УДК 512.54

Ю. Ю. Лещенко

БУДОВА ОДНОГО НЕСКІНЧЕННО ІТЕРОВАНОГО ВІНЦЕВОГО СТЕПЕНЯ РЕГУЛЯРНОЇ ЦИКЛІЧНОЇ ГРУПИ ПРОСТОГО ПОРЯДКУ p

Yu. Yu. Leschenko. *The structure of one infinite wreath power construction of the regular group of the prime order* p, Matematychni Studii, **28** (2007) 141–146.

The structure of an infinite wreath power construction of the regular group of the prime order p is considered. It is shown that such infinite wreath power construction is verbally complete.

Ю. Ю. Лещенко. *Строение одного бесконечного сплетения регулярной циклической группы простого порядка* p // Математичні Студії. – 2007. – Т.28, №2. – С.141–146.

Рассмотрено строение одного бесконечного сплетения регулярной циклической группы простого порядка p на себя и доказано, что это бесконечное сплетение является вербально полным.

Вступ. Поняття вінцевого добутку з 50-х років минулого століття широко використовувалось в різних розділах теорії груп і є потужним інструментом дослідження властивостей окремих груп, цілих класів груп і побудови контрприкладів. Класичним прикладом появи вінцевого добутку є конструкція силовських p–підгруп симетричних груп, запропонована Л. А. Калужніним. У статтях [11], [12] досліджено внутрішню будову (сформульовано критерій характеристичності підгруп, описано верхній та нижній центральні ряди, ряд комутантів та ін.) силовської p–підгрупи симетричної групи степеня p^n ($p \neq 2$), яка представляє собою n–ітерований вінцевий степінь регулярної циклічної групи простого порядку p. Пізніше В. І. Сущанський охарактеризував вербальну будову даної силовської p–підгрупи ([8]) і поширив опис характеристичних підгруп на вінцеві степені елементарних абелевих p–груп. Конструкція скінченно та нескінченно ітерованого вінцевого степеня циклічної групи порядку 2 досліджувалась в [1] та при вивченні силовських 2-підгруп і будови групи автоморфізмів регулярного кореневого 2–дерева — в [6], [7]. Схожу конструкцію визначено також в [2] при дослідженні силовських p–підгруп фінітарної симетричної групи.

Ми розглядаємо ще одне узагальнення поняття вінцевого добутку на нескінченну кількість співмножників, яке виникає при дослідженні силовських p–підгруп однорідної симетричної групи суперстепеня p^∞ ([5]). У статтях [3], [4], використовуючи табличне зображення елементів, описано характеристичні підгрупи цієї силовської p–підгрупи. В даній статті встановлено, що досліджувана група, на відміну від свого скінченного аналогу та груп автоморфізмів кореневих дерев (які також описуються в термінах інших

2000 *Mathematics Subject Classification:* 20E18, 20E22, 20B35, 20D20.

узагальнень вінцевого добутку), не містить власних вербальних підгруп та є вербально повною.

1. Вінцеві добутки груп підстановок. Вінцевий добуток може бути означений різними способами. В даній публікації будемо дотримуватися наступного підходу. Нехай (G_1, X_1) та (G_2, X_2) — групи підстановок. Позначимо через $F(X_2)$ групу всіх функцій з множини X_2 в групу G_1 з дією поточкового множення $(f_1 \cdot f_2)(a) = f_1(a) \cdot f_2(a),\ f_1, f_2 \in F(X_2), a \in X_2$.

Вінцевим добутком груп підстановок (G_1, X_1) та (G_2, X_2) називається група $W = (G_1, X_1) \wr (G_2, X_2)$ впорядкованих пар вигляду $[g_1(x_2), g_2]$, $g_2 \in G_2$, $g_1(x_2) \in F(X_2)$, з операцією множення, що задається рівністю $[g_1(x_2), g_2] \cdot [h_1(x_2), h_2] = [g_1(x_2)h_1(x_2^{g_2}), g_2h_2,]$, де $x_2^{g_2}$ — образ елемента $x_2 \in X_2$ при дії підстановки $g_2 \in G_2$. Група W діє на множині $X_1 \times X_2$ за правилом $(t_1, t_2)^{[g_1(x_2), g_2]} = (t_1^{g_1(t_2)}, t_2^{g_2})$, де $(t_1, t_2) \in X_1 \times X_2$, а $[g_1(x_2), g_2] \in W$.

