УДК 517.95+511.2

О. М. Медвідь, М. М. Симотюк[1]

ІНТЕГРАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ[2]

O. M. Medvid, M. M. Symotyuk. *Integral problem for linear partial differential equations*, Matematychni Studii, **28** (2007) 115–140.

The correctness of a problem with integral conditions for linear partial differential equations with constant coefficients is investigated. The sufficient conditions of existence of the unique periodic solution of the problem are established. In exploring the possibility of the realization of these conditions the notions of Hausdorff measure and dimension are used.

О. М. Медвидь, М. М. Сымотюк. *Интегральная задача для линейных уравнений в частных производных* // Математичні Студії. – 2007. – Т.28, №2. – С.115–140.

Иследована корректность задачи с интегральными условиями для линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. Установлены достаточные условия существования единственного решения задачи в классах функций, периодических по пространственным переменным. Для исследования вопроса о возможности выполнения этих условий использована мера и размерность Хаусдорфа.

Вступ. У даній роботі досліджуємо таку задачу з інтегральними умовами:

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t}, D_x\Big)u(t,x) \equiv \frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^n} + \sum_{j=0}^{n-1} A_j(D_x)\frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j} = 0, \quad (t,x) \in Q_p^T, \tag{1}$$

$$\int_0^{t_1} t^{j-1}u(t,x)dt = \varphi_j(x), \quad x \in \Omega_p, \quad j = \overline{1,n}, \quad 0 < t_1 \le T, \tag{2}$$

де $Q_p^T = (0,T) \times \Omega_p$, $T > 0$, Ω_p — p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, $D_x = \big(-i\partial_{x_1}, \ldots, -i\partial_{x_p}\big)$, $A_j(\xi)$, $j = \overline{0, n-1}$, — многочлени з комплексними коефіцієнтами степенів N_j, $N_j \in \mathbb{N}$, відповідно ($\xi \in \mathbb{R}^p$).

Інтерес до вивчення задач з інтегральними умовами (які є нелокальними, бо пов'язують значення шуканої функції у всіх точках відрізка $[0,T]$) для лінійних рівнянь із частинними похідними зумовлений тим, що для багатьох таких рівнянь неможлива коректна постановка локальних крайових задач [11], а також тим, що задачі з інтегральними умовами виникають при математичному моделюванні фізичних процесів [18, 33].

[1]Другий автор частково підтриманий грантом Президії НАН України для молодих вчених (постанова Президії НАН України № 203 від 09.07.2003).

[2]Робота виконана при частковій фінансовій підтримці ДФФД України (проект № 10.01/053). .
2000 *Mathematics Subject Classification:* 11J83, 11K60, 35A05, 35B10, 35B30, 42B05.

Задачі з інтегральними умовами вивчались у різних аспектах багатьма авторами. Так, у циклі робіт Л. В. Фардіголи [25, 26, 27, 28, 29] у шарі $\Pi(T) = [0, T] \times \mathbb{R}^p$, $T > 0$, досліджено інтегральну задачу

$$\frac{\partial \vec{v}(t,x)}{\partial t} = P(D_x)\vec{v}(t,x) + \vec{f}(t,x), \quad (t,x) \in \Pi(T), \tag{3}$$

$$\textstyle\int_0^T Q(D_x)\vec{v}(t,x)dt = \vec{v}_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^p, \tag{4}$$

де $P(\xi), Q(\xi)$ — матриці розміру $n \times n$, елементами яких є довільні многочлени з комплексними коефіцієнтами ($\xi \in \mathbb{R}^p$); $\vec{f} : \Pi(T) \to \mathbb{C}^n$, $\vec{v}_0 : \mathbb{R}^p \to \mathbb{C}^n$ — задані, а $\vec{v} : \Pi(T) \to \mathbb{C}^n$ — шукана вектор-функції. У [25, 26, 27, 28, 29] отримано критерії коректної розв'язності задачі (3), (4) у класах функцій скінченної гладкості зі степеневим зростанням при $|x| \to +\infty$; а також критерій сильної коректності (підвищення гладкості розв'язку порівняно із заданою вектор-функцією $\vec{v}_0(x)$) задачі (3), (4) і для таких задач досліджено питання про наявність рівномірних за t оцінок похідних (за x) розв'язків задач. Вивчено вплив параметрів задачі (матриць P, Q та товщини шару T) на властивості розв'язків інтегральної задачі (3), (4). У [29] показано, що задача (3), (4), є квазірегулярною, тобто з єдиності її розв'язку у класі функцій скінченної гладкості з поліномним зростанням при $|x| \to +\infty$ випливає й коректна розв'язність задачі у цьому ж класі. Значну роль при доведенні властивості квазірегулярності відіграє використання відомої теореми Зайденберга–Тарського та її наслідків про структуру напівалгебричних множин в $\mathbb{R}^p$ (див. напр. додаток А у [31]).

Зауважимо, що раніше класи єдиності задачі (3), (4), досліджувались І. Л. Віленцем [2]. Критерії коректності такої задачі в доволі широких класах функцій отримані А. А. Макаровим [10]. Ці критерії у [10] сформульовано в термінах існування степеневих оцінок в $\mathbb{R}^p$ деяких мероморфних функцій, пов'язаних із задачею (3), (4), (так званих розв'язувальних функцій).

У роботі І. В. Тіхонова [23] в банаховому просторі E досліджено інтегральну задачу

$$\tfrac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad \textstyle\int_0^T u(t)d\mu(t) = u_1 \in E, \tag{5}$$

де $T > 0$, A — лінійний замкнений оператор в E, а $\mu(t)$ — скалярна функція обмеженої варіації на відрізку $[0, T]$. У [23] з'ясовано, що якщо міра $\mu(t)$ не вироджується на кінцях відрізка $[0, T]$, то для єдиності розв'язку задачі (5) на $[0, T]$ необхідно і досить, щоб жоден нуль характеристичної функції $l(\lambda) = \int_0^T e^{\lambda t} d\mu(t)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, не був власним значенням оператора A. Окремі результати у [23] стосуються випадків, коли оператор A є симетричним або породжує C_0-напівгрупу.

Якщо оператор A породжує аналітичну напівгрупу, дослідження коректності задачі (5) та її узагальнень проводились Е. А. Штейнвілем (див. с. 170–171 у [23]).

М. І. Іванчов у роботі [5] розглянув початково-крайову задачу для одновимірного параболічного рівняння з інтегральними умовами в якості крайових умов

$$u_t = a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(t,x), \quad 0 < x < h, \quad 0 < t \leq T,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \int_0^h p_i(x)u(t,x)dx = \mu_i(t), \quad i = 1, 2, \quad t \in [0, T].$$

Такі задачі виникають при дослідженні процесів керування термопружними деформаціями [3]. У роботі [5] встановлено умови існування і єдиності класичного розв'язку задачі шляхом зведення її до еквівалентної першої крайової задачі для того ж рівняння.

Для строго гіперболічних за Петровським рівнянь вигляду

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{|s|=j} a_{j,s}\frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^{n-j}\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_p^{s_p}}=0,\quad a_{0,0}=1,\quad (t,x)\in\Pi(T), \tag{6}$$

П. І. Штабалюк [34, § 2.3] (див. також § 7.4 у [16]) дослідив задачу з умовами (2) (при $t_1=T$) у класах функцій, майже періодичних за $x_1,\dots,x_p$. Розв'язність такої задачі пов'язана із проблемою малих знаменників, для оцінки знизу яких використано метричний підхід [16]. На основі цього підходу у [34, § 2.3], [16, § 7.4] встановлено, що умови існування єдиного розв'язку задачі (6), (2) виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебега) чисел $T>0$ та для майже всіх векторів $\vec{A}=\mathrm{colon}(a_{j,s}:|s|=j, j=\overline{1,n})$, складених з коефіцієнтів рівняння (6), а у випадку однієї просторової змінної ($p=1$) — для всіх $T>0$ та для майже всіх векторів $\vec{A}$.

Задачу (1), (2) для випадку $n=2$ (без обмежень на тип рівняння (1) та кількість p просторових змінних) досліджено в [13], де запропоновано нову (порівняно з [34, § 2.3]) методику для оцінювання знизу малих знаменників задачі і встановлено коректність цієї задачі для майже всіх чисел $t_1\in(0,T]$ та довільних коефіцієнтів рівняння (1). Отримані у [13] результати узагальнено в [14] на випадок умов

$$\textstyle\int_0^{t_1} g_j(t,D_x)u(t,x)dt=\varphi_j(x),\quad j=1,2,$$

в яких символи $g_j(t,k)$ ($k\in\mathbb{Z}^p$) псевдодиференціальних операторів $g_j(t,D_x)$, $j=1,2$, є розв'язками задач Коші

$$g_j''(t,k)+B_1(k)g_j'(t,k)+B_2(k)g_j(t,k)=0,\quad g_j^{(q-1)}(0,k)=\delta_{jq},\quad j,q=1,2,$$

де $B_1(\xi),B_2(\xi)$ — многочлени, а δ_{jq} — символ Кронекера.

Дана робота продовжує і розвиває дослідження, розпочаті у [13], [34, § 2.3]. Її основною метою є встановлення загального результату про коректність для майже всіх (стосовно міри та розмірності Гаусдорфа на прямій) чисел $t_1\in(0,T]$ задачі з умовами (2) для довільного рівняння (1) (без обмеження на тип). Іншими словами, для кожного рівняння (1) в області Q_p^T можна поставити коректну інтегральну задачу (2) і для кожного рівняння (1) множина таких коректних задач (2), параметризованих межею $t_1\in(0,T]$, має повну міру (розмірність) Гаусдорфа на прямій.

Загальний план роботи такий. У §1 наведено необхідні позначення, запроваджено поняття $(\alpha_0,\beta_0;\alpha,\beta;\gamma)$–коректності і $(\beta_0(t);\gamma)$–сильної коректності інтегральної задачі (1), (2), а також поняття $(\omega,\delta;\gamma)$–нормальності верхньої межі t_1 інтегрування в умовах (2). Наведено приклади задач та приклади нормальних меж інтегрування для них, а також приклад задачі, верхня межа інтегрування якої не може бути $(\omega,\delta;\gamma)$–нормальною, якими б не були числа $\omega,\delta\in\mathbb{R}$, $\gamma>0$.

У §2 встановлено достатні умови $(\alpha_0,\beta_0;\alpha,\beta;\gamma)$-коректності інтегральної задачі (1), (2), а також встановлено $(\beta_0(t);\gamma)$-сильну коректність задачі для параболічних та антипараболічних рівнянь; показано, як коректність задачі залежить від поведінки дійсних частин коренів характеристичного рівняння, яке відповідає рівнянню (1), взаємного розташування цих коренів та від $(\omega,\delta;\gamma)$-нормальності верхньої межі t_1 інтегрування в умовах (2).

Допоміжний §3 містить твердження про оцінки кількості і довжин проміжків покриття так званих виняткових множин гладких функцій, деяка похідна яких не перетворюється в нуль на проміжку їхнього задання. Це твердження використано для доведення теорем про оцінки кількості і довжин проміжків покриття виняткових множин квазімногочлена, всі значення похідних якого в заданій точці (до деякого скінченного порядку) не перетворюються в нуль одночасно. Розглянуто випадки дійснозначних та комплекснозначних квазімногочленів.

У §4 з'ясовано структуру характеристичного визначника $\Delta(k,t_1)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, пов'язаного із задачею (1), (2). Показано, що для кожного $k\in\mathbb{Z}^p$ визначник $\Delta(k,t_1)$ є квазімногочленом за змінною t_1, всі похідні якого до порядку (n^2-1) включно перетворюються в нуль при $t_1=0$, а похідна порядку n^2 в точці $t_1=0$ є ненульовою константою, яка не залежить від k. Встановлено оцінки знизу для дійсних частин показників експонент, а також оцінки зверху для кількості різних показників цих експонент і для степенів многочленів, які входять множниками до визначника $\Delta(k,t_1)$, $k\in\mathbb{Z}^p$.

На основі тверджень із §3, §4 у §5 встановлено існування таких ω_0, δ_0, γ_0, що множина тих чисел $t_1\in(0,T]$, для яких нерівність $|\Delta(k,t_1)|\le(1+|k|)^{-\omega}\exp(-\delta|k|^\gamma)$ виконується для нескінченної кількості векторів $k\in\mathbb{Z}^p$, має нульову ρ–міру Гаусдорфа для всіх $\omega>\omega_0$, $\delta\ge\delta_0$, $\gamma\ge\gamma_0$ та нульову розмірність Гаусдорфа для всіх $\omega\in\mathbb{R}$, $\delta>\delta_0$, $\gamma\ge\gamma_0$ (або для всіх $\omega\in\mathbb{R}$, $\delta>0$, $\gamma>\gamma_0$). Із встановлених метричних оцінок для модуля визначника $\Delta(k,t_1)$ випливають твердження про міру та розмірність Гаусдорфа множини значень $t_1\in(0,T]$, які не є $(\omega,\delta;\gamma)$–нормальними межами для задачі (1), (2).

§6 містить твердження про коректність задачі (1), (2) для майже всіх (стосовно міри Гаусдорфа на прямій) чисел $t_1\in(0,T]$, а також для всіх чисел $t_1\in(0,T]$, крім, можливо, множини, що має нульову розмірність Гаусдорфа. Твердження цього параграфа є наслідками тверджень, доведених у §2 і §5.

Нарешті, у §7 обговорено перспективу подальших досліджень та можливі узагальнення отриманих результатів.

§1. Основні позначення, означення та приклади. Нижче використовуємо такі позначення: $x=(x_1,\ldots,x_p)\in\Omega_p$; $k=(k_1,\ldots,k_p)\in\mathbb{Z}^p$, $|k|=|k_1|+\ldots+|k_p|$; $(k,x)=k_1x_1+\ldots+k_px_p$; C_n^m — кількість комбінацій з n елементів по m; $\operatorname{mes}A$ — міра Лебега в $\mathbb{R}$ вимірної множини $A\subset\mathbb{R}$; $W^\gamma_{\alpha,\beta}$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \gamma>0)$ — простір, отриманий в результаті поповнення простору скінченних тригонометричних поліномів $\varphi(x)=\sum\varphi_k\exp(ik,x)$ за нормою

$$\|\varphi(x);W^\gamma_{\alpha,\beta}\|=\Big(\sum_{|k|\ge0}|\varphi_k|^2(1+|k|)^{2\alpha}\exp(2\beta|k|^\gamma)\Big)^{1/2},$$

$C^n([0,T];W^\gamma_{\alpha,\beta})$ — простір функцій $u(t,x)$ таких, що при фіксованому $t\in[0,T]$ похідні $\partial^ju(t,x)/\partial t^j$, $0\le j\le n$, належать до простору $W^\gamma_{\alpha,\beta}$ і як елементи цього простору є неперервними за t на $[0,T]$. Норму в просторі $C^n([0,T];W^\gamma_{\alpha,\beta})$ задаємо формулою

$$\|u(t,x);C^n([0,T];W^\gamma_{\alpha,\beta})\|=\sum_{j=0}^n\max_{t\in[0,T]}\big\|\tfrac{\partial^ju(t,x)}{\partial t^j};W^\gamma_{\alpha,\beta}\big\|;$$

$W^\gamma_{+\infty,\beta}=\varprojlim\limits_{\alpha>0}W^\gamma_{\alpha,\beta}$ $(\gamma>0)$ — проективна границя просторів $W^\gamma_{\alpha,\beta}$ $(\alpha>0)$ зі збіжністю, визначеною за правилом: послідовність $(\varphi_m)_{m=1}^\infty$ збігається до нуля в $W^\gamma_{+\infty,\beta}$, якщо виконуються такі умови:

1) $\forall\, m,n\in\mathbb{N}\quad\varphi_m(x)\in W^\gamma_{n,\beta}$,

2) $\forall\, n\in\mathbb{N}\quad\exists\lim\limits_{m\to\infty}\|\varphi_m(x);W^\gamma_{n,\beta}\|=0$.

