(\zeta),\quad \omega_s(r)=\iint\limits_{B(0,r)}\sin\rho\theta d\omega(\zeta).$$

Из (12) следует $\dfrac{1}{\rho}\displaystyle\int_0^r\frac{d\gamma_c(\tau)}{\tau^\rho}=\frac{1}{L(r)}\Big(a_\rho+\frac{1}{\rho}\int_0^r\frac{d\mu_c(\tau)}{\tau^\rho}\Big)-\frac{1}{\rho}\int_0^r\frac{d\mu_c(\tau)}{L(\tau)\tau^\rho}$. Поэтому

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\gamma_c(r)}{r^\rho}=-\frac{dL(r)}{L^2(r)}\Big(a_\rho+\frac{1}{\rho}\int\limits_0^r\frac{d\mu_c(\tau)}{\tau^\rho}\Big)+\frac{1}{\rho}\,\frac{1}{L(r)}\,\frac{d\mu_c(r)}{r^\rho}-\frac{1}{\rho}\,\frac{1}{L(r)}\,\frac{d\mu_c(r)}{r^\rho},$$

$$\frac{1}{\rho}d\gamma_c(r)=-\frac{L'(r)}{L(r)}V_2(r)\frac{r^\rho}{V_1(r)}\Big(a_\rho+\frac{1}{\rho}\int\limits_0^r\frac{d\mu_c(\tau)}{\tau^\rho}\Big)dr. \qquad (13)$$

Обозначим $A(r)=\dfrac{r^\rho}{V_1(r)}\Big(a_\rho+\dfrac{1}{\rho}\displaystyle\int\limits_0^r\frac{d\mu_c(\tau)}{\tau^\rho}\Big)$. Из того, что $\rho_1(r)$ является уточнённым порядком функции $\mathrm{w}(z)$ следует по теореме Линделёфа (для случая $\rho(r)\equiv\rho$ это теорема 15 из [1], глава 1, §12), что $A(r)$ является ограниченной функцией на полуоси $(0,\infty)$. Равенство (13) переписывается в виде

$$\frac{1}{\rho}d\gamma_c(r)=-\frac{L'(r)}{L(r)}A(r)V_2(r)dr. \qquad (14)$$

Учитывая, что $\frac{L'(r)}{L(r)}=\frac{\varepsilon(r)}{r}$, $\varepsilon(r)\to0$ $(r\to\infty)$, получаем, что $\gamma_c(r)=o(1)V_2(r)$ $(r\to\infty)$.

Аналогично, выделяя мнимую часть в равенстве (12), после несложных преобразований получаем $\dfrac{1}{\rho}\displaystyle\int\limits_0^r\frac{d\gamma_s(\tau)}{\tau^\rho}=\frac{1}{L(r)}\Big(-b_\rho+\frac{1}{\rho}\int\limits_0^r\frac{d\mu_s(\tau)}{\tau^\rho}\Big)-\frac{1}{\rho}\int\limits_0^r\frac{d\mu_s(\tau)}{L(\tau)\tau^\rho}$,

$$\frac{1}{\rho}d\gamma_s(r)=-\frac{L'(r)}{L(r)}V_2(r)\frac{r^\rho}{V_1(r)}\Big(-b_\rho+\frac{1}{\rho}\int\limits_0^r\frac{d\mu_s(\tau)}{\tau^\rho}\Big)dr.$$

Если обозначить $B(r)=\dfrac{r^\rho}{V_1(r)}\Big(-b_\rho+\dfrac{1}{\rho}\displaystyle\int\limits_0^r\frac{d\mu_s(\tau)}{\tau^\rho}\Big)$, то

$$\frac{1}{\rho}d\gamma_s(r)=-\frac{L'(r)}{L(r)}B(r)V_2(r)dr, \qquad (15)$$

$$\gamma_s(r)=o(1)V_2(r)\ (r\to\infty).$$

Вводим новые обозначения $\alpha(r)=-\dfrac{L'(r)}{L(r)}A(r)V_2(r)$, $\beta(r)=-\dfrac{L'(r)}{L(r)}B(r)V_2(r)$.

Определяем теперь меру γ в плоскости следующим образом. Мера γ сосредоточена на четырёх лучах $\ell_1=\{z:\arg z=0\}$, $\ell_2=\{z:\arg z=\frac{\pi}{\rho}\}$, $\ell_3=\{z:\arg z=\frac{\pi}{2\rho}\}$,

$\ell_4 = \{z : \arg z = \frac{3\pi}{2\rho}\}$, причём на луче ℓ_1 мера имеет плотность $\alpha_+(t)$ на луче $\ell_2 - \alpha_-(t)$, на луче $\ell_3 - \beta_+(t)$, на луче $\ell_4 - \beta_-(t)$ (считается, что на луче ℓ_k введена параметризация $z_k = te^{i\theta_k}$, $t \in (0, +\infty)$). Для так определённой меры γ величины $\gamma_c(r)$ и $\gamma_s(r)$ будут такие, как они даются формулами (14) и (15). Значит для меры γ будет выполняться равенство (12). Кроме того выполняется соотношение $\gamma(B(0,r)) = o(1)V_2(r)$, $r \to \infty$.

Из этого следует, что последовательности w_{t_n} и v_{t_n} , $t_n \to +\infty, n \to +\infty$ сходятся одновременно. В случае сходимости они имеют одинаковые пределы. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. – Москва, ГИТТЛ, 1956.
2. Гришин А.Ф., Малютина Т.И. *Об уточнённом порядке*// Комплексный анализ, математическая физика. – Красноярск, 1998. – С. 10–24.
3. Азарин В.С. *Об асимптотическом поведении функций конечного порядка*// Матем. сб. – 1979. – Т. 108, №2. – С. 147–167.
4. Азарин В.С. *О регулярности роста функционалов на целых функциях*// Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – Харьков, 1972. – Вып.16. – С.109–139.
5. Azarin V.S. *Limit sets of entire and subharmonic functions*// In: Goldberg A.A., Levin B.Ya., Ostrovskii I.V. Entire and meromorphic functions. – Berlin, Springer, 1997. – P.48–66.
6. Азарин В.С. Теория роста субгармонических функций: Текст лекций. – Харьков, ХГУ, 1978.
7. Hörmander L. *Supports and singular supports of convolutions*// Acta Math. – 1963. – V.110, №3-4. – P.279–302.
8. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т.1. – Москва, Мир, 1986.
9. Содин М.Л. *Замечание о предельных множествах субгармонических функций целого порядка*// Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – Харьков, 1983. – Вып.39. – С.125–129.
10. Ландкоф Н.С. Основы современной теории потенциала. – Москва, Наука, 1966.
11. Гинер В.Б. Предельные множества целых и субгармонических функций. – Диссертация ... канд. физ.-мат. н. – Харьков, 1988.

Харьковский национальный университет им. Н.В. Каразина
кафедра математического анализа

Поступило 7.11.2007