Всі елементи вигляду $[1, g_2]$, $g_2 \in G_2$ (в даному контексті 1 означає функцію, що при всіх $x_2 \in X_2$ дорівнює одиниці групи G_1), утворюють в W групу $\widehat{G}_2$, яка ізоморфна з групою G_2, а всі елементи вигляду $[g_1(x_2), 1]$, $g_1(x_2) \in F(X_2)$, утворюють в W підгрупу $\widehat{G}_1$, яка ізоморфна з групою $F(X_2)$.

Підгрупа $\mathsf{Diag}(G_1 \wr G_2)$ групи $\widehat{G}_1$, елементами якої є функції типу $g_1(x_2) \equiv \mathsf{const}$, що приймають однакові значення на всій множині X_2, називається *діагоналлю* вінцевого добутку. Очевидно, що $\mathsf{Diag}(G_1 \wr G_2) \simeq G_1$.

Якщо G_1 і G_2 є абстрактними групами (не представлені явно у вигляді груп підстановок), то під виразом

$$G_1 \,\mathsf{wr}\, G_2 \tag{1}$$

будемо розуміти вінцевий добуток регулярних зображень груп G_1 і G_2. Називатимемо (1) *стандартним вінцевим добутком* груп G_1 і G_2.

Слід зазначити, що вінцевий добуток груп підстановок легко узагальнюється на довільну скінченну кількість співмножників (див., напр. [9]).

2. Нескінченно ітеровані зрізані зліва вінцеві добутки груп підстановок. Розглянемо нескінченну послідовність груп підстановок $\{(G_i, X_i)\}_{i=1}^{\infty}$. Нехай W_l^{∞} — сукупність майже одиничних послідовностей (які ми називатимемо таблицями) вигляду

$$u = [g_1(x_2, \ldots, x_k), \ldots, g_n(x_{n+1}, \ldots, x_k), 1, 1, \ldots], \quad n, k \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

де $g_i(x_{i+1}, \ldots, x_k)$ — функція, що визначена на $X_{i+1} \times \ldots \times X_k$ зі значеннями в групі G_i, а символом 1 позначається як одиничний елемент в групах, так функція, яка тотожно дорівнює одиниці. Позначимо символом $X_{[i,j]} = (x_i, \ldots, x_j)$ впорядкований набір змінних з декартового добутку $X_i \times \ldots \times X_j$, $[u]_i = g_i(x_{i+1}, \ldots, x_k)$ — i–ту координату таблиці u і покладемо $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$.

Визначимо дію таблиці u вигляду (2) з W_l^{∞} на елементи множини X за правилом $t^u = (t_1, \ldots, t_i, \ldots)^u = (t_1^{g_1(t_2, \ldots, t_k)}, \ldots, t_i^{g_i(t_{i+1}, \ldots, t_k)}, \ldots)$, для довільного $t \in X$ (дія u на $X_{[i,j]}$ визначається аналогічно). Для двох довільних елементів $u, v \in W_l^{\infty}$ існують числа n і k такі, що починаючи з номера $n+1$, всі координати обидвох таблиць дорівнюють 1 і можна вважати, що $u = [g_1(X_{[2,k]}), \ldots, g_n(X_{[n+1,k]}), 1, \ldots]$, $v = [h_1(X_{[2,k]}), \ldots, h_n(X_{[n+1,k]}), 1, \ldots]$.

На множині W_l^{∞} введемо операцію " $\cdot$ " (*множення таблиць*) за наступним правилом: добутком таблиці u на таблицю v є таблиця uv, i–та координата якої має вигляд $[uv]_i = g_i(X_{[i+1,k]}) \cdot h_i(X_{[i+1,k]}^u), \quad i \in \{1, 2, \ldots\}$.