Означення 1.1. Задачу (1), (2) називаємо $(\alpha_0,\beta_0;\alpha,\beta;\gamma)$*–коректною* $(\alpha_0,\beta_0,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\gamma>0)$, якщо для будь-яких $\varphi_j(x)\in W^\gamma_{\alpha,\beta}$, $j=\overline{1,n}$, у просторі $C^n([0,T];W^\gamma_{\alpha_0,\beta_0})$ існує єдина функція $u(t,x)$ така, що

$$\big\|L\big(\partial/\partial t, D_x\big)u(t,x); C([0,T]; W^{\gamma}_{\alpha_0-N,\beta_0})\big\| = 0, \tag{7}$$

$$\| \textstyle\int_0^{t_1} t^{j-1}u(t,x)dt - \varphi_j(x); W^{\gamma}_{\alpha,\beta}\big\| = 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{8}$$

$$\|u(t,x); C^n([0,T]; W^{\gamma}_{\alpha_0,\beta_0})\| \leq C_1 \sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j(x); W^{\gamma}_{\alpha,\beta}\|, \tag{9}$$

де $N = \max\limits_{0\leq j\leq n-1}\{N_j\}$, а додатна стала C_1 не залежить від вибору $\varphi_j(x) \in W^{\gamma}_{\alpha,\beta}$, $j = \overline{1,n}$.

Нехай I позначає інтервал $(0,T)$ або проміжок $(0,+\infty)$, а $\beta_0(t)$ — дійсна додатна функція на I.

Означення 1.2. Задачу (1), (2) називаємо $(\beta_0(t);\gamma)$-*сильно коректною* на проміжку I, якщо для довільних $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ та довільних $\varphi_j(x) \in W^{\gamma}_{\alpha,\beta}$, $j = \overline{1,n}$, існує єдина функція $u(t,x) \in C^n(I; W^{\gamma}_{+\infty,\beta})$ така, що

1) $L(\partial/\partial t, D_x)u(t,x) = 0$ в просторі $C(I; W^{\gamma}_{+\infty,\beta})$, виконується умова (8),

1) $\forall\, t \in I\ \forall\, \varepsilon > 0\ \forall\, j : 0 \leq j \leq n$ похідні $\partial^j u(t,x)/\partial t^j$ належать до простору $W^{\gamma}_{+\infty,\beta+\beta_0(t)-\varepsilon}$,

3) $\forall\, t \in I\ \forall\, \varepsilon > 0\ \forall m \in \mathbb{N}\ \forall r = \overline{0,n}$, існує така стала $C_2 = C_2(\alpha,\varepsilon,t,t_1,m,n,\gamma) > 0$, що

$$\big\|\tfrac{\partial^r u(t,x)}{\partial t^r}; W^{\gamma}_{m,\beta+\beta_0(t)-\varepsilon}\big\| \leq C_2 \sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j(x); W^{\gamma}_{\alpha,\beta}\|.$$

Нехай $f_1(t,k),\ldots,f_n(t,k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, — така фундаментальна система розв'язків рівняння $L(d/dt,k)y(t) = 0$, що $f_q^{(j-1)}(0,k) = \delta_{jq}$, $j,q = \overline{1,n}$, де δ_{jq} — символ Кронекера. Позначимо:

$$\Delta(k,t_1) = \det \big\| \textstyle\int_0^{t_1} t^{j-1} f_q(t,k)dt\big\|_{j,q=1}^{n}, \quad k \in \mathbb{Z}^p.$$

Означення 1.3. Верхню межу інтегрування t_1 в умовах (2) називаємо $(\omega,\delta;\gamma)$-*нормальною межею* $(\omega,\delta \in \mathbb{R},\ \gamma > 0)$, якщо існує така стала $C_3 > 0$, що для всіх векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ виконується нерівність $|\Delta(k,t_1)| \geq C_3(1+|k|)^{-\omega}\exp(-\delta|k|^{\gamma})$. Через $M^{\gamma}_{\omega,\delta}$ позначимо множину всіх $(\omega,\delta;\gamma)$–нормальних меж t_1, які належать до проміжку $(0,T]$.

Приклад 1.1. Для задачі

$$\big(\tfrac{\partial}{\partial t} - a^2\tfrac{\partial^2}{\partial x^2}\big)^2 u = 0, \quad a > 0, \quad (t,x) \in Q_1^T,$$

$$\textstyle\int_0^{t_1} u(t,x)dt = \varphi_1(x), \quad \int_0^{t_1} tu(t,x)dt = \varphi_2(x), \quad x \in \Omega_1,$$

визначник $\Delta(k,t_1)$, $k \in \mathbb{Z}$, обчислюється за формулами:

$$\Delta(0,t_1) = \tfrac{t_1^4}{12}, \quad \Delta(k,t_1) = \tfrac{4\exp(-a^2k^2t_1)}{(ak)^8}\big(\operatorname{sh}^2\big(\tfrac{a^2k^2t_1}{2}\big) - \big(\tfrac{a^2k^2t_1}{2}\big)^2\big),\ k \neq 0.$$

Оскільки для досить великих $|k|$ виконуються нерівності

$$\operatorname{sh}^2\big(\tfrac{a^2k^2t_1}{2}\big) - \big(\tfrac{a^2k^2t_1}{2}\big)^2 \geq \tfrac{1}{2}\operatorname{sh}^2\big(\tfrac{a^2k^2t_1}{2}\big), \exp(-a^2k^2t_1)\operatorname{sh}^2\big(\tfrac{a^2k^2t_1}{2}\big) \geq \tfrac{1}{8},\ t_1 > 0,$$

то $\Delta(k,t_1) \geq \dfrac{1}{4(ak)^8}$ $(t_1 > 0)$ для досить великих $|k|$. Враховуючи, що $\Delta(k,t_1) \neq 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$ та $t_1 > 0$, з попередньої нерівності одержимо, що для довільного $\gamma > 0$ будь-яка точка $t_1 > 0$ є $(8,0;\gamma)$–нормальною межею для даної задачі.

Приклад 1.2. Розглянемо задачу

$$\big(\tfrac{\partial}{\partial t}+a^2\tfrac{\partial^2}{\partial x^2}\big)^2u=0,\quad a>0,\quad (t,x)\in Q_1^T,$$

$$\textstyle\int_0^{t_1}u(t,x)dt=\varphi_1(x),\quad \int_0^{t_1}tu(t,x)dt=\varphi_2(x),\quad x\in\Omega_1.$$

Для цієї задачі

$$\Delta(0,t_1)=\tfrac{t_1^4}{12},\quad \Delta(k,t_1)=\tfrac{4\exp(a^2k^2t_1)}{(ak)^8}\big(\operatorname{sh}^2\big(\tfrac{a^2k^2t_1}{2}\big)-\big(\tfrac{a^2k^2t_1}{2}\big)^2\big),\ k\neq 0.$$

Очевидно, що для всіх $t_1>0$ та досить великих $|k|$ виконується нерівність

$$\exp(a^2k^2t_1)\operatorname{sh}^2\big(\tfrac{a^2k^2t_1}{2}\big)\geq\tfrac{1}{8}\exp(2a^2k^2t_1).$$

Враховуючи, що $\Delta(k,t_1)>0$, $k\in\mathbb{Z}$, якщо $t_1>0$, звідси дістанемо, що $\Delta(k,t_1)\geq C_4(1+a|k|)^{-8}\exp(2a^2k^2t_1)$ для всіх $k\in\mathbb{Z}$. Тому кожна точка $t_1>0$ є $(8,-2a^2t_1;2)$-нормальною межею для даної задачі.

Приклад 1.3. Легко перевірити, що для задачі

$$\big(\tfrac{\partial^2}{\partial t^2}+a^2\tfrac{\partial^2}{\partial x^2}\big)u=0,\quad a>0,\quad (t,x)\in Q_1^T,$$

$$\textstyle\int_0^{t_1}u(t,x)dt=\varphi_1(x),\quad \int_0^{t_1}tu(t,x)dt=\varphi_2(x),\quad x\in\Omega_1,$$

визначник $\Delta(k,t_1)$, $k\in\mathbb{Z}$, обчислюється за формулами

$$\Delta(0,t_1)=\tfrac{t_1^4}{12},\quad \Delta(k,t_1)=\tfrac{2\operatorname{sh}(akt_1/2)}{(ak)^4}\big((akt_1)\operatorname{ch}(akt_1/2)-2\operatorname{sh}(akt_1/2)\big),\ k\neq 0.$$

Оскільки для всіх $t_1>0$ та досить великих $|k|$ виконується нерівність $|\Delta(k,t_1)|\geq \dfrac{\exp(a|k|t_1)}{8a^3|k|^3}$, то враховуючи, що $\Delta(k,t_1)\neq 0$, $k\in\mathbb{Z}$, якщо $t_1>0$, звідси дістанемо, що кожна точка $t_1>0$ є $(3,-at_1;1)$-нормальною межею для даної задачі.

Загальніші приклади рівнянь, для яких кожна точка $t_1>0$ є нормальною межею в інтегральних умовах, дає наступна теорема.

Теорема 1.1. *Нехай диференціальний вираз $L(\partial/\partial t,D_x)$ у рівнянні (1) має вигляд*

$$L\big(\tfrac{\partial}{\partial t},D_x\big)=\prod_{j=1}^{n}\big(\tfrac{\partial}{\partial t}-\mu_jB(D_x)\big),\tag{10}$$

де $\mu_j\in\mathbb{R}$, $j=\overline{1,n}$, $\mu_j\neq\mu_q$, $j\neq q$, а диференціальний вираз $B(D_x)$ порядку γ_1 є таким, що для всіх $k\in\mathbb{Z}^p$ виконуються умови $B(k)\in\mathbb{R}$, $\quad B(k)\geq b_1|k|^{\gamma_1}$, $b_1>0$, $\gamma_1>0$.

Якщо $\mu_j<0$ для всіх $j=\overline{1,n}$, то кожна точка $t_1>0$ є $(\gamma_1n^2,0;\gamma_1)$–нормальною межею для задачі (1), (2). Якщо ж $\mu_j>0$ для всіх $j=\overline{1,n}$, то кожна точка $t_1>0$ є $(\gamma_1n(n+1)/2,-b_1\mu t_1;\gamma_1)$–нормальною межею для задачі (1), (2), де $\mu=\mu_1+\ldots+\mu_n$.

Для доведення теореми 1.1 встановимо спочатку допоміжні твердження.

Лема 1.1. *Якщо для кожного $k\in\mathbb{Z}^p$ всі λ–корені рівняння $L(\lambda,k)=0$ є дійсними, то для довільного $t_1>0$ визначник $\Delta(k,t_1)$ є відмінним від нуля.*

Доведення. Відомо (див. [15], Ч. 1, задача 68 на с. 72), що

$$\Delta(k,t_1)=\tfrac{1}{n!}\textstyle\int_0^{t_1}\ldots\int_0^{t_1}\delta(k;\tau_1,\ldots,\tau_n)V(\tau_1,\ldots,\tau_n)d\tau_1\ldots d\tau_n.$$

де $\delta(k;\tau_1,\ldots,\tau_n)=\det\|f_q(\tau_j,k)\|_{j,q=1}^n$, $V(\tau_1,\ldots,\tau_n)=\prod\limits_{n\ge j>q\ge 1}(\tau_j-\tau_q)$. Нехай S_n — симетрична група перестановок елементів множини $\{1,\ldots,n\}$. Через I_ω, $\omega=(i_1,\ldots,i_n)\in S_n$, позначимо симплекс $\{(\tau_1,\ldots,\tau_n)\in[0,t_1]^n:\tau_{i_1}\le\ldots\le\tau_{i_n}\}$. Розбиваючи куб $[0,t_1]^n$ на $n!$ симплексів I_ω, $\omega\in S_n$, дістанемо, що

$$\Delta(k,t_1)=\tfrac{1}{n!}\sum_{\omega\in S_n}\int_{I_\omega}\delta(k;\tau_1,\ldots,\tau_n)V(\tau_1,\ldots,\tau_n)d\tau_1\ldots d\tau_n. \tag{11}$$

Із того, що $\mu_j\in\mathbb{R}$, $j=\overline{1,n}$, $B(k)\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{Z}^p$, та теореми Пойя (див. с. 87 у [30]) про єдиність розв'язку багатоточкової задачі для звичайного диференціального рівняння, оператор якого розкладається у композицію диференціальних виразів першого порядку з дійсними коефіцієнтами, випливає, що визначник $\delta(k;\tau_1,\ldots,\tau_n)$ є відмінним від тотожного нуля у симплексі I_σ, де $\sigma=(1,\ldots,n)$, і не може набувати у ньому значень різних знаків. Оскільки $V(\tau_1,\ldots,\tau_n)\ge 0$ для всіх $(\tau_1,\ldots,\tau_n)\in I_\sigma$, то звідси випливає, що

$$\int_{I_\sigma}\delta(k;\tau_1,\ldots,\tau_n)V(\tau_1,\ldots,\tau_n)d\tau_1\ldots d\tau_n\ne 0. \tag{12}$$

Зауважимо, що для довільної перестановки $\omega=(i_1,\ldots,i_n)\in S_n$

$$\delta(k;\tau_{i_1},\ldots,\tau_{i_n})=(-1)^{\rho_\omega}\delta(k;\tau_1,\ldots,\tau_n),\quad V(\tau_{i_1},\ldots,\tau_{i_n})=(-1)^{\rho_\omega}V(\tau_1,\ldots,\tau_n),$$

де ρ_ω — кількість інверсій у перестановці $\omega\in S_n$. Враховуючи ці формули і замінюючи змінні під знаком інтеграла, дістанемо, що

$$\int_{I_\omega}\delta(k;\tau_1,\ldots,\tau_n)V(\tau_1,\ldots,\tau_n)d\tau_1\ldots d\tau_n=\int_{I_\sigma}\delta(k;\tau_1,\ldots,\tau_n)V(\tau_1,\ldots,\tau_n)d\tau_1\ldots d\tau_n.$$

Тоді з формул (11), (12) випливає, що

$$\Delta(k,t_1)=\int_{I_\sigma}\delta(k;\tau_1,\ldots,\tau_n)V(\tau_1,\ldots,\tau_n)d\tau_1\ldots d\tau_n\ne 0.$$

□

Лема 1.2. *Для довільних $\lambda\in\mathbb{C}$ та довільних $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ правильна рівність*

$$\int_0^{t_1}t^m e^{\lambda t}dt=e^{\lambda t_1}P_m(\lambda,t_1)-P_m(\lambda,0),$$

де $P_m(\lambda,t_1)=\sum\limits_{j=0}^{m}\dfrac{a_{jm}t_1^{m-j}}{\lambda^{j+1}}$, $a_{jm}=(-1)^j\frac{m\,!}{(m-j)\,!}$, $0\le j\le m$, *для* $\lambda\ne 0$ *і* $P_m(0,t_1)=\dfrac{t_1^{m+1}}{m+1}$.

Доведення леми 1.2 є елементарним і проводиться інтегруванням частинами.

Доведення теореми 1.1. Нехай $h_q(t,k)=\begin{cases}t^{q-1}/(q-1)!, & \text{якщо } B(k)=0,\\ \exp(\mu_q B(k)t), & \text{якщо } B(k)\ne 0,\end{cases}$ для $1\le q\le n$ і нехай $\Delta_1(k,t_1)=\det\|\int_0^{t_1}t^{j-1}h_q(t,k)dt\|_{j,q=1}^n$, $k\in\mathbb{Z}^p$. Зрозуміло, що функції $h_q(t,k)$, $q=\overline{1,n}$, утворюють фундаментальну систему розв'язків звичайного диференціального рівняння $\prod_{j=1}^n(d/dt-\mu_jB(k))y(t)=0$. Через $T(k)\equiv\|t_{jq}(k)\|_{j,q=1}^n$, $k\in\mathbb{Z}^p$, позначимо матрицю переходу від фундаментальної системи $f_1(t,k),\ldots,f_n(t,k)$ до фундаментальної системи $h_1(t,k),\ldots,h_n(t,k)$, тобто

$$h_q(t,k)=\sum_{r=1}^n t_{qr}(k)f_r(t,k),\quad q=\overline{1,n}. \tag{13}$$

З рівностей (13) та правила добутку двох матриць отримуємо, що

$$\Big\| \int_0^{t_1} t^{j-1} h_q(t,k)dt\Big\|_{j,q=1}^n = \Big\| \sum_{r=1}^n t_{qr}(k) \int_0^{t_1} t^{j-1} f_r(t,k)dt\Big\|_{j,q=1}^n = T(k)\Big\| \int_0^{t_1} t^{j-1} f_q(t,k)dt\Big\|_{j,q=1}^n$$

Враховуючи, що $f_q^{(j-1)}(0,k) = \delta_{jq}$, $j,q = \overline{1,n}$, з рівностей (13) дістаємо, що $t_{jq}(k) = h_q^{(j-1)}(0,k)$, $j,q = \overline{1,n}$. Тому визначник матриці $T(k)$ дорівнює значенню в нулі вронскіана системи функцій $h_1(t,k),\dots,h_n(t,k)$. Згідно з вправою 8.2 на с. 85 у [30], $\det T(k) = 1$, якщо $B(k) = 0$, $\det T(k) = \prod\limits_{n\ge j>q\ge 1} (\mu_j - \mu_q)B(k)$, якщо $B(k) \ne 0$. Таким чином, визначники $\Delta_1(k,t_1)$ та $\Delta(k,t_1)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, відрізняються сталим множником, який дорівнює визначникові матриці $T(k)$, тобто $\Delta(k,t_1) = \Delta_1(k,t_1)$, якщо $B(k) = 0$,

$$\Delta(k,t_1) = \frac{\Delta_1(k,t_1)}{\prod\limits_{n\ge j>q\ge 1}(\mu_j-\mu_q)B(k)}, \quad \text{якщо} \quad B(k) \ne 0. \tag{14}$$

Оскільки за умовою теореми $B(k) \ne 0$ для $k \ne \vec{0}$, то застосовуючи лему 1.2 для обчислення елементів визначника $\Delta_1(k,t_1)$, дістаємо, що

$$\Delta_1(k,t_1) = \det \| \exp(\mu_q B(k)t_1)P_{j-1}(\mu_q B(k),t_1) - P_{j-1}(\mu_q B(k),0)\|_{j,q=1}^n, \quad k \ne \vec{0}.$$

З отриманої формули і умов теореми 1.1 випливає, що для досить великих $|k|$ правильними є нерівності

$$|\Delta_1(k,t_1)| \ge \frac{1}{2}\Big| \det \|P_{j-1}(\mu_q B(k),0)\|_{j,q=1}^n\Big| \ge C_5 B^{-n(n+1)/2}(k) \ge C_6|k|^{-\gamma_1 n(n+1)/2}, \tag{15}$$

якщо $\mu_j < 0$ для всіх $j = \overline{1,n}$, та нерівності

$$|\Delta_1(k,t_1)| \ge \frac{1}{2}\Big| \det \| \exp(\mu_q B(k)t_1)P_{j-1}(\mu_q B(k),t_1)\|_{j,q=1}^n\Big| = \frac{1}{2}\exp(\mu B(k)t_1)\times$$

$$\times\Big| \det \|P_{j-1}(\mu_q B(k),t_1)\|_{j,q=1}^n\Big| \ge C_7 B^{-n}(k)\exp(\mu B(k)t_1) \ge C_8|k|^{-\gamma_1 n}\exp(\mu b_1 t_1|k|^{\gamma_1}), \tag{16}$$

якщо $\mu_j > 0$ для всіх $j = \overline{1,n}$. Оскільки числа μ_j, $j = \overline{1,n}$, та числа $B(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, є дійсними, то за лемою 1.1 визначник $\Delta(k,t_1)$ є відмінним від нуля. Тому з отриманих оцінок (15), (16) та формули (14) дістаємо твердження теореми 1.1. □

У наступному прикладі наведемо задачу, верхня межа інтегрування якої не може бути $(\omega,\delta;\gamma)$–нормальною, якими б не були числа $\omega,\delta \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$.

Приклад 1.4. Для задачі

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad a > 0, \quad (t,x) \in Q_1^T,$$

$$\int_0^{t_1} u(t,x)dt = \varphi_1(x), \quad \int_0^{t_1} tu(t,x)dt = \varphi_2(x), \quad x \in \Omega_1,$$

визначник $\Delta(k,t_1)$, $k \in \mathbb{Z}$, обчислюється за формулами

$$\Delta(0,t_1) = \frac{t_1^4}{12}, \quad \Delta(k,t_1) = \frac{2\sin(akt_1/2)}{(ak)^4}\big(2\sin(akt_1/2) - (akt_1)\cos(akt_1/2)\big),\ k \ne 0. \tag{17}$$

Зрозуміло, що будь-яка точка $t_1 = \frac{2\pi l}{aq}$, де $l,q \in \mathbb{N}$, не може бути $(\omega,\delta;\gamma)$–нормальною межею при жодних значеннях $\omega,\delta \in \mathbb{R}$ і $\gamma > 0$, бо для таких точок t_1 визначник $\Delta(k,t_1)$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, дорівнює нулеві, якщо $|k|$ є кратним числа q.

Існують точки $t_1 \notin \frac{2\pi}{a}\mathbb{Q}$, які не можуть бути $(\omega, \delta; \gamma)$–нормальними межами при жодних значеннях $\omega, \delta \in \mathbb{R}$ та $\gamma > 0$. Наведемо необхідні пояснення. За теоремою Хінчина (див. с. 48 у [32]) для довільних $\omega, \delta \in \mathbb{R}$ та $\gamma > 0$ існує таке число $\theta \in (0, aT/2]$, $\theta/\pi \notin \mathbb{Q}$, що нерівність

$$|k\theta - m\pi| < \frac{(ak)^4(1+|k|)^{-\omega}\exp(-\delta|k|^\gamma)}{4(aT|k|+1)}$$

має нескінченну множину розв'язків у цілих числах k, m $(k \neq 0)$. Оскільки при фіксованому k нерівність

$$|k\theta - m\pi| < \frac{(ak)^4(1+|k|)^{-\omega}\exp(-\delta|k|^\gamma)}{4(aT|k|+1)}$$

може мати лише скінченну кількість розв'язків у цілих m, то з того, що $|\sin(k\theta)| = |\sin(k\theta - m\pi)| \leq |k\theta - m\pi|$, де m — ціле число, випливає, що нерівність

$$|\sin(k\theta)| < \tfrac{(ak)^4(1+|k|)^{-\omega}\exp(-\delta|k|^\gamma)}{4(aT|k|+1)}$$

має безмежну кількість розв'язків у цілих числах k. Вибираючи точку $t_1 > 0$ так, що $t_1 = 2\theta/a$, з формули (17) отримаємо, що нерівність $|\Delta(k, t_1)| < (1+|k|)^{-\omega}\exp(-\delta|k|^\gamma)$ може виконуватися для нескінченної множини K_1 цілих чисел k. Зауважимо, що з формули (17) випливає, що для вибраного таким чином значення t_1 кількість цілих чисел $k \in K_1$, для яких визначник $\Delta(k, t_1)$ перетворюється в нуль, може бути не більш ніж скінченною.

Зауваження 1.1. Явище, описане у прикладі 1.4, відображає, скоріше, виняткову властивість інтегральної задачі, а не загальну, бо у §5 роботи доведено загальний результат про те, що для кожного рівняння (1) існують такі значення $\omega_0, \delta_0, \gamma_0$, що множина тих чисел $t_1 \in (0, T]$, які не є (ω, δ, γ)–нормальними для рівняння (1), має нульову міру Гаусдорфа для всіх $\omega > \omega_0$, $\delta \geq \delta_0$, $\gamma \geq \gamma_0$ та нульову розмірність Гаусдорфа для всіх $\omega \in \mathbb{R}$, $\delta > \delta_0$, $\gamma \geq \gamma_0$ або ж для всіх $\omega \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $\gamma > \gamma_0$.

§2. Достатні умови $(\alpha_0, \beta_0; \alpha, \beta; \gamma)$–коректності інтегральної задачі, $(\beta_0(t), \gamma)$-сильна коректність інтегральної задачі. Нехай $\lambda_1(k), \ldots, \lambda_{m(k)}(k)$, $m(k) \leq n$, — різні корені рівняння $L(\lambda, k) = 0$, $k \in \mathbb{Z}^p$, кратностей $n_1(k), \ldots, n_{m(k)}(k)$ відповідно. Надалі вважаємо, що $\gamma_0 = \max\limits_{0 \leq j \leq n-1}\{N_j/(n-j)\}$. Відомо (див. розділ 5, §7 у [24]), що скінченними є числа

$$\Lambda = \sup_{k \in \mathbb{Z}^p} \max_{1 \leq j \leq m(k)} \left\{\tfrac{|\lambda_j(k)|}{1+|k|^{\gamma_0}}\right\},$$

$$\Lambda_1 = \max\left\{0; \sup_{k \in \mathbb{Z}^p} \max_{1 \leq j \leq m(k)} \frac{\operatorname{Re} \lambda_j(k)}{1+|k|^{\gamma_0}}\right\}, \quad \Lambda_2 = -\min\left\{0; \inf_{k \in \mathbb{Z}^p} \min_{1 \leq j \leq m(k)} \frac{\operatorname{Re} \lambda_j(k)}{1+|k|^{\gamma_0}}\right\}.$$

Теорема 2.1. *Якщо верхня межа інтегрування t_1 в умовах (2) є $(\omega, \delta; \gamma_0)$–нормальною, то для довільних $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}$ задача (1), (2) є $(\alpha_0, \beta_0; \alpha, \beta; \gamma_0)$–коректною, де*

$$\alpha = \alpha_0 + \omega + \gamma_0 \tfrac{n(n+3)}{2}, \quad \beta = \beta_0 + \delta + n\Lambda_1 T.$$

Доведення. Нехай $\varphi_j(x) \in W^{\gamma_0}_{\alpha_0+\omega+\gamma_0\frac{n(n+3)}{2},\beta_0+\delta+n\Lambda_1 T}$, $j=\overline{1,n}$. Покажемо, що існує єдина функція $u(t,x) \in C^n([0,T];W^{\gamma_0}_{\alpha_0,\beta_0})$, яка справджує співвідношення (7)–(9). Функцію $u(t,x) \in C^n([0,T];W^{\gamma_0}_{\alpha_0,\beta_0})$ можна подати у вигляді ряду

$$u(t,x)=\sum_{|k|\geq 0} u_k(t)\exp(ik,x),$$

де $u_k(t) \in C^n[0,T]$, $k \in \mathbb{Z}^p$. Із (7), (8) випливає, що кожна функція $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, є розв'язком такої інтегральної задачі для звичайного диференціального рівняння:

$$L\big(\tfrac{d}{dt},k\big)u_k(t)=0, \quad \int_0^{t_1} t^{j-1}u_k(t)dt=\varphi_{jk}, \quad j=\overline{1,n}, \tag{18}$$

де φ_{jk}, $k \in \mathbb{Z}^p$, — коефіцієнти Фур'є функцій $\varphi_j(x)$, $j=\overline{1,n}$, відповідно. Розв'язок задачі (18) з класу $C^n[0,T]$ зображається формулою

$$u_k(t)=\sum_{q=1}^{n} C_{kq}f_q(t,k),$$

де сталі C_{kq}, $q=\overline{1,n}$, визначаються із системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{q=1}^{n} C_{kq}\int_0^{t_1} t^{j-1}f_q(t,k)dt=\varphi_{jk}, \quad j=\overline{1,n}. \tag{19}$$

Визначник системи (19) співпадає з визначником $\Delta(k,t_1)$. Згідно з умовою теореми $\Delta(k,t_1)\neq 0$, тому система (19) має єдиний розв'язок (звідси вже випливає єдиність функції $u(t,x) \in C^n([0,T];W^{\gamma_0}_{\alpha_0,\beta_0})$, для якої виконуються умови (7)–(9)). Застосовуючи правило Крамера для знаходження невідомих C_{kq}, $q=\overline{1,n}$, дістанемо, що

$$C_{kq}=\sum_{j=1}^{n}\tfrac{\Delta_{jq}(k,t_1)}{\Delta(k,t_1)}\varphi_{jk}, \quad q=\overline{1,n},$$

де $\Delta_{jq}(k,t_1)$, $j,q=\overline{1,n}$, — алгебраїчне доповнення елемента $\int_0^{t_1} t^{j-1}f_q(t,k)dt$ у визначнику $\Delta(k,t_1)$. Таким чином, задача (18) має єдиний розв'язок

$$u_k(t)=\sum_{j,q=1}^{n}\tfrac{\Delta_{jq}(k,t_1)}{\Delta(k,t_1)}f_q(t,k)\varphi_{jk}. \tag{20}$$

Доведемо, що ряд $u(t,x)\equiv\displaystyle\sum_{|k|\geq 0}\exp(ik,x)\sum_{j,q=1}^{n}\frac{\Delta_{jq}(k,t_1)}{\Delta(k,t_1)}f_q(t,k)\varphi_{jk}$ належить до простору $C^n([0,T];W^{\gamma_0}_{\alpha_0,\beta_0})$.

Для функцій $f_q(t,k)$, $q=\overline{1,n}$, та їхніх похідних правильні зображення у вигляді контурних інтегралів (див. с. 162 у [31]):

$$f_q^{(j-1)}(t,k)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_k}\frac{\lambda^{j-1}S_q(\lambda,k)\exp(\lambda t)}{L(\lambda,k)}d\lambda, j,q=\overline{1,n}, \ \ k\in\mathbb{Z}^p, \tag{21}$$

де $S_q(\lambda,k)=\lambda^{n-q}+A_{n-1}(k)\lambda^{n-q-1}+\ldots+A_q(k)$, $q=\overline{1,n-1}$, $S_n(\lambda,k)\equiv 1$, Γ_k — межа області $\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|<\Lambda(1+|k|^{\gamma_0})+1,-\Lambda_2(1+|k|^{\gamma_0})-1<\mathrm{Re}\lambda<\Lambda_1(1+|k|^{\gamma_0})+1\}$, а обхід контура Γ_k здійснюється проти годинникової стрілки. На контурі Γ_k виконуються нерівності

$$|S_q(\lambda,k)|_{|\lambda\in\Gamma_k} \le C_9(1+|k|)^{\gamma_0(n-q)}, \quad q=\overline{1,n}, \quad |\exp(\lambda t)|_{|\lambda\in\Gamma_k} \le \exp((\Lambda_1(1+|k|^{\gamma_0})+1)T).$$

Оскільки відстань від контура Γ_k до коренів $\lambda_1(k),\dots,\lambda_{m(k)}(k)$ не менша від 1, то

$$|L(\lambda,k)|_{|\lambda\in\Gamma_k} = |(\lambda-\lambda_1(k))\cdot\ldots\cdot(\lambda-\lambda_{m(k)}(k))|_{|\lambda\in\Gamma_k} \ge 1,$$

Враховуючи, що довжина контура Γ_k не перевищує $2\pi(\Lambda(1+|k|^{\gamma_0})+1)$, із формул (21) дістанемо оцінки

$$\max\nolimits_{t\in[0,T]}\left|f_q^{(j-1)}(t,k)\right| \le C_{10}(1+|k|)^{\gamma_0(n+j-q)}\exp(\Lambda_1 T|k|^{\gamma_0}), \quad j,q=\overline{1,n}. \tag{22}$$

Із формул (22) випливає, що

$$\left|\Delta_{jq}(k,t_1)\right| \le C_{11}(1+|k|)^{\gamma_0((n-2)(n+1)/2+q)}\exp((n-1)\Lambda_1 T|k|^{\gamma_0}), \quad j,q=\overline{1,n}. \tag{23}$$

За умовою теореми межа t_1 є $(\omega,\delta;\gamma_0)$–нормальною, тому з нерівностей (22), (23) та формул (20) дістаємо, що

$$\max_{t\in[0,T]}|u_k^{(q)}(t)| \le C_{12}\sum_{j=1}^{n}|\varphi_{jk}|(1+|k|)^{\omega+\gamma_0\frac{n(n+3)}{2}}\exp((\delta+n\Lambda_1 T)|k|^{\gamma_0}), \quad q=\overline{0,n}. \tag{24}$$

З нерівності (24) випливає, що

$$\left\|u(t,x);C^n([0,T];W^{\gamma_0}_{\alpha_0,\beta_0})\right\| \le C_{13}\sum_{q=0}^{n}\Big(\sum_{|k|\ge 0}\max_{t\in[0,T]}|u_k^{(q)}(t)|^2(1+|k|)^{2\alpha_0}\exp(2\beta|k|^{\gamma_0})\Big)^{1/2} \le$$

$$\le C_{14}\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{|k|\ge 0}|\varphi_{jk}|^2(1+|k|)^{2\alpha_0+2\omega+\gamma_0 n(n+3)}\exp(2(\beta_0+\delta+n\Lambda_1 T)|k|^{\gamma_0})\Big)^{1/2} =$$

$$= C_{14}\sum_{j=1}^{n}\left\|\varphi_j(x);W^{\gamma_0}_{\alpha_0+\omega+\gamma_0\frac{n(n+3)}{2},\beta_0+\delta+n\Lambda_1 T}\right\| < \infty,$$

тобто ряд $u(t,x)$ належить до простору $C^n([0,T];W^{\gamma_0}_{\alpha_0,\beta_0})$ і для нього виконується нерівність (9). Перевірка умов (7), (8) для ряду $u(t,x)$ є очевидною. Теорему доведено. □

Теорему 2.1 можна уточнити для випадку, коли диференціальний вираз $L(\partial/\partial t,D_x)$ допускає факторизацію вигляду (10), у якій диференціальний вираз $B(D_x)$ порядку γ_1 є таким, що модуль $|B(k)|$, $k\in\mathbb{Z}^p$, його символа зростає при $|k|\to\infty$ не повільніше, ніж $|k|^{\gamma_1}$. У цьому випадку відстань між різними λ-коренями многочлена $L(\lambda,k)$ зростає при $|k|\to\infty$ не повільніше, ніж $|k|^{\gamma_1}$.