Твердження 1. *Множина W_l^∞ з операцією множення таблиць утворює групу.*

Доведення даного твердження здійснюється безпосередньою перевіркою і ми його опускаємо. Зазначимо тільки, що одиничним елементом W_l^∞ є таблиця $[1, 1, \ldots, 1, \ldots]$, а оберненим до елементу u вигляду (2) є таблиця u^{-1} з координатами $[u^{-1}]_i = g_i^{-1}(X_{[i+1,k]}^{u^{-1}})$, $i = n, n-1, \ldots, 1$; а для $i > n$ маємо $[u^{-1}]_i = 0$.

Групу W_l^∞ називатимемо *зрізаним зліва вінцевим добутком* за послідовністю груп підстановок $\{(G_i, X_i)\}_{i=1}^\infty$ і позначатимемо $W_l^\infty = \wr_{(l)}{}_{i=1}^\infty G_i$.

Визначимо на X відношення еквівалентності Ξ_n за наступним правилом: якщо $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots)$, $y = (y_1, \ldots, y_i, \ldots)$, то $x \equiv y (\mathrm{mod}\ \Xi_n) \Leftrightarrow x_i = y_i$, для всіх $i > n$.

Твердження 2. *1. Група W_l^∞ транзитивна тоді і лише тоді, коли кожна з груп G_i, $i \in \mathbb{N}$, є транзитивною.*
2. Класи еквівалентності Ξ_n множини X є областями імпримітивності групи W_l^∞. В кожній області елементи групи W_l^∞ індукують підстановки, що належать n–ітерованому вінцевому добутку $\wr_{i=1}^n G_i$.
3. При фіксованому значенні n (k може бути довільним) всі таблиці вигляду (2) утворюють в W_l^∞ нормальну підгрупу.

Доведення. 1. Припустимо, що для всіх $i \in \mathbb{N}$ група G_i транзитивна. Нехай $a = (a_1, \ldots, a_n, \ldots)$, $b = (b_1, \ldots, b_n, \ldots)$ — довільні елементи з X. З транзитивності груп G_i випливає, що для кожного $i \in \mathbb{N}$ існує елемент $g_i \in G_i$ такий, що ${a_i}^{g_i} = b_i$. Тоді таблиця $[g_1, \ldots, g_n, \ldots]$ з W_l^∞ переводить послідовність a в послідовність b. Отже, група W_l^∞ транзитивна на X.

Навпаки, нехай W_l^∞ транзитивна на X. Припустимо, що існує номер $j \in \mathbb{N}$ такий, що група G_j не є транзитивною, тобто існують символи $c, d \in X_j$ такі, що $c^g \neq d$ для будь–якого $g \in G_j$. Нехай $a = (a_1, \ldots, a_{j-1}, c, a_{j+1}, \ldots)$, $b = (b_1, \ldots, b_{j-1}, d, b_{j+1}, \ldots)$ — деякі елементи з X. Тоді для довільної таблиці $u = [\ldots, g_j(X_{[j+1,k]}), \ldots]$ з W_l для j–тої координати образу a^u маємо $c^{g_j(a_{j+1},\ldots,a_k)} \neq d$ для всіх можливих функцій $g_j(X_{[j+1,k]})$, $k \in \mathbb{N}$, тобто послідовності a і b належать до різних орбіт групи W_l^∞ на множині X. Отже, група W_l^∞ інтранзитивна на X.

2. Нехай $a = (a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots)$, — представник класу θ відношення Ξ_n, — під дією підстановки $u = [g_1(X_{[2,k]}), \ldots, g_n(X_{[n+1,k]}), g_{n+1}(X_{[n+2,k]}), \ldots] \in W_l^\infty$ переходить в $b = (b_1, \ldots, b_n, b_{n+1} \ldots)$ з класу ϑ. Розглянемо деякий елемент $c = (c_1, \ldots, c_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots)$ з θ. Тоді для i–тої ($i > n$) координати образу c^u правильна рівність $a_i^{g_i(a_{i+1},\ldots,a_k)} = b_i$, тобто $c^u \in \vartheta$. Оскільки елемент c вибирали довільно, то $\theta^u = \vartheta$ і класи еквівалентності відношення Ξ_n справді є областями імпримітивності.