Теорема 2.2. *Нехай диференціальний вираз* $L(\partial/\partial t,D_x)$ *у рівнянні* (1) *має вигляд* (10), *де* $\mu_j\in\mathbb{C}$, $j=\overline{1,n}$, $\mu_j\ne\mu_q$, $j\ne q$, *а диференціальний вираз* $B(D_x)$ *є таким, що для всіх* $k\in\mathbb{Z}^p$ *виконуються нерівності* $b_1|k|^{\gamma_1}\le|B(k)|\le b_2(1+|k|^{\gamma_1})$, $\quad b_1,b_2>0$. *Якщо межа* t_1 *є* $(\omega,\delta;\gamma_1)$*–нормальною, то для довільних* $\alpha_0,\beta_0\in\mathbb{R}$ *задача* (1), (2) *є* $(\alpha_0,\beta_0;\alpha,\beta;\gamma_1)$*–коректною, де* $\alpha=\alpha_0+\omega-\gamma_1\frac{n(n-3)}{2}$, $\beta=\beta_0+\delta+(n-1)M_1t_1+M_1T$,

$$M_1=\max\left\{0;\max_{1\le j\le n}\sup_{k\in\mathbb{Z}^p}\frac{\operatorname{Re}\mu_j B(k)}{1+|k|^{\gamma_1}}\right\}.$$

Доведення. Доведення теореми 2.2 проводиться за схемою доведення теореми 2.1 із такими змінами. Замість зображень (21) слід використати зображення

$$f_q^{(j-1)}(t,k) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{G_k} \frac{\lambda^{j-1} S_q(\lambda,k)\exp(\lambda t)}{L(\lambda,k)} d\lambda, \quad j,q=\overline{1,n}, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{25}$$

де G_k — межа області $\bigcup\limits_{j=1}^{n} \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \mu_j B(k)| < r\}$, $r = \frac{1}{2}\min\limits_{j\neq q}|\mu_j - \mu_q|$, орієнтована проти годинникової стрілки. Зауважимо, що зображення (25) можна отримати із зображень (21) шляхом деформації контура інтегрування на основі інтегральної теореми Коші. Якщо вираз $L\big(\partial/\partial t, D_x\big)$ має вигляд, описаний в теоремі 2.2, то на контурі G_k виконуються нерівності

$$|S_q(\lambda,k)|_{|\lambda\in G_k} \le C_{15}(1+|k|)^{\gamma_1(n-q)}, \ q=\overline{1,n}, \quad |L(\lambda,k)|_{|\lambda\in G_k} \ge C_{16}(1+|k|)^{\gamma_1(n-1)},$$

$$|\exp(\lambda t)|_{|\lambda\in G_k} \le \exp((M_1(1+|k|^{\gamma_1})+1)T).$$

Оскільки довжина контура G_k не перевищує $2\pi r n$, то з формул (25) дістанемо оцінки

$$\max\nolimits_{t\in[0,T]} \left|f_q^{(j-1)}(t,k)\right| \le C_{17}(1+|k|)^{\gamma_1(j-q)} \exp(M_1 T|k|^{\gamma_1}), \quad j,q=\overline{1,n},$$

та оцінки

$$\left|\Delta_{jq}(k,t_1)\right| \le C_{18}(1+|k|)^{\gamma_1(q-1-n(n-1)/2)} \exp((n-1)M_1 t_1 |k|^{\gamma_1}), \quad j,q=\overline{1,n},$$

які слід використати замість оцінок (22), (23). □

З оцінок (15), (16) випливають такі наслідки про коректність інтегральної задачі для факторизованих рівнянь.

Наслідок 2.1. *Нехай диференціальний вираз $L(\partial/\partial t, D_x)$ у рівнянні* (1) *має вигляд* (10)*, де $\mu_j \in \mathbb{R}$, $j=\overline{1,n}$, $\mu_j \neq \mu_q$, $j\neq q$, а вираз $B(D_x)$ є таким, що $B(k)\in\mathbb{R}$ для всіх $k\in\mathbb{Z}^p$ і*

$$b_1|k|^{\gamma_1} \le B(k) \le b_2(1+|k|^{\gamma_1}), \quad b_1,b_2>0.$$

Якщо $\mu_j<0$ для всіх $j=\overline{1,n}$, то для довільних $\alpha_0,\beta_0\in\mathbb{R}$ задача (1), (2) *є $\big(\alpha_0,\beta_0;\alpha_0+2n\gamma_1,\beta_0;\gamma_1\big)$–коректною. Якщо $\mu_j>0$ для всіх $j=\overline{1,n}$, то для довільних $\alpha_0,\beta_0\in\mathbb{R}$ задача* (1), (2) *є $\big(\alpha_0,\beta_0;\alpha_0+(n+1)\gamma_1,\beta_0-b_1\mu t_1+(n-1)\nu b_2 t_1+\nu b_2 T;\gamma_1\big)$–коректною, де $\nu=\max_{1\le j\le n}\mu_j$, $\mu=\mu_1+\ldots+\mu_n$.*

Із теорем 2.1, 2.2 випливають наступні наслідки про коректність інтегральної задачі для гіперболічних рівнянь у соболєвських просторах.

Наслідок 2.2. *Якщо рівняння* (1) *— гіперболічне (тобто $\operatorname{Re}\lambda_j(k)=0$ для всіх $j=\overline{1,s(k)}$, $k\in\mathbb{Z}^p$), а верхня межа інтегрування в умовах* (2) *є $(\omega,0;\gamma_1)$–нормальною, то для довільних $\alpha_0,\beta_0\in\mathbb{R}$ задача* (1), (2) *є $\big(\alpha_0,0;\alpha_0+\omega+\gamma_1\frac{n(n+3)}{2},0;\gamma_1\big)$–коректною.*

Наслідок 2.3. *Нехай диференціальний вираз $L(\partial/\partial t, D_x)$ у рівнянні* (1) *має вигляд* (10)*, де $\mu_j\in\mathbb{R}$, $j=\overline{1,n}$, $\mu_j\neq\mu_q$, $j\neq q$, а вираз $B(D_x)$ є таким, що $\operatorname{Re}B(k)=0$ для всіх $k\in\mathbb{Z}^p$ і*

$$b_1|k|^{\gamma_1} \le |B(k)| \le b_2(1+|k|^{\gamma_1}), \quad b_1,b_2>0.$$

Якщо верхня межа інтегрування в умовах (2) *є $(\omega,0;\gamma_1)$–нормальною, то для довільних $\alpha_0,\beta_0\in\mathbb{R}$ задача* (1), (2) *є $\big(\alpha_0,0;\alpha_0+\omega-\gamma_1\frac{n(n-3)}{2},0;\gamma_1\big)$–коректною.*

Встановимо тепер, що інтегральна задача з умовами (2) є сильно коректною на додатній півосі $(0,+\infty)$ для певних класів параболічних рівнянь та сильно коректною на $(0,T)$ для певних класів антипараболічних рівнянь.

Теорема 2.3. *Нехай диференціальний вираз $L(\partial/\partial t, D_x)$ у рівнянні (1) має вигляд (10), де $\mu_j \in \mathbb{R}$, $j=\overline{1,n}$, $\mu_j \neq \mu_q$, $j\neq q$, а вираз $B(D_x)$ є таким, що $B(k)\geq 0$ для всіх $k\in\mathbb{Z}^p$ і*

$$b_1|k|^{\gamma_1} \leq B(k) \leq b_2(1+|k|^{\gamma_1}), \quad b_1,b_2>0.$$

Якщо $\mu_j<0$ для всіх $j=\overline{1,n}$, то на проміжку $(0,+\infty)$ задача (1), (2) є $\big(\nu b_1 t;\gamma_1\big)$–сильно коректною, де $\nu=\min\limits_{1\leq j\leq n}|\mu_j|$.

Доведення. Легко перевірити, що для кожного $k\in\mathbb{Z}^p$ функція

$$v_k(t)=\sum_{j,q=1}^{n}\tfrac{\delta_{jq}(k,t_1)}{\Delta_1(k,t_1)}h_q(t,k)\varphi_{jk} \tag{26}$$

є єдиним (з огляду на твердження теореми 1.1) розв'язком задачі (18). Тут $\delta_{jq}(k,t_1)$ — алгебраїчне доповнення елемента $\int_0^{t_1} t^{j-1}h_q(t,k)dt$, $j,q=\overline{1,n}$, у визначнику $\Delta_1(k,t_1)$. Зауважимо, що з умов теореми 2.3 та леми 1.2 випливає, що правильними є оцінки

$$\forall\, t\in(0,T)\quad \exp(\mu_q B(k)t)\leq \exp(-\nu b_1 t|k|^{\gamma_1}), \quad q=\overline{1,n}, \tag{27}$$

$$\big|\delta_{jq}(k,t_1)\big| \leq C_{19}(1+|k|)^{\gamma_1(j-\frac{n(n+1)}{2})}, \quad j,q=\overline{1,n}. \tag{28}$$

Тоді з формули (26) на основі нерівностей (15), (27), (28) випливає, що в кожній точці $t\in(0,T)$ для функції $v_k(t)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, та її похідних до порядку n включно виконуються нерівності

$$|v_k^{(r)}(t)| \leq C_{20}\sum_{j=1}^{n}|\varphi_{jk}|(1+|k|)^{2n\gamma_1}\exp(-\nu b_1 t|k|^{\gamma_1}), \quad r=\overline{0,n}. \tag{29}$$

Оскільки для всіх $\varepsilon, t>0$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $m\in\mathbb{N}$ і для всіх $k\in\mathbb{Z}^p$ справджуються нерівності

$$(1+|k|)^{m+2n\gamma_1-\alpha}\leq C_{21}\exp(\nu b_1 t|k|^{\gamma_1}), \quad C_{21}=C_{21}(m,n,t,\nu,b_1,\gamma_1,\alpha),$$

$$(1+|k|)^{m+2n\gamma_1-\alpha}\leq C_{22}\exp(\varepsilon|k|^{\gamma_1}), \quad C_{22}=C_{22}(m,n,\varepsilon,\gamma_1,\alpha),$$

то з оцінок (29) випливає, що ряд $v(t,x)\equiv\sum\limits_{|k|\geq 0} v_k(t)\exp(ik,x)$ належить до простору $C^n((0,T);W^{\gamma_1}_{+\infty,\beta})$, якщо $\varphi_j(x)\in W^{\gamma_1}_{\alpha,\beta}$, $j=\overline{1,n}$, і, крім того, для похідних $\partial^r v(t,x)/\partial t^r$, $r=\overline{0,n}$, цього ряду отримуємо, що

$$\big\|\partial^r v(t,x)/\partial t^r; W^{\gamma_1}_{m,\beta+\nu b_1 t-\varepsilon}\big\| = \Big(\sum_{|k|\geq 0}|v_k^{(r)}(t)|^2(1+|k|)^{2m}\exp(2(\beta+\nu b_1 t-\varepsilon)|k|^{\gamma_1})\Big)^{1/2}\leq$$

$$\leq C_{23}\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{|k|\geq 0}|\varphi_{jk}|^2(1+|k|)^{2\alpha}\exp(2\beta|k|^{\gamma_1})\Big)^{1/2} = C_{23}\sum_{j=1}^{n}\big\|\varphi_j(x);W^{\gamma_1}_{\alpha,\beta}\big\|<\infty,$$

де $C_{23}=C_{23}(\alpha,\varepsilon,t,t_1,m,n,\gamma)$, тобто для функції $v(t,x)$ виконуються умови 2), 3) з означення 1.2. Перевірка умови 1) означення 1.2 є очевидною. $\square$

Теорема 2.4. *Нехай диференціальний вираз* $L(\partial/\partial t, D_x)$ *у рівнянні* (1) *має вигляд* (10), *де* $\mu_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,n}$, $\mu_j \neq \mu_q$, $j \neq q$, *а вираз* $B(D_x)$ *є таким, що* $B(k) \geq 0$ *для всіх* $k \in \mathbb{Z}^p$ *і*

$$b_1|k|^{\gamma_1} \leq B(k) \leq b_2(1 + |k|^{\gamma_1}), \ \ b_1, b_2 > 0.$$

Якщо $\mu_j > 0$, $j = \overline{1,n}$, *то на* $(0,T)$ *задача* (1), (2), *у якій* $t_1 = T$, *є* $\big(\nu b_1(T-t); \gamma_1\big)$*–сильно коректною, де* $\nu = \min\limits_{1\leq j\leq n} \mu_j$.

Доведення теореми проводиться аналогічно до доведення попередньої теореми.

§3. Покриття та оцінка мір проміжків покриття виняткових множин гладких функцій. Для заданої на відрізку $[a,b]$ функції $f(t)$ через $E(f,\varepsilon,[a,b])$ позначатимемо множину $\{t \in [a,b] : |f(t)| \leq \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$. Множину $E(f,\varepsilon,[a,b])$ називатимемо „ε– винятковою" для функції $f(t)$ на відрізку $[a,b]$. Проміжком називаємо множину одного з таких виглядів: $[\alpha,\beta]$, $[\alpha,\beta)$, $(\alpha,\beta]$, (α,β), де $\alpha < \beta$.

Наступна лема описує покриття та оцінку довжин проміжків покриття „ε–виняткової" множини $E(f,\varepsilon,[a,b])$ для гладкої дійснозначної функції $f(t)$, деяка похідна якої не перетворюється в нуль на відрізку $[a,b]$.

Лема 3.1. *Нехай* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *— така дійснозначна функція, що* $f \in C^n[a,b]$ *і для всіх* $t \in [a,b]$ *виконується нерівність* $|f^{(n)}(t)| > \delta$, $\delta > 0$. *Тоді для довільного* $\varepsilon > 0$ *множину* $E(f,\varepsilon,[a,b])$ *можна покрити не більш ніж* $(2^n - 1)$ *проміжками, довжина кожного з яких не перевищує* $2\big(\varepsilon/\delta\big)^{1/n}$.

Доведення. Використаємо метод математичної індукції за n. Якщо $|f'(t)| > \delta > 0$ для всіх $t \in [a,b]$, то функція $f(t)$ строго монотонна на $[a,b]$. Тому множина $E(f,\varepsilon,[a,b])$ або порожня, або є точкою, або є відрізком $[\alpha,\beta]$, $a \leq \alpha < \beta \leq b$. У перших двох випадках твердження леми 3.1 є очевидним. В останньому випадку за теоремою Лагранжа знайдеться така точка $\xi \in (\alpha,\beta)$, що $f(\beta) - f(\alpha) = f'(\xi)(\beta - \alpha)$. Оскільки $\alpha, \beta \in E(f,\varepsilon,[a,b])$, то $|f(\alpha)| \leq \varepsilon$, $|f(\beta)| \leq \varepsilon$, і, отже,

$$|\beta - \alpha| = \tfrac{|f(\beta) - f(\alpha)|}{|f'(\xi)|} \leq \tfrac{2\varepsilon}{\delta}.$$

Базу індукції встановлено.

Припустимо, що лема 3.1 встановлена для заданого натурального $n \geq 2$ і довільної дійснозначної функції $f(t) \in C^n[a,b]$ (заданої на довільному відрізку $[a,b]$) такої, що $|f^{(n)}(t)| > \delta > 0$ для всіх $t \in [a,b]$.

Розглянемо таку дійснозначну функцію $g(t) \in C^{n+1}[a,b]$, що $|g^{(n+1)}(t)| > \delta > 0$ для всіх $t \in [a,b]$. Множину $E(g,\varepsilon,[a,b])$ покриємо двома множинами:

$$E(g,\varepsilon,[a,b]) \subset \{t \in [a,b] : |g^{(n)}(t)| \leq \eta\} \cup \{t \in [a,b] : |g(t)| \leq \varepsilon, |g^{(n)}(t)| > \eta\}, \tag{30}$$

де $\eta = \delta\big(\varepsilon/\delta\big)^{1/(n+1)}$. Оскільки функція $g^{(n)}(t)$ строго монотонна на $[a,b]$, то множина $\{t \in [a,b] : |g^{(n)}(t)| \leq \eta\}$ або порожня, або складається лише з одного відрізка I_1 (який, можливо, вироджується в точку), а множина $\{t \in [a,b] : |g^{(n)}(t)| > \eta\}$ або порожня, або складається щонайбільше з двох неперетинних проміжків I_2, I_3 (один з яких, можливо, є порожнім). Таким чином, або $\{t \in [a,b] : |g^{(n)}(t)| \leq \eta\} = \varnothing$, або $\{t \in [a,b] : |g^{(n)}(t)| \leq \eta\} = E(g^{(n)}, \eta, I_1)$. Аналогічно, або $\{t \in [a,b] : |g(t)| \leq \varepsilon, |g^{(n)}(t)| > \eta\} = \varnothing$, або $\{t \in [a,b] : |g(t)| \leq \varepsilon, |g^{(n)}(t)| > \eta\} = E(g,\varepsilon,I_2) \cup E(g,\varepsilon,I_3) \subset E(g,\varepsilon,\overline{I}_2) \cup E(g,\varepsilon,\overline{I}_3)$, де відрізки $\overline{I}_2, \overline{I}_3$– замикання проміжків I_2, I_3.

На відрізку I_1 виконується нерівність $|g^{(n+1)}(t)| > \delta$, тому з істинності леми 3.1 при $n = 1$ випливає, що множину $E(g^{(n)}, \eta, I_1)$ можна покрити одним проміжком, довжина якого не перевищує $2\eta/\delta = 2\big(\varepsilon/\delta\big)^{1/(n+1)}$.

На відрізках $\overline{I}_2$, $\overline{I}_3$ виконується нерівність $|g^{(n)}(t)| > \eta$. За припущенням індукції кожну з множин $E(g,\varepsilon,\overline{I}_2)$, $E(g,\varepsilon,\overline{I}_3)$ можна покрити не більш ніж (2^n-1) проміжками, довжина кожного з яких не перевищує $2\big(\varepsilon/\eta\big)^{1/n} = 2\big(\varepsilon/\delta\big)^{1/(n+1)}$.

Враховуючи включення (30), дістаємо покриття множини $E(g,\varepsilon,[a,b])$ не більш ніж $(2^{n+1}-1)$ проміжками довжини не більшої від $2\big(\varepsilon/\delta\big)^{1/(n+1)}$. $\square$

Зауваження 3.1. Якщо $g(t)$ — многочлен n-го степеня вигляду

$$g(t) = a(t-\tau_1)\cdot\ldots\cdot(t-\tau_n), \quad a \neq 0,$$

з різними коренями $\tau_j \in [0,T]$, $j=\overline{1,n}$, то для міри множини $E(g,\varepsilon,[0,T])$ можна дати точнішу оцінку, ніж у лемі 3.1. На це вказують такі міркування. Якщо точка $t \in [0,T]$ є такою, що $|t-\tau_j| > \big(\varepsilon/|a|\big)^{1/n}$ для кожного j, $j=\overline{1,n}$, то $|g(t)| > \varepsilon$. У цьому випадку множину $E(g,\varepsilon,[0,T])$ можна покрити n відрізками $\{t\in[0,T] : |t-\tau_j| \leq \big(\varepsilon/|a|\big)^{1/n}\}$, $j=\overline{1,n}$, довжина кожного з яких не перевищує $2\big(\varepsilon/|a|\big)^{1/n}$.

Зауваження 3.2. Якщо функція $f(t)$ справджує умови леми 3.1, то для довільного $\varepsilon > 0$ оцінка $|f(t)| > \varepsilon$ виконується на всьому відрізку $[a,b]$ за винятком не більш ніж (2^n-1) проміжків, довжина кожного з яких не перевищує $2\big(\varepsilon/\delta\big)^{1/n}$. Таке еквівалентне формулювання леми 3.1 пояснює вибір назви терміну „ε–виняткової" множини гладкої функції.

Нижче будемо розглядати квазімногочлени $Q(t)$ вигляду

$$Q(t) = \sum_{j=1}^{m} \exp(\mu_j t) p_j(t), \tag{31}$$

де $\mu_j \in \mathbb{C}$, $j=\overline{1,m}$, $\mu_j \neq \mu_r$, $j\neq r$, а $p_j(t)$ — многочлени з комплексними коефіцієнтами степенів (n_j-1), $j=\overline{1,m}$, відповідно. Для квазімногочлена $Q(t)$ будемо позначати: $n = n_1+\ldots+n_m$, $B_Q = 1+\max\limits_{1\leq j\leq m}|\mu_j|$, $M_Q = \min\limits_{1\leq j\leq m}\operatorname{Re}\mu_j$, $\psi_Q = \max\limits_{t\in[0,T]}\exp(-M_Q t)$, $G_Q(t) = \max\limits_{1\leq j\leq n}\big\{|Q^{(j-1)}(t)|B_Q^{-j}\big\}$.

Теорема 3.1. *Існують такі додатні сталі C_{24}, C_{25} (які залежать тільки від n,T), що для довільного квазімногочлена $Q(t)$ вигляду (31), довільного $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 = \frac{C_{24}G_Q(0)}{2\psi_Q B_Q^{n-1}}$, множину $E(Q,\varepsilon,[0,T])$ можна покрити не більш ніж $C_{25}B_Q$ проміжками, довжина кожного з яких не перевищує $2\Big(\frac{2\varepsilon\psi_Q}{C_{24}G_Q(0)}\Big)^{1/(n-1)}$.*

Доведення. У доведенні леми з роботи [20] встановлено, що існує така стала C_{24} (яка залежить тільки від n,T), що в кожній точці $t\in[0,T]$ виконується нерівність

$$G_Q(t) \geq \frac{C_{24}G_Q(0)}{B_Q^n \psi_Q} \equiv \eta. \tag{32}$$

Розглянемо функції

$$y_j(t) = \operatorname{Re} Q^{(j-1)}(t)/B_Q^j,\ j=\overline{1,n}, \quad y_{n+j}(t) = \operatorname{Im} Q^{(j-1)}(t)/B_Q^j, \quad j=\overline{1,n}.$$

Легко перевірити, що функції $z_{jq}^{\pm}(t) = y_j(t) \pm y_q(t)$, $1\leq j < q \leq 2n$, є розв'язками звичайного диференціального рівняння

$$\prod_{j=1}^{m}\Big(\frac{d^2}{dt^2} - 2\operatorname{Re}\mu_j\frac{d}{dt} + |\mu_j|^2\Big)^{n_j} y(t) = 0. \tag{33}$$

Оскільки $|\mu_j| < B_Q$, $j = \overline{1,m}$, то з теореми Вієта випливає, що модуль коефіцієнта при похідній $y^{(j)}(t)$, $j = \overline{1,2n}$, у рівнянні (33) не перевищує $C_{26}B_Q^{2n-j}$, $C_{26} = C_{26}(n)$. За теоремою Валле Пуссена (див. с. 157 у [19]) існує таке $h_0 = h_0(n, C_{26})$, що кожний нетривіальний розв'язок рівняння (33) має не більше $(2n-1)$ нулів на будь-якому проміжку, довжина якого не перевищує h_0/B_Q. Розіб'ємо $[0,T]$ на відрізки $I_j = [\xi_{j-1}, \xi_j]$ так, що $\operatorname{mes} I_j \le h_0/B_Q$, $1 \le j \le [B_Q T/h_0] + 1 = K$. Тоді на кожному з відрізків I_r функції $z_{jq}^{\pm}(t)$ або тотожно дорівнюють нулеві, або ж мають на ньому $K_{jq}^{\pm}(r)$ нулів $t_{jqr}^{\pm}(1), \ldots, t_{jqr}^{\pm}(K_{jq}^{\pm}(r))$, де $K_{jq}^{\pm}(r) \le 2n-1$.

Нехай $J = \{J_r, r = \overline{1,M}\}$ — розбиття відрізка $[0,T]$ на відрізки J_r, утворене точками ξ_j, $j = \overline{1,K}$, та точками $t_{jqr}^{\pm}(s)$, $s = \overline{1, K_{jq}^{\pm}(r)}$, $r = \overline{1,K}$, $1 \le j < q \le 2n$. Для кількості M відрізків розбиття J виконується нерівність $M \le C_{27}B_Q$, $C_{27} = C_{27}(n,T)$. Згідно з побудовою розбиття $J = \{J_r, r = \overline{1,M}\}$, кожна з функцій $z_{jq}^{\pm}(t,k) = y_j(t,k) \pm y_q(t,k)$, $1 \le j < q \le 2n$, не може набувати на відрізку J_r значень різних знаків. Тому на кожному з відрізків J_r для довільних j, q виконується нерівність $|y_j(t)| \ge |y_q(t)|$, $t \in J_r$, або ж нерівність $|y_q(t)| \ge |y_j(t)|$, $t \in J_r$. Звідси отримуємо, що для кожного r, $1 \le r \le M$, знайдеться таке $q(r)$, $1 \le q(r) \le 2n$, що в кожній точці $t \in J_r$ справджується рівність $|y_{q(r)}(t)| = \max\limits_{1\le j\le 2n} |y_j(t)|$. Оскільки $|Q^{(j-1)}(t)|B_Q^{-j} \le 2\max\{|y_j(t)|, |y_{n+j}(t)|\}$, то з нерівності (32) випливає, що на кожному відрізку J_r, $r = \overline{1,M}$, виконується нерівність

$$|y_{q(r)}(t)| \ge \eta/2, \quad t \in J_r,$$

тобто

$$|\operatorname{Re} Q^{(q(r)-1)}(t)| \ge \eta B_Q^{q(r)}/2, \quad t \in J_r, \tag{34}$$

якщо $1 \le q(r) \le n$, або

$$|\operatorname{Im} Q^{(q(r)-n-1)}(t)| \ge \eta B_Q^{q(r)-n}/2, \quad t \in J_r, \tag{35}$$

якщо $n+1 \le q(r) \le 2n$. Зауважимо, що $E(Q,\varepsilon,J_r) \subset E(\operatorname{Re} Q,\varepsilon,J_r)$, $E(Q,\varepsilon,J_r) \subset E(\operatorname{Im} Q,\varepsilon,J_r)$. Тому з нерівностей (34), (35) випливає, що при $\varepsilon < \varepsilon_0, \varepsilon_0 = \eta B_Q/2$, множина $E(Q,\varepsilon,J_r)$ є порожньою, якщо $q(r) = 1$ або $q(r) = n+1$. Якщо ж $2 \le q(r) \le n$, то на основі твердження леми 3.1 з нерівностей (34), (35) випливає, що при $\varepsilon < \varepsilon_0, \varepsilon_0 = \eta B_Q/2$, множину $E(\operatorname{Re} Q,\varepsilon,J_r)$ можна покрити не більш ніж $(2^{q(r)-1}-1) \le (2^{n-1}-1)$ проміжками, довжина кожного з яких не перевищує

$$2\Big(\frac{2\varepsilon}{\eta B_Q^{q(r)}}\Big)^{\frac{1}{q(r)-1}} = 2\frac{1}{B_Q}\Big(\frac{2\varepsilon}{\eta B_Q}\Big)^{\frac{1}{q(r)-1}} \le 2\frac{1}{B_Q}\Big(\frac{2\varepsilon}{\eta B_Q}\Big)^{\frac{1}{n-1}} = 2\Big(\frac{2\varepsilon\psi_Q}{C_{24}G_Q(0)}\Big)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Аналогічно, якщо $n+2 \le q(r) \le 2n$, то на основі твердження леми 3.1 з нерівностей (34), (35) випливає, що при $\varepsilon < \varepsilon_0, \varepsilon_0 = \eta B_Q/2$, множину $E(\operatorname{Im} Q,\varepsilon,J_r)$ можна покрити не більш ніж $(2^{q(r)-n-1}-1) \le (2^{n-1}-1)$ проміжками, довжина кожного з яких не перевищує

$$2\Big(\frac{2\varepsilon}{\eta B_Q^{q(r)-n}}\Big)^{\frac{1}{q(r)-n-1}} = 2\frac{1}{B_Q}\Big(\frac{2\varepsilon}{\eta B_Q}\Big)^{\frac{1}{q(r)-n-1}} \le 2\frac{1}{B_Q}\Big(\frac{2\varepsilon}{\eta B_Q}\Big)^{\frac{1}{n-1}} = 2\Big(\frac{2\varepsilon\psi_Q}{C_{24}G_Q(0)}\Big)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Залишається врахувати, що кількість проміжків покриття множини $E(Q,\varepsilon,[0,T])$ не перевищує $(2^{n-1}-1)M \le C_{28}B_Q$. □

Теорема 3.2. *Нехай $Q(t)$ — дійснозначний квазімногочлен вигляду (31), де $\mu_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, m}$, $\mu_j \neq \mu_r$, $j \neq r$, а $p_j(t)$ — многочлени з дійсними коефіцієнтами степенів $(n_j - 1)$, $j = \overline{1, m}$, відповідно. Існують такі додатні сталі C_{29}, C_{30} (які залежать тільки від n, T), що для довільного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 = \frac{C_{29} G_Q(0)}{\psi_Q B_Q^{n-1}}$, множину $E(Q, \varepsilon, [0, T])$ можна покрити не більш ніж C_{30} проміжками, довжина кожного з яких не перевищує $2\Big(\frac{\varepsilon \psi_Q}{C_{29} G_Q(0)}\Big)^{1/(n-1)}$.*

Доведення. Розглянемо функції

$$y_j(t) = Q^{(j-1)}(t)/B_Q^j, \ \ j = \overline{1, n}, \quad z_{jq}^{\pm}(t) = y_j(t) \pm y_q(t), \ \ 1 \leq j < q \leq n.$$

Оскільки $z_{jq}^{\pm}(t), 1 \leq j < q \leq n,$ — дійснозначні квазімногочлени, то на основі твердження задачі 75 (див. [15], Ч. 2, с. 58) на відрізку $[0, T]$ кожна функція $z_{jq}^{\pm}(t)$ може мати не більше, ніж $(n-1)$ нулів $\tau_{jq}^{\pm}(1), \ldots, \tau_{jq}^{\pm}(K_{jq}^{\pm})$, $\quad K_{jq}^{\pm} \leq n - 1$.

Нехай $J = \{J_r, r = \overline{1, M}\}$ — розбиття відрізка $[0, T]$ на відрізки J_r, утворене точками $\tau_{jq}^{\pm}(s)$, $s = \overline{1, K_{jq}^{\pm}}$, $1 \leq j < q \leq n$. Зрозуміло, що $M \leq n(n-1)^2/2 + 1$. Як і при доведенні попередньої теореми, легко перевірити, що для кожного відрізка J_r цього розбиття існує таке $q(r)$, $1 \leq q(r) \leq n$, для якого

$$|Q^{(q(r)-1)}(t)| \geq \eta B_Q^{q(r)}, \quad t \in J_r, \tag{36}$$

З нерівностей (36) випливає, що при $\varepsilon < \varepsilon_0, \varepsilon_0 = \eta B_Q$, множина $E(Q, \varepsilon, J_r)$ є порожньою, якщо $q(r) = 1$. Якщо ж $2 \leq q(r) \leq n$, то на основі твердження леми 3.1 з нерівностей (36) випливає, що при $\varepsilon < \varepsilon_0$ множину $E(Q, \varepsilon, J_r)$ можна покрити не більш ніж $(2^{q(r)-1} - 1) \leq (2^{n-1} - 1)$ проміжками, довжина кожного з яких не перевищує

$$2\Big(\frac{\varepsilon}{\eta B_Q^{q(r)}}\Big)^{\frac{1}{q(r)-1}} = 2\frac{1}{B_Q}\Big(\frac{\varepsilon}{\eta B_Q}\Big)^{\frac{1}{q(r)-1}} \leq 2\frac{1}{B_Q}\Big(\frac{\varepsilon}{\eta B_Q}\Big)^{\frac{1}{n-1}} = 2\Big(\frac{\varepsilon \psi_Q}{C_{29} G_Q(0)}\Big)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Залишається врахувати, що кількість проміжків покриття множини $E(Q, \varepsilon, [0, T])$ не перевищує $(2^{n-1} - 1)M \leq (2^{n-1} - 1)(n(n-1)^2/2 + 1)$. □

Теорема 3.3. *Нехай $Q(t)$ — квазімногочлен вигляду (31), де $\mu_j = \mu \nu_j$, $\nu_j \neq \nu_r$, $j \neq r$, $\mu \in \mathbb{C}$, $|\mu| \geq 1$. Існують додатні сталі C_{31}, C_{32} (які залежать тільки від $n, T, \mu_1, \ldots, \mu_n$), що для довільного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 = \frac{C_{31} B_Q G_Q(0)}{2\psi_Q}$, множину $E(Q, \varepsilon, [0, T])$ можна покрити не більш ніж $C_{32} B_Q$ проміжками довжини не більшої від $2\Big(\frac{2\varepsilon \psi_Q}{C_{31} B_Q^n G_Q(0)}\Big)^{1/(n-1)}$.*

Доведення теореми 3.3 проводиться аналогічно до доведення теореми 3.1; при цьому замість нерівності (32) слід використати нерівність

$$G_Q(t) \geq C_{31} G_Q(0)/\psi_Q \equiv \eta, \tag{37}$$

яка є правильною для даного випадку.