Крім того, згадана вище підстановка u на області θ з представником a індукує підстановку $u' = [g_1(x_1, \ldots, x_n, a_{n+1}, \ldots, a_k), \ldots, g_n(a_{n+1}, \ldots, a_k)]$ на множині $X_1 \times \ldots \times X_n$. Всеможливі такі таблиці утворюють групу, що ізоморфна до n–ітерованого вінцевого добутку $\wr_{i=1}^n G_i$.

3. Позначимо через $W_l^{(n)}$ множину всіх таблиць вигляду (2) при фіксованому значенні n і нехай $u = [g_1(X_{[2,k]}), \ldots, g_n(X_{[n+1,k]}), 1, \ldots]$ деяка таблиця з $W_l^{(n)}$. Якщо $v = [h_1(X_{[2,k]}), \ldots, h_m(X_{[m+1,k]}), 1, \ldots]$ належить до W_l^∞, то для i–тої ($i > n$) координати таблиці vu правильні рівності $[vu]_i = h_i(X_{[i+1,k]}) \cdot 1 = h_i(X_{[i+1,k]})$, $\quad i = n+1, n+2, \ldots$, а, для i–тої координати таблиці vuv^{-1} правильні такі рівності $[vuv^{-1}]_i = h_i(X_{[i+1,k]}) \cdot h_i^{-1}(X_{[i+1,k]}^{vv^{-1}}) = h_i(X_{[i+1,k]}) \cdot h_i^{-1}(X_{[i+1,k]}) = 1$. Звідки випливає, що $vuv^{-1} \in W_l^{(n)}$. Отже, $W_l^{(n)}$ — нормальна підгрупа групи W_l^∞. □

3. Зрізаний зліва нескінченно ітерований вінцевий добуток циклічних груп простого порядку. Розглядатимемо циклічну групу C_p порядку p як адитивну групу поля лишків Z_p за модулем p, яка діє на елементи поля зсувами $x \to x+a$, $x \in Z_p$. За означенням група $U_p^\infty = \wr_{(l)}{}_{i=1}^{\infty} C_p$ є групою всеможливих таблиць вигляду $[g_1(x_2,\dots,x_k),\dots,g_n(x_{n+1},\dots,x_k),0,\dots]$, $\quad n,k \in \mathbb{N}$, що діють на множині $X = \prod_{i=1}^{\infty} Z_p$, де $g_i(x_{i+1},\dots,x_k)$ — функція з $\underbrace{Z_p \times \ldots \times Z_p}_{k-i}$ в C_p. В свою чергу функції $g_i(x_{i+1},\dots,x_k)$ відповідає єдиний редукований за модулем ідеалу $\langle x_{i+1}^p - x_{i+1},\dots,x_k^p - x_k\rangle$ многочлен $a_i(x_{i+1},\dots,x_k)$ над полем Z_p. Многочлен повністю визначає функцію $g_i(x_{i+1},\dots,x_k)$.

Таким чином, U_p^∞ є групою всеможливих наборів

$$[a_1(x_2,\dots,x_k),\dots,a_n(x_{n+1},\dots,x_k),0,\dots], \quad n,k \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

де $a_i(x_{i+1},\dots,x_k)$ — многочлен над Z_p, редукований за модулем ідеалу $\langle x_{i+1}^p - x_{i+1},\dots,x_k^p - x_k\rangle$. При цьому, для довільного $t \in X$ та $u \in U_p^\infty$ вигляду (3) дія u на t визначається так $t^u = (t_1,\dots,t_i,\dots)^u = (t_1+a_1(t_2,\dots,t_k),\dots,t_i+a_i(t_{i+1},\dots,t_k),\dots)$.

Для двох довільних таблиць $u, v \in U_p^\infty$ існують числа n і k з $\mathbb{N}$ такі, що починаючи з номера $n+1$, всі координати обидвох таблиць дорівнюють 0 і ці таблиці можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} u &= [a_1(X_{[2,k]}),a_2(X_{[3,k]}),\dots,a_n(X_{[n+1,k]}),0,0,\dots],\\ v &= [b_1(X_{[2,k]}),b_2(X_{[3,k]}),\dots,b_n(X_{[n+1,k]}),0,0,\dots] \end{aligned} \tag{4}$$

Координати добутку таблиць u і v визначаються рівностями $[uv]_i = a_i(X_{[i+1,k]}) + b_i(X_{[i+1,k]}^u)$, $\quad i \in \{1,2,\dots\}$. Для таблиць вигляду (4) маємо, що $[uv]_i = 0$ для всіх $i > n$. Отже, досить обмежитись лише дослідженням координат $[uv]_n,\dots,[uv]_1$ в наведеному порядку.

4. Група U_p^∞ як гранична група прямого спектру p–груп. Нагадаємо, що послідовність груп $\{G_n\}_{n=1}^\infty$ з відповідною послідовністю занурень $\{\varphi_n : G_n \to G_{n+1}\}_{n=1}^\infty$ називається *прямим спектром* і позначається $\langle G_n,\varphi_n\rangle_{n=1}^\infty$.

Позначимо символом P_n групу всеможливих таблиць вигляду

$$[a_1,a_2(x_1),a_3(x_1,x_2),\dots,a_n(x_1,x_2,\dots,x_{n-1})], \tag{5}$$

де $a_1 \in Z_p$, а $a_i(x_1,\dots,x_{i-1})$ — многочлен над полем Z_p, редукований за модулем ідеалу $\langle x_1^p - x_1,\dots,x_{i-1}^p - x_{i-1}\rangle$. Таблиці вигляду (5) позначатимемо як $u = [a_i(X_{i-1})]_{i=1}^n$, де X_{i-1} — скорочене позначення набору змінних $x_1,\dots,x_{i-1}$.

Таблиці з P_n множаться за правилом, що аналогічне до правила множення нескінченних таблиць з групи U_p^∞. А саме, якщо $u = [a_i(X_{i-1})]_{i=1}^n, v = [b_i(X_{i-1})]_{i=1}^n$ — деякі таблиці з P_n, то i–та координата добутку uv має вигляд $[uv]_i = a_i(X_{i-1}) + b_i(X_{i-1}^u)$.

Крім того, група P_n ізоморфна до силовської p–підгрупи симетричної групи степеня p^n (див., наприклад, [11]).

Визначимо відображення $\delta_n^{(0)}$ групи P_n в групу P_{n+1} ($n \in \{1,2,\dots\}$) так. Для довільної підстановки $u \in P_n$, що задається таблицею многочленів (5) покладемо

$$\delta_n^{(0)}(u) = [0,a_1,a_2(x_2),a_3(x_2,x_3),\dots,a_n(x_2,x_3,\dots,x_n)] \in P_{n+1}, \tag{6}$$

Безпосередньою перевіркою можна показати, що відображення $\delta_n^{(0)}$ ($n = 1,2,\dots$) є зануреннями P_n в P_{n+1} (див. також [5]).

Теорема 1 ([5]). *Група U_p^∞ ізоморфна до граничної групи прямого спектру $\langle P_n, \delta_n^{(0)}\rangle_{n=1}^\infty$.*

5. Вербальна повнота групи U_p^∞. Нехай θ_1 — занурення групи A_1 в групу B_1, а θ_2 — занурення A_2 в B_2. Тоді θ_1 і θ_2 називатимемо *зануреннями однакового типу*, якщо існують ізоморфізми $\alpha : A_1 \to A_2$ і $\beta : B_1 \to B_2$ такі, що $\theta_1\beta = \alpha\theta_2$.

Для довільних скінченних груп G_1 і G_2 позначимо через $d(G_1, G_2)$ клас всіх занурень типу $G_1 \to \mathsf{Diag}(G_1, G_2)$, при якому образом елемента $g_1 \in G_1$ є функція з діагоналі $\mathsf{Diag}(G_1, G_2)$ стандартного вінцевого добутку $G_1 \,\mathsf{wr}\, G_2$, що приймає значення g_1 на всій області визначення.

Група G називається *вербально повною*, якщо для довільного $g \in G$ та довільного нетривіального слова $w(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ існують елементи $g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$ такі, що $w(g_1, g_2, \ldots, g_n) = g$.