Теорема 3.4. *Нехай $Q(t)$ — квазімногочлен вигляду (31), де $\mu_j = \mu \nu_j$, $\mu, \nu_j \in \mathbb{R}$, $\nu_j \neq \nu_r$, $j \neq r$, $|\mu| \geq 1$, а $p_j(t)$ — многочлени з дійсними коефіцієнтами степенів $(n_j - 1)$, $j = \overline{1, m}$, відповідно. Існують додатні сталі C_{33}, C_{34} (які залежать тільки від $n, T, \mu_1, \ldots, \mu_n$), що для довільного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 = \frac{C_{33} B_Q G_Q(0)}{\psi_Q}$, множину $E(Q, \varepsilon, [0, T])$ можна покрити не більш ніж C_{34} проміжками довжини не більшої від $2\Big(\frac{\varepsilon \psi_Q}{C_{33} B_Q^n G_Q(0)}\Big)^{1/(n-1)}$.*

Доведення теореми проводиться аналогічно до доведення теореми 3.2 із використанням нерівності (37).

Зауваження 3.3. Твердження про оцінки мір виняткових множин гладких функцій відіграють важливу роль у метричній теорії діофантових наближень [22] та при дослідженні проблеми малих знаменників у задачах математичної фізики [16]. Перший (відомий авторам статті) загальний результат, який стосується оцінки міри виняткових множин гладких функцій, належить А.С.Пяртлі [17]. У його роботі встановлено, що для дійсної функції $f(t) \in C^{n+1}[a,b]$, для якої в кожній точці $t \in [a,b]$ виконуються нерівності

$$\max_{1\le j\le n+1}|f^{(j)}(t)| \le M, \quad \max_{1\le j\le n}|f^{(j)}(t)| > \delta > 0,$$

правильною є наступна оцінка $\operatorname{mes}\{t \in [a,b] : |f(t)| < \varepsilon\} \le C_{35} M\delta^{-1}\big(\varepsilon/\delta\big)^{1/n}$, де стала C_{35} залежить тільки від n і $(b-a)$. Аналоги цитованого результату А. С. Пяртлі встановлено в роботах Е. І. Ковалевської, Н. В. Сакович [7, 8], де досліджено питання про оцінку мір виняткових множин аналітичних функцій комплексної змінної.

Узагальнення результату А. С. Пяртлі на випадок гладких функцій багатьох змінних доведені в роботах В. Бересневіча, В. Берніка, Д. Клейнбока, Г. Маргуліса [35, 36, 37], де, зокрема, встановлено, що для дійснозначної функції $f(y) \in C^n(B)$, усі найвищі частинні похідні якої за кожною із змінних $y_1, \dots, y_p$ обмежені знизу за модулем в p–вимірному кубі B $\forall y \in B \quad |\partial^n f(y)/\partial y_j^n| \ge \delta > 0, \quad j = \overline{1,p}$, виконується така нерівність для міри $\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^p}\{y \in B : |f(y)| < \varepsilon\} \le C_{36}\big(M/\delta\big)^{1/n}\big(\varepsilon/F\big)^{1/pn}$, де $M = \|f\|_{C^n(B)}$, $F = \|f\|_{C(B)}$, а стала C_{36} залежить тільки від n, p і об'єму куба $|B|$.

В.Ільків [6] показав, що вимогу про обмеженість знизу за модулем усіх найвищих частинних похідних за кожною із змінних $y_1, \dots, y_p$ можна замінити на слабшу вимогу про обмеженість знизу за модулем деякої частинної похідної функції $f(y)$, якщо відомий розподіл нулів похідних цієї функції; при цьому у роботі [6] для дійснозначної функції $f(y) \in C^n(B)$ такої, що $|\partial^n f(y)/(\partial y_1^{n_1} \dots \partial y_p^{n_p})| > \delta > 0$, встановлено оцінку

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^p}\{y \in B : |f(y)| < \varepsilon\} \le C_{37}\big(\varepsilon/\delta\big)^{1/n},$$

де стала C_{37} залежить від $n, n_1, \dots, n_p, p$, об'єму куба $|B|$ та кількості нулів похідних функції $f(y)$.

Другий автор цієї статті у роботі [21] дослідив питання про оцінку міри виняткової множини функції $f(t) \in C^n[a,b]$, яка в кожній точці відрізка $[a,b]$ справджує нерівність $\big|R(d/dt)f(t)\big| > \delta$, де диференціальний оператор $R(d/dt)$ розкладається на $[a,b]$ у композицію диференціальних операторів першого порядку з дійсними коефіцієнтами.

§4. Структура характеристичного визначника $\Delta(k,t_1)$. У цьому параграфі роботи з'ясуємо деякі структурні властивості визначника $\Delta(k,t_1)$.

Лема 4.1. *Для визначника $\Delta(k,t_1)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, виконуються такі рівності:*

$$\frac{\partial^q \Delta(k,t_1)}{\partial t_1^q}\bigg|_{t_1=0} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } 0 \le q < n^2, \\ C_{38}, & \text{якщо } q = n^2, \end{cases}$$

де $C_{38} = (n^2)! \prod_{i=1}^{n-1}(i!)^2 / \prod_{i=n}^{2n-1}(i!) \in \mathbb{N}$.

Доведення. Для визначника $\Delta(k,t_1)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, використаємо розвинення у вигляді суми $n!$ доданків певного знаку, кожен з яких є добутком n множників, взятих по одному з кожного стовпця і кожного рядка. Застосовуючи правило Лейбніца диференціювання добутку n функцій і згортаючи отримані суми, дістаємо

$$\frac{\partial^q \Delta(k,t_1)}{\partial t_1^q} = \sum_{\substack{q_1+\ldots+q_n=q,\\ q_1\geq 0,\ldots,q_n\geq 0}} \frac{q!}{q_1!\cdot\ldots\cdot q_n!} \det \left\| \frac{d^{q_i}}{dt_1^{q_i}} \int_0^{t_1} t^{j-1} f_i(t,k)dt \right\|_{i,j=1}^n. \tag{38}$$

При $t_1 = 0$ визначник $\left\| \frac{d^{q_i}}{dt_1^{q_i}} \int_0^{t_1} t^{j-1} f_i(t,k)dt \right\|_{i,j=1}^n$, очевидно, перетворюється в нуль, якщо хоча б одне серед чисел $q_1, \ldots, q_n$ дорівнює нулеві. Тому з рівності (38) випливає, що $\frac{\partial^q \Delta(k,t_1)}{\partial t_1^q}\Big|_{t_1=0} = 0$, якщо $0 \leq q < n$. Якщо ж $q \geq n$, то

$$\frac{\partial^q \Delta(k,t_1)}{\partial t_1^q}\Bigg|_{t_1=0} = \sum_{\substack{q_1+\ldots+q_n=q,\\ q_1\geq 1,\ldots,q_n\geq 1}} \frac{q!}{q_1!\cdot\ldots\cdot q_n!} \det \left\| \frac{d^{q_i}}{dt_1^{q_i}} \int_0^{t_1} t^{j-1} f_i(t,k)dt \right\|_{i,j=1}^n \Bigg|_{t_1=0}. \tag{39}$$

Оскільки для довільного $m \geq 1$ виконуються співвідношення

$$\frac{\partial^m}{\partial t_1^m} \int_0^{t_1} f_i(t,k) t^{j-1} dt = \sum_{\substack{r+s=m-1,\\ r\geq 0, s\geq 0}} \frac{(m-1)!}{r!s!} f_i^{(r)}(t_1,k) \left[t_1^{j-1}\right]^{(s)}, \quad i,j = \overline{1,n}, \tag{40}$$

то підставляючи вирази (40) у формулу (39), після елементарних перетворень при $q \geq n$ дістаємо рівність

$$\frac{\partial^q \Delta(k,t_1)}{\partial t_1^q}\Bigg|_{t_1=0} = \sum \prod_{i=1}^n \frac{q! f_i^{(s_i-1)}(0,k)}{(r_i+s_i-1)(r_i-1)!(s_i-1)!} \det \left\| [t_1^{j-1}]^{(r_i-1)} \right\|_{i,j=1}^n \Big|_{t_1=0}, \tag{41}$$

у якій підсумовування проводиться за всіма наборами натуральних чисел $s_1, \ldots, s_n$, $r_1, \ldots, r_n$, що задовольняють умову $\sum_{i=1}^n (s_i + r_i) = q + n$. Якщо $r_i \geq n+1$ для деякого $i \in \{1, \ldots, n\}$, або $r_i = r_j$ для $i \neq j$, то рядки матриці $\left\| [t_1^{j-1}]^{(r_i-1)} \right\|_{i,j=1}^n$ є лінійно залежними. Якщо ж $r_1, \ldots, r_n$ — перестановка чисел $1, \ldots, n$, то

$$\det \left\| [t_1^{j-1}]^{(r_i-1)} \right\|_{i,j=1}^n = (-1)^{\rho_\omega} \det \left\| [t_1^{j-1}]^{(i-1)} \right\|_{i,j=1}^n,$$

де ρ_ω — кількість інверсій у перестановці $\omega \in S_n$. Таким чином, справедлива формула

$$\det \left\| [t_1^{j-1}]^{(r_i-1)} \right\|_{i,j=1}^n \Big|_{t_1=0} = \begin{cases} 0, & \omega = (r_1, \ldots, r_n) \notin S_n, \\ (-1)^{\rho_\omega} \prod\limits_{i=1}^{n-1} i!, & \omega = (r_1, \ldots, r_n) \in S_n. \end{cases}$$

Отже, у сумі (41) нульовими є всі доданки, які відповідають наборам $(r_1, \ldots, r_n) \notin S_n$.

Якщо $(r_1, \ldots, r_n) \in S_n$, то $r_1 + \ldots + r_n = n(n+1)/2$, і тому з рівності $\sum_{i=1}^n (s_i + r_i) = q + n$ і нерівності $q < n^2$ випливає, що $s_i < i$ для деякого $i \in \{1, \ldots, n\}$. Дійсно, якщо $s_i \geq i$ для всіх $i = \overline{1,n}$, то виконуватиметься суперечлива нерівність $\sum_{i=1}^n s_i \geq n(n+1)/2$. Тоді, згідно з вибором фундаментальної системи, $f_i^{(s_i-1)}(0,k) = \delta_{s_i,i} = 0$. Отже, при $q < n^2$ сума (41) містить тільки нульові доданки, тобто $\frac{\partial^q \Delta(k,t_1)}{\partial t_1^q}\Big|_{t_1=0} = 0$ для всіх $0 \leq q < n^2$.

Нехай тепер $q = n^2$. Тоді в сумі (41) ненульовими будуть тільки ті доданки, які відповідають наборам додатних чисел $s_1, \ldots, s_n, r_1, \ldots, r_n$, таким, що $(r_1, \ldots, r_n) \in S_n$, $s_i = i$, $i = \overline{1,n}$. Отже,

$$\frac{\partial^{n^2} \Delta(k,t_1)}{\partial t_1^{n^2}}\Big|_{t_1=0} = (n^2)! \sum_{\omega=(r_1,\ldots,r_n)\in S_n} (-1)^{\rho_\omega} \prod_{i=1}^n \frac{1}{(i+r_i-1)(r_i-1)!}. \tag{42}$$

Враховуючи, що (див. [15], Ч. 2, с. 110)

$$\sum_{\omega=(r_1,\ldots,r_n)\in S_n}(-1)^{\rho_\omega}\prod_{i=1}^{n}(i+r_i-1)^{-1}=\det\left\|(i+j-1)^{-1}\right\|_{i,j=1}^{n}=\prod_{i=1}^{n-1}(i!)^3/\prod_{i=n}^{2n-1}i!,$$

з рівності (42) дістаємо, що $\frac{\partial^{n^2}\Delta(k,t_1)}{\partial t_1^{n^2}}\Big|_{t_1=0}=C_{38}$. □

Зауваження 4.1. Лема 4.1 узагальнює теорему, використану при розв'язуванні задачі 218 у відомому збірнику задач [4] (див. с. 70, с. 377).

Для кожного $k\in\mathbb{Z}^p$ нехай $m_0(k)=0$, $m_j(k)=n_1(k)+\ldots+n_j(k)$, $j=\overline{1,m(k)}$. Для кожного q, $q=\overline{1,n}$, позначимо

$$g_q(t,k)=t^{\alpha_q}\exp(\lambda_{\beta_q}(k)t),\quad \alpha_q=q-m_{j-1}(k)-1,\quad \beta_q=j, \tag{43}$$

де індекс $j=j(q)$ однозначно визначається з умови $m_{j-1}(k)<q\le m_j(k)$.

Лема 4.2. *Визначник $\Delta(k,t_1)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, є квазімногочленом вигляду*

$$\Delta(k,t_1)=\sum_{q=1}^{R}\exp(\Lambda_q(k)t_1)p_q(t_1,k),$$

де $R\le 2^n$, $\Lambda_j(k)\ne\Lambda_q(k)$, $j\ne q$, а для дійсних частин показників експонент виконуються нерівності: $\operatorname{Re}\Lambda_q(k)\ge -n\Lambda_2(1+|k|^\gamma)$, $q=\overline{1,R}$. Порядок $n_\Delta(k)\equiv\sum_{q=1}^{R}(\deg p_q(t_1,k)+1)$ квазімногочлена $\Delta(k,t_1)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, не перевищує числа

$$\left(2+C_n^2+\sum_{j=1}^{m(k)}\frac{n_j(k)(n_j(k)-1)}{2}\right)\cdot\prod_{j=1}^{m(k)}(n_j(k)+1).$$

Доведення. Через $\Delta_1(k,t_1)$ позначимо визначник $\det\|\int_0^{t_1}t^{j-1}g_q(t,k)dt\|_{j,q=1}^n$. Як і при доведенні формули (14), можна встановити, що визначники $\Delta(k,t_1)$ та $\Delta_1(k,t_1)$ пов'язані рівністю

$$\Delta(k,t_1)=\Delta_1(k,t_1)W^{-1}(k),\quad k\in\mathbb{Z}^p, \tag{44}$$

де $W(k)$ — значення вронскіана в нулі системи функцій $g_1(t,k),\ldots,g_n(t,k)$ (відомо [30, с. 86], що $W(k)=\prod_{j=1}^{m(k)}\prod_{q=1}^{n_j(k)-1}q!\cdot\prod_{m(k)\ge j>q\ge1}(\lambda_j(k)-\lambda_q(k))^{n_j(k)n_q(k)}$, якщо $m(k)\ge2$, і $W(k)=\prod_{q=1}^{n-1}q!$, якщо $m(k)=1$). З огляду на рівність (44), для доведення леми 4.2 досить показати, що визначник $\Delta_1(k,t_1)$ має структуру, описану у її формулюванні.