Теорема 2 є безпосереднім наслідком теореми 3 з [10], а основним результатом даного розділу є така теорема.

Теорема 2. *Нехай група G є граничною групою прямого спектру $\langle G_n, \varphi_n\rangle_{n=1}^\infty$ скінчених p–груп. Якщо занурення $\varphi_n : G_n \to G_{n+1}$ є зануренням типу $d(G_n, C_p)$, де C_p — циклічна група порядку p, для нескінченної кількості значень індексу n, то група G є вербально повною.*

Теорема 3. *Група U_p^∞ є вербально повною.*

Доведення. Представлятимемо елементи групи $P_n \,\mathsf{wr}\, C_p$ у вигляді таблиць $[f(x), c]$, де $f(x)$ — функція з Z_p в P_n, $c \in C_p$. Розглянемо діаграму

$$\begin{array}{ccc} P_n & \xrightarrow{\delta_n^{(0)}} & P_{n+1} \\ \downarrow \varepsilon & & \downarrow \beta \\ P_n & \xrightarrow{\delta} & P_n \,\mathsf{wr}\, C_p \end{array} \tag{7}$$

де відображення $\varepsilon, \delta_n^{(0)}, \delta, \beta$ визначаються так:

1) Якщо $u \in P_n$, то $\varepsilon(u) = u \in P_n$, тобто ε — тотожний автоморфізм групи P_n.

2) Якщо $u \in P_n$, то $\delta_n^{(0)}(u) \in P_{n+1}$ визначається за правилом (6).

3) Якщо $u \in P_n$, то $\delta(u) = [c_u(x), 0] \in P_n \,\mathsf{wr}\, C_p$, де $c_u(x)$ — функція з Z_p в P_n, що приймає значення u для всіх значень аргументу. Тобто δ є зануренням типу $d(P_n, C_p)$.

4) Якщо $u = [a_1, a_2(x_1), a_3(x_1, x_2), \ldots, a_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)] \in P_{n+1}$, то $\beta(u) = [f_u(x), a_1] \in P_n \,\mathsf{wr}\, C_p$, де $f_u(x) = [a_2(x), a_3(x, x_1), a_4(x, x_1, x_2), \ldots, a_{n+1}(x, x_1, x_2 \ldots, x_{n-1})]$, причому $f_u(c) \in P_n$ для кожного конкретного значення $c \in Z_p$.

Доведемо, що відображення β є ізоморфізмом P_{n+1} на $P_n \,\mathsf{wr}\, C_p$. Розглянемо дві довільні таблиці $u = [a_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})]_{i=1}^{n+1}, v = [b_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})]_{i=1}^{n+1}$ з P_{n+1}. Тоді $\beta(u) = [f_u(x), a_1]$, $\beta(v) = [f_v(x), b_1]$, де $[f_u(x)]_i = a_{i+1}(x, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})$, $\quad i = 1, \ldots, n$, $[f_v(x)]_i = b_{i+1}(x, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})$, $\quad i = 1, \ldots, n$. Оскільки $(i + 1)$–а координата добутку uv має вигляд $a_{i+1}(x_1, x_2, \ldots, x_i) + b_{i+1}(x_1 + a_1, x_2 + a_2(x_1), \ldots, x_i + a_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}))$, то $\beta(uv) = [f_{uv}(x), a_1 + b_1]$, де i–та координата $f_{uv}(x)$ має вигляд $a_{i+1}(x, x_1, \ldots, x_{i-1}) + b_{i+1}(x + a_1, x_1 + a_2(x), \ldots, x_{i-1} + a_i(x, x_1, \ldots, x_{i-2}))$.

З іншого боку, $\beta(u)\beta(v) = [f_u(x), a_1] \cdot [f_v(x), b_1] = [f_u(x)f_v(x + a_1), a_1 + b_1]$, причому $f_u(x)$ та $f_v(x + a_1)$ при кожному конкретному значенні параметра x є таблицями з P_n. Тому i–та координата добутку $f_u(x)f_v(x + a_1)$ за правилом множення таблиць з P_n має такий самий вигляд як і i–та координата $f_{uv}(x)$.

Тому, $f_{uv}(x) = f_u(x) \cdot f_v(x + a_1)$ для всіх $x \in Z_p$, звідки $\beta(uv) = \beta(u)\beta(v)$, тобто β — гомоморфізм. Крім того, ядро гомоморфізму β містить лише нульову таблицю, тобто, β — ізоморфізм.

Доведемо тепер комутативність діаграми (7). Справді, для довільної таблиці $u = [a_i(x_1, \ldots, x_{i-1})]_{i=1}^n$ з P_n маємо $\delta(\varepsilon(u)) = \delta(u) = [c_u(x), 0] \in P_n \,\mathsf{wr}\, C_p$, де $c_u(x) = u$ для всіх $x \in Z_p$. А з іншого боку, $\beta(\delta_n^{(0)}(u)) = \beta([0, a_1, a_2(x_2), \ldots, a_n(x_2, x_3, \ldots, x_n)]) = [f_u(x), 0]$, де $f_u(x) = [a_1, a_2(x_1), \ldots, a_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})] = u$ для всіх $x \in Z_p$.

Отже, $\delta(\varepsilon(u)) = \beta(\delta_n^{(0)}(u))$ для всіх $u \in P_n$ або $\varepsilon\delta = \delta_n^{(0)}\beta$. Останнє означає, що занурення $\delta_n^{(0)}$ групи P_n в P_{n+1} є зануренням типу $d(P_n, C_p)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Звідси, з огляду на теореми 1 і 2 отримуємо, що група U_p^∞ є вербально повною. $\square$

ЛІТЕРАТУРА

1. Дмитрук Ю.В. *Строение силовской 2-подгруппы симметрической группы степени* 2^n // Укр. мат. журн. – 1978. – Т. 30, № 2. – С. 155–164.
2. Иванюта И.Д. *Силовские p-подгруппы счетной симметрической группы* // Укр. мат. журн. – 1963. – Т. 15, № 3. – С. 240–249.
3. Лещенко Ю.Ю. *Будова не резидуально скінченної силовської p-підгрупи однорідної симетричної групи суперстепеня* p^∞ // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2004. – № 4. – С. 36–44.
4. Лещенко Ю.Ю. *Характеристичні підгрупи не резидуально скінченної силовської p-підгрупи однорідної симетричної групи суперстепеня* p^∞ // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2005. – № 3. – С. 44–50.
5. Лещенко Ю.Ю., Сущанский В.И. *Силовское строение однородных симметрических групп суперстепени* p^∞ // Математині студії. – 2004. – Т. 22, № 2. – С. 141–151.
6. Сметанюк Н.В. *Ширина членів нижнього центрального ряду групи фінітарних автоморфізмів 2-адичного дерева* // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2000. – Вип. 2. – С. 124–130.
7. Сметанюк Н.В., Сущанский В.И. *Вербальные подгруппы группы финитарных автоморфизмов 2-адического дерева* // Фундаментальная и прикладная математика. – 2000. – Т.6, № 3. – С. 875–888.
8. Сущанський В.І. *Вербальні підгрупи силовських p-підгруп скінченних симетричних груп* // Вісник Київського ун-ту. Серія: Математика. Механіка. – 1970. – Вип. 12. – С. 134–141.
9. Сущанський В.І., Сікора В.С. Операції на групах підстановок. Теорія та застосування: Навч. посіб. — Чернівці: Рута, 2003. — 256 с.
10. Hall P. *Some constructions for locally finite groups*// J. London Math. Soc. – 1959. – V. 34. – P.305–319.
11. Kaloujnine L. *La structure des p-groupes de Sylow des groupes symetriques finis*// Ann. Sci. l'Ecole Norm. Super. – 1948. – V. 65. – P.239–276.
12. Kaloujnine L. *Sur les p-groupes de Sylow du groupe symetriques de degre* p^m// C. R. Acad. Sci. Paris. – 1945. – V. 221. – P. 222–224.

Черкаський національний університет ім. Б.Хмельницького
математичний факультет, ylesch@ua.fm

Надійшло 7.05.2007
Після переробки 20.09.2007