Із формул (43) та леми 1.2 випливає, що елементи визначника $\Delta_1(k,t_1)$ мають вигляд

$$\int_0^{t_1}t^{j-1}g_q(t,k)dt=\int_0^{t_1}t^{\alpha_q+j-1}\exp(\lambda_{\beta_q}(k)t)dt=$$

$$=\exp(\lambda_{\beta_q}(k)t_1)P_{\alpha_q+j-1}(\lambda_{\beta_q}(k),t_1)-P_{\alpha_q+j-1}(\lambda_{\beta_q}(k),0),\quad j,q=\overline{1,n}. \tag{45}$$

Використовуючи формулу для розвинення визначника $\Delta_1(k,t_1)$, та формули (45), дістанемо

$$\Delta_1(k,t_1)=\sum_{\substack{\omega=(i_1,\ldots,i_n),\\ \omega\in S_n}}(-1)^{\rho_\omega}\prod_{r=1}^{n}\int_0^{t_1}t^{i_r-1}g_r(t,k)dt=$$

$$=\sum_{\substack{\omega=(i_1,\ldots,i_n),\\ \omega\in S_n}}(-1)^{\rho_\omega}\prod_{r=1}^{n}\Big(\exp(\lambda_{\beta_r}(k)t_1)P_{\alpha_r+i_r-1}(\lambda_{\beta_r}(k),t_1)-P_{\alpha_r+i_r-1}(\lambda_{\beta_r}(k),0)\Big). \tag{46}$$

Оскільки для довільних наборів чисел $y_1,\ldots,y_n\in\mathbb{C}$ та $z_1,\ldots,z_n\in\mathbb{C}$ виконується рівність

$$\prod_{r=1}^{n}(y_r+z_r)=\sum_{j_1=0}^{1}\ldots\sum_{j_n=0}^{1}y_1^{j_1}\ldots y_n^{j_n}z_1^{1-j_1}\ldots z_n^{1-j_n},$$

то з формули (46) отримаємо, що

$$\Delta_1(k,t_1)=\sum_{\substack{\omega=(i_1,\ldots,i_n),\\ \omega\in S_n}}\sum_{j_1=0}^{1}\ldots\sum_{j_n=0}^{1}(-1)^{\rho_\omega+n+j_1+\ldots+j_n}\exp((j_1\lambda_{\beta_1}(k)+\ldots+j_n\lambda_{\beta_n}(k))t_1)\times$$

$$\times P^{j_1}_{\alpha_1+i_1-1}(\lambda_{\beta_1}(k),t_1)\cdot\ldots\cdot P^{j_n}_{\alpha_n+i_n-1}(\lambda_{\beta_n}(k),t_1)\cdot P^{1-j_1}_{\alpha_1+i_1-1}(\lambda_{\beta_1}(k),0)\cdot\ldots\cdot P^{1-j_n}_{\alpha_n+i_n-1}(\lambda_{\beta_n}(k),0).$$

Зрозуміло, що кількість різних показників експонент в останній формулі не перевищує $(n_1(k)+1)\cdot\ldots\cdot(n_m(k)+1)$. За лемою 1.2 степінь кожного многочлена

$$P^{j_1}_{\alpha_1+i_1-1}(\lambda_{\beta_1}(k),t_1)\cdot\ldots\cdot P^{j_n}_{\alpha_n+i_n-1}(\lambda_{\beta_n}(k),t_1),$$

не перевищує $1+j_1(\alpha_1+i_1-1)+\ldots+j_n(\alpha_n+i_n-1)\le 1+(\alpha_1+i_1-1)+\ldots+(\alpha_n+i_n-1)=1+(\alpha_1+\ldots+\alpha_n)-n+(i_1+\ldots+i_n)=1+C_n^2+\sum\limits_{j=1}^{m(k)}C^2_{n_j(k)}$. Отже, для порядку $n_{\Delta_1}(k)$ визначника $\Delta_1(k,t_1)$ отримуємо оцінку $n_{\Delta_1}(k)\le\big(2+C_n^2+\sum_{j=1}^{m(k)}C^2_{n_j(k)}\big)\prod_{j=1}^{m(k)}(n_j(k)+1)$.

Оцінка знизу для дійсних частин показників експонент, які входять до визначника $\Delta(k,t_1)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, є очевидною. □

Зауваження 4.2. Якщо всі корені многочлена $L(\lambda,k)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, є простими і відмінними від нуля, то для порядку $n_\Delta(k)$ квазімногочлена $\Delta(k,t_1)$ виконується точніша оцінка $n_\Delta(k)\le 2^n+\sum\limits_{j=1}^{n}C_n^j\frac{j(2n-j-1)}{2}$.

§5. Міра та розмірність Гаусдорфа множини нормальних меж інтегральної задачі. У параграфі 2 роботи встановлено, що з нормальності верхньої межі інтегрування випливає коректність інтегральної задачі. У зв'язку з цим виникає природне запитання про те, наскільки „великою" є множина нормальних меж $M^\gamma_{\omega,\delta}$. Цей параграф роботи присвячений доведенню результатів про те, що для належно вибраних ω, δ, γ множина $M^\gamma_{\omega,\delta}$ є множиною повної міри або ж повної розмірності Гаусдорфа на прямій.

Наведемо для зручності викладу деякі поняття, які стосуються ρ–міри Гаусдорфа та розмірності Гаусдорфа множини $M\subset\mathbb{R}$.

δ–покриттям множини $M\subset\mathbb{R}$ називається злічення сім'я інтервалів $\{S_j\}_{j=1}^\infty$ така, що $M\subset\bigcup_{j=1}^\infty S_j$ і $\operatorname{mes}S_j<\delta$ для кожного $j\ge 1$.

ρ–мірою Гаусдорфа $(0<\rho\le 1)$ множини $M\subset\mathbb{R}$ називається границя (скінченна або нескінченна) $\dim_\rho M=\lim\limits_{\delta\to 0}\inf\sum_{j=1}^\infty(\operatorname{mes}S_j)^\rho$, де точна нижня грань береться за всіма δ–покриттями $\{S_j\}_{j=1}^\infty$ множини M.

При $\rho=1$ міра Гаусдорфа $\dim_\rho M$ збігається з мірою Лебега множини M.

Дійсне число β таке, що: 1)$\forall\rho:\ \beta<\rho\le 1\quad \dim_\rho M=0$, 2)$\forall\rho:\ 0<\rho<\beta\quad\dim_\rho M=\infty$, — називається *розмірністю Гаусдорфа* множини $M\subset\mathbb{R}$.

Коректність означення розмірності Гаусдорфа випливає з єдиності дійсного числа, для якого виконуються умови 1), 2) означення (див. [1], [38]).

Будемо використовувати наступне твердження, доведення якого міститься в [1], [38].

Теорема 5.1. *Множина $M\subset\mathbb{R}$ має нульову ρ–міру Гаусдорфа тоді і тільки тоді, коли існує покриття $\{S_j\}_{j=1}^\infty$ множини M таке, що*

$$\sum_{j=1}^{\infty}(\operatorname{mes}S_j)^\rho<\infty,$$

і таке, що кожна точка множини M належить до нескінченної кількості проміжків S_j.

Теорема 5.2. *Для довільного $\rho \in (0;1]$ множина $(0,T]\backslash M^{\gamma}_{\omega,\delta}$ має нульову ρ–міру Гаусдорфа, якщо $\omega > \omega_1(\rho)$, $\delta \geq \delta_1$, $\gamma \geq \gamma_0$, де $\omega_1(\rho) = \gamma_0(n^2+1) + \frac{(p+\gamma_0)(\xi_1-1)}{\rho}$, $\delta_1 = n\Lambda_2 T$,*

$$\xi_1 = \sup_{k\in\mathbb{Z}^p}\left(2 + C_n^2 + \sum_{j=1}^{m(k)} \frac{n_j(k)(n_j(k)-1)}{2}\right)\cdot \prod_{j=1}^{m(k)}(n_j(k)+1).$$

Для довільних $\omega > \gamma_0(n^2+1) + (p+\gamma_0)(\xi_1-1)$, $\delta \geq \delta_1$, $\gamma \geq \gamma_0$ розмірність Гаусдорфа множини $(0,T]\backslash M^{\gamma}_{\omega,\delta}$ не перевищує $\frac{(p+\gamma_0)(\xi_1-1)}{\omega-\gamma_0(n^2+1)}$. Для всіх $\omega \in \mathbb{R}$, $\delta > \delta_1$, $\gamma \geq \gamma_0$ (або для всіх $\omega \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $\gamma > \gamma_0$) множина $(0,T]\backslash M^{\gamma}_{\omega,\delta}$ має нульову розмірність Гаусдорфа.

Доведення. Через $A^{\gamma}_{\omega,\delta}(k)$ позначимо множину тих $t_1 \in (0,T]$, для яких нерівність

$$|\Delta(k,t_1)| \leq (1+|k|)^{-\omega}\exp(-\delta|k|^{\gamma}) \tag{47}$$

виконується при фіксованому $k \in \mathbb{Z}^p$, а через $A^{\gamma}_{\omega,\delta}$ — множину тих значень $t_1 \in (0,T]$, для яких нерівність (47) виконується для нескінченної кількості векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. Множина $A^{\gamma}_{\omega,\delta}(k)$ є „ε_k–винятковою“ множиною (де $\varepsilon_k = (1+|k|)^{-\omega}\exp(-\delta|k|^{\gamma}), k \in \mathbb{Z}^p$) визначника $\Delta(k,t_1)$ на $(0,T]$. З теореми 3.1 на основі тверджень лем 4.1, 4.2 випливає, що для $\omega > \omega_1(\rho)$, $\delta \geq \delta_1$, $\gamma \geq \gamma_0$ множину $A^{\gamma}_{\omega,\delta}(k)$ можна покрити проміжками $S^{\gamma,j}_{\omega,\delta}(k)$, $j = \overline{1,N(k)}$, так, що для кількості $N(k)$ цих проміжків виконуються нерівності

$$N(k) \leq C_{39}(1+|k|)^{\gamma_0}, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{48}$$

а для їхніх довжин — нерівності

$$\begin{aligned} \operatorname{mes} S^{\gamma,j}_{\omega,\delta}(k) &\leq C_{40}\big((1+|k|)^{\gamma_0(n^2+1)-\omega}\exp((n\Lambda_2 T-\delta)|k|^{\gamma_0})\big)^{1/(n_{\Delta(k)}-1)} \leq \\ &\leq C_{40}\big(1+|k|\big)^{(\gamma_0(n^2+1)-\omega)/(\xi_1-1)} = C_{40}(1+|k|)^{-(p+\gamma_0)/\rho-\varepsilon}, \;\; j=\overline{1,N(k)}, \;\; k\in\mathbb{Z}^p, \end{aligned} \tag{49}$$

де $n_{\Delta(k)}$, $k \in \mathbb{Z}^p$, — порядок квазімногочлена $\Delta(k,t_1)$ (див. формулювання леми 4.2), $\varepsilon = (\omega-\omega_1(\rho))/(\xi_1-1) > 0$. Зауважимо, що для $\omega > \omega_1(\rho)$, $\delta \geq \delta_1$, $\gamma \geq \gamma_0$ правильним є включення

$$A^{\gamma}_{\omega,\delta} = \bigcap_{N=0}^{\infty}\bigcup_{|k|\geq N} A^{\gamma}_{\omega,\delta}(k) \subset \bigcap_{N=0}^{\infty}\bigcup_{|k|\geq N}\bigcup_{j=1}^{N(k)} S^{\gamma,j}_{\omega,\delta}(k).$$

Тому кожна точка множини $A^{\gamma}_{\omega,\delta}$ належить до нескінченної кількості проміжків $S^{\gamma,j}_{\omega,\delta}(k)$, $j = \overline{1,N(k)}$, $k \in \mathbb{Z}^p$. З нерівностей (48), (49) випливає, що

$$\sum_{|k|\geq 0}\sum_{j=1}^{N(k)}(\operatorname{mes} S^{\gamma,j}_{\omega,\delta}(k))^{\rho} \leq C_{41}\sum_{|k|\geq 0}(1+|k|)^{-p-\varepsilon\rho} < \infty.$$

Тоді за теоремою 5.1 ρ–міра Гаусдорфа множини $A^{\gamma}_{\omega,\delta}$ дорівнює нулеві, якщо $\omega > \omega_1(\rho)$, $\delta \geq \delta_1$, $\gamma \geq \gamma_0$. Очевидно, що множина $S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}^p}\{t_1 \in (0,T] : \ \Delta(k,t_1)=0\}$ є не більш ніж зліченною. Оскільки $(0,T]\backslash M^{\gamma}_{\omega,\delta} \subset A^{\gamma}_{\omega,\delta} \cup S$, то з монотонності міри Гаусдорфа відносно включення множин і того, що дві множини, які відрізняються на не більш ніж зліченний доданок, мають однакову міру Гаусдорфа, випливає, що $\dim_{\rho}((0,T]\backslash M^{\gamma}_{\omega,\delta}) = 0$, якщо $\omega > \omega_1(\rho)$, $\delta \geq \delta_1$, $\gamma \geq \gamma_0$.

Друге твердження теореми одразу випливає з першого, а третє доводиться такими ж міркуваннями, як і перше. □

Запропонований при доведенні теореми 5.2 підхід до аналізу оцінки знизу модуля визначника $\Delta(k,t_1)$, відрізняється від відомого методу П.І.Штабалюка (див. § 2.3 у [34] та § 7.4 у [16]) і в технічному плані є зручнішим.

Теорема 5.3. *Нехай оператор $L(\partial/\partial t, D_x)$ у рівнянні (1) є таким, що для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ корені многочлена $L(\lambda, k)$ є дійсними. Для всіх $\rho \in (0;1]$ множина $(0,T]\backslash M^{\gamma}_{\omega,\delta}$ має нульову ρ–міру Гаусдорфа, якщо $\omega > \gamma_0(n^2+1)+p(\xi_1-1)/\rho$, $\delta \geq \delta_1$, $\gamma \geq \gamma_0$. Для довільних $\omega > \gamma_0(n^2+1)+p(\xi_1-1)$, $\delta \geq \delta_1$, $\gamma \geq \gamma_0$ розмірність Гаусдорфа множини $(0,T]\backslash M^{\gamma}_{\omega,\delta}$ не перевищує $\frac{p(\xi_1-1)}{\omega-\gamma_0(n^2+1)}$. Для довільних $\omega \in \mathbb{R}$, $\delta > \delta_1$, $\gamma \geq \gamma_0$ (або для довільних $\omega \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $\gamma > \gamma_0$) множина $(0,T]\backslash M^{\gamma}_{\omega,\delta}$ має нульову розмірність Гаусдорфа.*

Теорема 5.4. *Нехай оператор $L(\partial/\partial t, D_x)$ у рівнянні (1) має вигляд (10), де $\mu_j \in \mathbb{C}$, $j=\overline{1,n}$, $\mu_j \neq \mu_q$, $j \neq q$, а диференціальний оператор $B(D_x)$ є таким, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ виконуються нерівності $b_1|k|^{\gamma_1} \leq |B(k)| \leq b_2(1+|k|^{\gamma_1})$, $b_1, b_2 > 0$. Для всіх $\rho \in (0;1]$ множина $(0,T]\backslash M^{\gamma}_{\omega,\delta}$ має нульову ρ–міру Гаусдорфа, якщо $\omega > \omega_3(\rho)$, $\delta \geq \delta_2$, $\gamma \geq \gamma_1$, де $\omega_3(\rho) = \gamma_1(n^2-n+1)+(p+\gamma_1)(\xi_2-1)/\rho$, $\delta_2 = nM_2T$, $\xi_2 = 2^n(2+C_n^2)$,*

$$M_2 = -\min\big\{0; \min_{1\leq j\leq n} \inf_{k\in\mathbb{Z}^p} \tfrac{\operatorname{Re}\mu_j B(k)}{1+|k|^{\gamma_1}}\big\}.$$

Для довільних $\omega > \gamma_1(n^2-n+1)+(p+\gamma_1)(\xi_2-1)$, $\delta \geq \delta_2$, $\gamma \geq \gamma_1$ розмірність Гаусдорфа множини $(0,T]\backslash M^{\gamma}_{\omega,\delta}$ не перевищує $\frac{(p+\gamma_1)(\xi_2-1)}{\omega-\gamma_1(n^2-n+1)}$. Для всіх $\omega \in \mathbb{R}$, $\delta > \delta_2$, $\gamma \geq \gamma_1$ (або для всіх $\omega \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $\gamma > \gamma_1$) множина $(0,T]\backslash M^{\gamma}_{\omega,\delta}$ має нульову розмірність Гаусдорфа.

Теорема 5.5. *Нехай оператор $L(\partial/\partial t, D_x)$ у рівнянні (1) має вигляд (10), де $\mu_j \in \mathbb{R}$, $j=\overline{1,n}$, $\mu_j \neq \mu_q$, $j \neq q$, а диференціальний оператор $B(D_x)$ є таким, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ $B(k) \in \mathbb{R}$ і виконуються нерівності*

$$b_1|k|^{\gamma_1} \leq |B(k)| \leq b_2(1+|k|^{\gamma_1}),\ b_1, b_2 > 0.$$

Тоді для всіх $\rho \in (0;1]$ множина $(0,T]\backslash M^{\gamma}_{\omega,\delta}$ має нульову ρ–міру Гаусдорфа, якщо $\omega > \omega_4(\rho)$, $\delta \geq \delta_2$, $\gamma \geq \gamma_1$, де $\omega_4(\rho) = \gamma_1(n^2-n+1)+p(\xi_2-1)/\rho$. Для довільних $\omega > \gamma_1(n^2-n+1)+p(\xi_2-1)$, $\delta \geq \delta_2$, $\gamma \geq \gamma_1$ розмірність Гаусдорфа множини $(0,T]\backslash M^{\gamma}_{\omega,\delta}$ не перевищує $\frac{p(\xi_2-1)}{\omega-\gamma_1(n^2-n+1)}$. Для довільних $\omega \in \mathbb{R}$ $\delta > \delta_2$, $\gamma \geq \gamma_1$ (або для довільних $\omega \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $\gamma > \gamma_1$) множина $(0,T]\backslash M^{\gamma}_{\omega,\delta}$ має нульову розмірність Гаусдорфа.

Доведення теорем 5.3, 5.4, 5.5 проводяться аналогічно до доведення теореми 5.2 — при цьому для оцінки кількості проміжків покриття виняткових множин визначника $\Delta(k, t_1)$ та для оцінки довжин відрізків покриття слід використати леми 4.1, 4.2 і теореми 3.2, 3.3, 3.4 відповідно.

Зауваження 5.1. Якщо для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ корені многочлена $L(\lambda, k)$ є простими і відмінними від нуля, то у формулюванні теорем 5.2, 5.3 можна вважати, що

$$\xi_1 = 2^n + \sum_{j=1}^{n} C_n^j \tfrac{j(2n-j-1)}{2}.$$

§6. Коректність задачі для майже всіх меж інтегрування. Із теорем, доведених у §2, §5, випливають наступні твердження про коректну розв'язність задачі (1), (2) для майже всіх (стосовно міри та розмірності Гаусдорфа) чисел $t_1 \in (0,T]$.

Теорема 6.1. *Для довільних $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ та для майже всіх (стосовно ρ–міри Гаусдорфа) меж $t_1 \in (0,T]$ задача (1), (2) є*

$$\big(\alpha_0, \beta_0; \alpha_0+\gamma_0 n(n+3)/2+\omega_1(\rho)+\varepsilon, \beta_0+n(\Lambda_1+\Lambda_2)T; \gamma_0\big)\text{–коректною.}$$

Для довільних $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ та $\omega \geq \gamma_0(n^2+1)+(p+\gamma_0)(\xi_1-1)$ задача (1), (2) є

$$\big(\alpha_0, \beta_0; \alpha_0+\gamma_0 n(n+3)/2+\omega+\varepsilon, \beta_0+n(\Lambda_1+\Lambda_2)T; \gamma_0\big)\text{–коректною}$$

для всіх меж $t_1 \in (0,T]$, крім, можливо, множини, розмірність Гаусдорфа якої не перевищує $\frac{(p+\gamma_0)(\xi_1-1)}{\omega-\gamma_0(n^2+1)+\varepsilon}$. Для довільних $\alpha_0, \alpha, \beta_0 \in \mathbb{R}$ та $\varepsilon > 0$ задача (1), (2) є

$$\big(\alpha_0, \beta_0; \alpha, \beta_0+n(\Lambda_1+\Lambda_2)T+\varepsilon; \gamma_0\big)\text{–коректною}$$

для всіх меж $t_1 \in (0,T]$, *крім, можливо, множини нульової розмірності Гаусдорфа.*
Теорема 6.2. *Якщо оператор* $L(\partial/\partial t, D_x)$ *у рівнянні* (1) *є таким, що для кожного* $k \in \mathbb{Z}^p$ *корені многочлена* $L(\lambda, k)$ *є дійсними, то для довільних* $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ *та для майже всіх (стосовно* ρ*–міри Гаусдорфа) меж* $t_1 \in (0,T]$ *задача з умовами* (2) *для рівняння* (1) *є*

$$\big(\alpha_0, \beta_0; \alpha_0 + \gamma_0 n(n+3)/2 + \omega_2(\rho) + \varepsilon, \beta_0 + n(\Lambda_1 + \Lambda_2)T; \gamma_0\big)\text{–коректною.}$$

Для довільних $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ *та* $\omega \geq \gamma_0(n^2+1) + p(\xi_1 - 1)$ *задача* (1), (2) *є*

$$\big(\alpha_0, \beta_0; \alpha_0 + \gamma_0 n(n+3)/2 + \omega + \varepsilon, \beta_0 + n(\Lambda_1 + \Lambda_2)T; \gamma_0\big)\text{–коректною}$$

для всіх меж $t_1 \in (0,T]$, *крім, можливо, множини, розмірність Гаусдорфа якої не перевищує* $\frac{p(\xi_1-1)}{\omega-\gamma_0(n^2+1)+\varepsilon}$. *Для довільних* $\alpha_0, \alpha, \beta_0 \in \mathbb{R}$ *та* $\varepsilon > 0$ *та задача* (1), (2) *є*

$$\big(\alpha_0, \beta_0; \alpha, \beta_0 + n(\Lambda_1 + \Lambda_2)T + \varepsilon; \gamma_0\big)\text{–коректною}$$

для всіх меж $t_1 \in (0,T]$, *крім, можливо, множини нульової розмірності Гаусдорфа.*
Теорема 6.3. *Нехай оператор* $L(\partial/\partial t, D_x)$ *у рівнянні* (1) *має вигляд* (10), *де* $\mu_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1,n}$, $\mu_j \neq \mu_q$, $j \neq q$, *а диференціальний оператор* $B(D_x)$ *є таким, що для всіх* $k \in \mathbb{Z}^p$ *виконуються нерівності* $b_1|k|^{\gamma_1} \leq |B(k)| \leq b_2(1 + |k|^{\gamma_1})$, $b_1, b_2 > 0$. *Для довільних* $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ *та для майже всіх (стосовно* ρ*–міри Гаусдорфа) меж* $t_1 \in (0,T]$ *задача з умовами* (2) *для рівняння* (1) *є*

$$\big(\alpha_0, \beta_0; \alpha_0 - \gamma_1 n(n-3)/2 + \omega_3(\rho) + \varepsilon, \beta_0 + n(M_1 + M_2)T; \gamma_1\big)\text{–коректною.}$$

Для довільних $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ *та* $\omega \geq \gamma_1(n^2 - n + 1) + (p + \gamma_1)(\xi_2 - 1)$ *задача* (1), (2) *є*

$$\big(\alpha_0, \beta_0; \alpha_0 - \gamma_1 n(n-3)/2 + \omega + \varepsilon, \beta_0 + n(M_1 + M_2)T; \gamma_1\big)\text{–коректною}$$

для всіх меж $t_1 \in (0,T]$, *крім, можливо, множини, розмірність Гаусдорфа якої не перевищує* $\frac{(p+\gamma_1)(\xi_2-1)}{\omega-\gamma_1(n^2-n+1)+\varepsilon}$. *Для довільних* $\alpha_0, \alpha, \beta_0 \in \mathbb{R}$ *та* $\varepsilon > 0$ *та задача* (1), (2) *є*

$$\big(\alpha_0, \beta_0; \alpha, \beta_0 + n(M_1 + M_2)T + \varepsilon; \gamma_1\big)\text{–коректною}$$

для всіх меж $t_1 \in (0,T]$, *крім, можливо, множини нульової розмірності Гаусдорфа.*
Теорема 6.4. *Якщо оператор* $L(\partial/\partial t, D_x)$ *у рівнянні* (1) *має вигляд* (10), *де* $\mu_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,n}$, $\mu_j \neq \mu_q$, $j \neq q$, *а диференціальний оператор* $B(D_x)$ *є таким, що для всіх* $k \in \mathbb{Z}^p$ $B(k) \in \mathbb{R}$ *і виконуються нерівності* $b_1|k|^{\gamma_1} \leq |B(k)| \leq b_2(1 + |k|^{\gamma_1})$, $b_1, b_2 > 0$, *то для довільних* $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ *та для майже всіх (стосовно* ρ*–міри Гаусдорфа) меж* $t_1 \in (0,T]$ *задача з умовами* (2) *для рівняння* (1) *є*

$$\big(\alpha_0, \beta_0; \alpha_0 - \gamma_1 n(n-3)/2 + \omega_4(\rho) + \varepsilon, \beta_0 + n(M_1 + M_2)T; \gamma_1\big)\text{–коректною.}$$

Для довільних $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ *та* $\omega \geq \gamma_1(n^2 - n + 1) + p(\xi_2 - 1)$ *задача* (1), (2) *є*

$$\big(\alpha_0, \beta_0; \alpha_0 - \gamma_1 n(n-3)/2 + \omega + \varepsilon, \beta_0 + n(M_1 + M_2)T; \gamma_1\big)\text{–коректною}$$

для всіх меж $t_1 \in (0,T]$, *крім, можливо, множини, розмірність Гаусдорфа якої не перевищує* $\frac{p(\xi_2-1)}{\omega-\gamma_1(n^2-n+1)+\varepsilon}$. *Для довільних* $\alpha_0, \alpha, \beta_0 \in \mathbb{R}$ *та* $\varepsilon > 0$ *та задача* (1), (2) *є*

$$\big(\alpha_0, \beta_0; \alpha, \beta_0 + n(M_1 + M_2)T + \varepsilon; \gamma_1\big)\text{–коректною}$$

для всіх меж $t_1 \in (0,T]$, крім, можливо, множини нульової розмірності Гаусдорфа.

§7. Перспектива подальших досліджень. Запропонована в роботі методика може бути використана для дослідження задачі для рівняння (1) з умовами вигляду

$$\int_0^{t_1} g_j(t, D_x)u(t,x)dt = \varphi_j(x), \quad x \in \Omega_p, \quad j = \overline{1,n}, \quad 0 < t_1 \leq T,$$

де символи $g_j(t,k)$ ($k \in \mathbb{Z}^p$) псевдодиференціальних операторів $g_j(t,D_x)$, $j = \overline{1,n}$, є розв'язками задач Коші

$$g_j^{(n)}(t,k) + \sum_{r=0}^{n-1} B_r(k) g_j^{(r)}(t,k) = 0, \quad g_j^{(q-1)}(0,k) = \delta_{jq}, \quad j,q = \overline{1,n},$$

де $B_j(\xi), j = \overline{0, n-1}$, — многочлени, δ_{jq} — символ Кронекера.

ЛІТЕРАТУРА

1. Берник В.И., Мельничук Ю.В. Диофантовы приближения и размерность Хаусдорфа. – Минск: Наука и техника, 1988. – 144 с.
2. Виленц И.Л. *Классы единственности решения общей краевой задачи в слое для систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных* // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1974. – № 3. – С. 195–197.
3. Вігак В.М. *Побудова розв'язку задачі теплопровідності з інтегральними умовами*// Доп. АН України. – Сер. А. – 1994. – № 8. – С. 57–60.
4. Задачи и олимпиады. Избранные задачи из журнала „American Mathematical Monthly" // Сборник под ред. и с предисл. В.М.Алексеева. – М.: Мир, 1977. – 597 с.
5. Иванчов Н.И. *Краевые задачи для параболического уравнения с интегральными условиями* // Дифференц. уравнения. – 2004.– Т. 40, № 4.– С. 547–564.
6. Ільків В.С. *Аналоги леми Пяртлі з абсолютними константами* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999.– Т. 42, № 4.– С. 68–74.
7. Ковалевская Э.И. *Диофантовы приближения на подмногообразиях в* $\mathbb{C}^2$ // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1991. – № 5. – С. 11–16.
8. Ковалевская Э.И., Сакович Н.В. *Аналог теоремы Пяртли для аналитических функций комплексного переменного* // Весці АН Беларуси. Сер. фіз.-мат. навук. – 1994. – № 4. – С. 16–20.
9. Крейн С.Г., Хазан М.И. *Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве* // Итоги науки и техники. Математический анализ. – Т. 21. – М.: ВИНИТИ, 1983. – С. 130–264.
10. Макаров А.А. *О необходимых и достаточных условиях корректной разрешимости краевой задачи в слое для системы дифференциальных уравнений в частных производных* // Дифференц. уравнения. – 1981. – Т. 17, № 2. – С. 320–324.
11. Мамян А.Х. *Общие граничные задачи в слое* // ДАН СССР. – 1982. – Т. 267, № 2. – С. 292–296.
12. Медвідь О.М., Симотюк М.М. *Інтегральна задача для лінійних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами* // Тези доповідей Міжнародної наукової конференції, присвяченої 125-річчю від дня народження Ганса Гана. – Чернівці. – 27 червня – 3 липня 2004 р. – С. 73–74.
13. Медвідь О.М., Симотюк М.М. *Задача з інтегральними умовами для лінійних рівнянь із частинними похідними* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003.– Т. 46, № 4.– С. 92–101.
14. Медвідь О.М., Симотюк М.М. *Задача з розподіленими даними для рівнянь із частинними похідними* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004.– Т. 47, № 4.– С. 155–159.
15. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа: в 2-х ч. – М.: Наука, 1978. – Ч. 1. – 391 с. – Ч. 2. – 432 с.
16. Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.
17. Пяртли А.С. *Диофантовы приближения на подмногообразиях евклидова пространства* // Функцион. анализ и его приложения. – 1969. – Т. 3, вып. 4. – С. 59–62.

18. Самарский А.А. *О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнения* // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 16, № 11. – С. 1925–1935.
19. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения: в 2-х т. – М.: Изд–во иностр. лит., 1953. – Т. 1. – 346 с.
20. Симотюк М.М. *Двоточкова задача для лінійних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами* // Наук. Вісник Ужгород. нац. ун-ту. – 2002. – Вип. 7. – С. 96–107.
21. Симотюк М.М. *Про оцінки мір множин, на яких модуль гладкої функції обмежений зверху* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999.– Т. 42, № 4.– С. 90–95.
22. Спринджук В.Г. Метрическая теория диофантовых приближений. – М.: Наука, 1977. – 144 с.
23. Тихонов И.В. *Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений* // Изв. РАН. Серия матем. – 2003. – Т. 67, № 2. – С. 133–166.
24. Фаддєєв Д.К., Сомінський І.С. Збірник задач з вищої алгебри. – К.: Вища школа, 1971. – 316 с.
25. Фардигола Л.В. *Критерий корректности в слое краевой задачи с интегральными условиями* // Укр. мат. журн. – 1990. – Т. 42, № 11. – С. 1546–1551.
26. Фардигола Л.В. *Свойства T–устойчивости интегральной краевой задачи в слое* // Теория функций, функцион. анализ и их приложения. – 1991. – № 55. – С. 78–80.
27. Фардигола Л.В. *Влияние параметров на свойства решений интегральных краевых задач в слое* // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 7. – С. 51–58.
28. Фардигола Л.В. *Интегральная краевая задача в слое* // Матем. заметки. – 1993. – Т. 53, вып. 6.– С. 122–129.
29. Фардигола Л.В. *Интегральная краевая задача в слое для системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных* // Матем. сборник. – 1995. – Т. 186, № 11. – С. 123–144.
30. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
31. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов: в 4-х т. – М.: Мир, 1986. – Т. 2. – 456 с.
32. Хинчин А.Я. Цепные дроби. – М.: Наука, 1978. – 112 с.
33. Шелухин В.В. *Вариационный принцип в нелокальных по времени задачах для линейных эволюционных уравнений* // Сиб. мат. журн. – 1993. – Т. 34, № 2. – С. 191–207.
34. Штабалюк П.И. Почти–периодические решения дифференциальных уравнений гиперболического и составного типов // Дисс. ... канд. физ.–мат. наук. – Львов. – 1984. – 146 с.
35. Beresnevich V.V., Bernik V.I., Kleinbock D.Y., Margulis G.A. *Metric Diophantine approximation: The Khintchine-Groshev theorem for nondegenerate manifolds* // Moscow Math. Journal. – 2002. – T. 2, № 2. – P. 203–225.
36. Bernik V., Kleinbock D., Margulis G. *Khintchine-type theorems on manifolds: the convergence case and multiplicative versions* // Intern. Math. Research Notes. – 2001. – № 9. – P. 453–486.
37. Kleinbock D.,Margulis G. *Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds* // Ann. Math. – 1998. – T. 148. – P. 339–360.
38. Rogers C.A. Hausdorff measures. – Cambridge: Cambridge University Press, 1970. – 179 p.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

Надійшло 27.10.2004
Після переробки 15.07.2007