УДК 517.9

Н. В. Скрипник

НЕЧЕТКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ИМПУЛЬСАМИ В ФИКСИРОВАННЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ

N. V. Scripnik. *Fuzzy differential equations with impulses in fixed moment of time*, Matematychni Studii, **28** (2007) 51–56.

The paper deals with fuzzy impulsive differential equations. A theorem of continuous dependence of the solutions on the initial data and the right-hand sides is proved.

Н. В. Скрипник. *Нечеткие дифференциальные уравнения с импульсами в фиксированные моменты времени* // Математичні Студії. – 2007. – Т.28, №1. – С.51–56.

В статье рассматриваются нечеткие импульсные дифференциальные уравнения, доказана теорема о непрерывной зависимости решений от начальных данных и правых частей.

Работа L. A. Zadeh [11] в 1965 г. положила начало развитию теории нечетких множеств. В 1983 г. M. L. Puri, D. A. Ralescu [8] ввели понятие производной и интеграла для нечетких отображений, а в 1987 г. O. Kaleva [3] рассмотрел нечеткие дифференциальные уравнения. В дальнейшем нечеткие дифференциальные уравнения рассматривались в работах [4, 8, 9, 10].

Пусть $\mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$ — метрическое пространство непустых компактных выпуклых подмножеств $\mathbb{R}^n$. Метрика в этом пространстве определяется с помощью расстояния по Хаусдорфу

$$h(F,G)=\max\{\sup_{f\in F}\inf_{g\in G}||f-g||,\sup_{g\in G}\inf_{f\in F}||f-g||\},$$

где $||\cdot||$ — евклидова норма в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Введем в рассмотрение пространство E^n, состоящее из отображений $u\colon\ \mathbb{R}^n\to[0,1]$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) u нормально, то есть существует вектор $x_0\in\mathbb{R}^n$ такой, что $u(x_0)=1$;
2) u нечетко выпукло, т.е. для любых $x,y\in\mathbb{R}^n$ и любого $\lambda\in[0,1]$ справедливо неравенство $u(\lambda x+(1-\lambda)y)\geq\min\{u(x),u(y)\}$;
3) u полунепрерывно сверху;
4) множество $[u]^0=cl\{x\in\mathbb{R}^n\colon u(x)>0\}$ компактно.

Для $0<\alpha\leq 1$ определим множество $[u]^\alpha=\{x\in\mathbb{R}^n\colon u(x)\geq\alpha]$.

Теорема 1 ([5]). *Если $u\in E^n$, то: 1) $[u]^\alpha\in conv(\mathbb{R}^n)$ для всех $0\leq\alpha\leq 1$; 2) $[u]^{\alpha_2}\subset[u]^{\alpha_1}$ для всех $0\leq\alpha_1\leq\alpha_2\leq 1$; 3) если $\{\alpha_k\}\subset[0,1]-$ неубывающая последовательность, сходящаяся к $\alpha>0$, то $[u]^\alpha=\bigcap_{k\geq 1}[u]^{\alpha_k}$.*

2000 *Mathematics Subject Classification:* 34A12, 34A37, 34A60.

Наоборот, если $\{A^\alpha\colon 0\le\alpha\le1\}$ — *семейство подмножеств* $\mathbb{R}^n$, *удовлетворяющих условиям 1)–3), то существует* $u\in E^n$ *такое, что* $[u]^\alpha=A^\alpha$ *для* $0<\alpha\le1$ *и*

$$[u]^0=\overline{\bigcup_{0<\alpha\le1}A^\alpha}\subset A^0.$$

Определим в пространстве E^n метрику $D\colon E^n\times E^n\to[0,+\infty)$, полагая

$$D(u,v)=\sup_{0\le\alpha\le1}h([u]^\alpha,[v]^\alpha).$$

Пусть I — промежуток в $\mathbb{R}$.

Определение 1 ([2]). Отображение $F\colon I\to E^n$ называется *сильно измеримым* на I, если для всех $\alpha\in[0,1]$ многозначное отображение $F_\alpha=[F(t)]^\alpha$ измеримо.

Определение 2 ([2]). Отображение $F\colon I\to E^n$ называется *интегрально ограниченным* на I, если существует интегрируемая по Лебегу функция $k(t)$ такая, что $||x||\le k(t)$ для всех $x\in F_0(t)$.

Определение 3 ([2]). *Интегралом от отображения* $F\colon I\to E^n$ *по множеству* I называется элемент $G\in E^n$ такой, что $[G]^\alpha=\int_I F_\alpha(t)dt$ для всех $0<\alpha\le1$, где интеграл от многозначного отображения $F_\alpha(t)$ понимается в смысле Ауманна [1].

Теорема 2 ([2]). *Если отображение* $F\colon I\to E^n$ *сильно измеримо и интегрально ограничено, то* F *интегрируемо на* I.

Теорема 3 ([2]). *Пусть* $F,G\colon I\to E^n$ *интегрируемы на* I *и* $\lambda\in\mathbb{R}$. *Тогда*

1) $\int_I(F(t)+G(t))dt=\int_I F(t)dt+\int_I G(t)dt$;

2) $\int_I\lambda F(t)dt=\lambda\int_I F(t)dt$;

3) функция $D(F(t),G(t))$ *интегрируема по Лебегу на* I;

4) $D\big(\int_I F(t)dt,\int_I G(t)dt\big)\le\int_I D(F(t),G(t))dt$.

Определение 4 ([2]). Отображение $F\colon I\to E^n$ называется *дифференцируемым в точке* $t_0\in I$, если для всех $\alpha\in[0,1]$ многозначное отображение $F_\alpha(t)$ дифференцируемо по Хукухаре в точке t_0, его производная равна $DF_\alpha(t_0)$ и семейство множеств $\{DF_\alpha(t_0)\}$ определяет элемент $F'(t_0)\in E^n$.

Если отображение $F\colon I\to E^n$ дифференцируемо в точке $t_0\in I$, то $F'(t_0)$ называют *нечеткой производной* $F(t)$ *в точке* t_0.

Теорема 4 ([2]). *Пусть отображение* $F\colon I\to E^n$ *дифференцируемо и предположим, что его нечеткая производная* $F'\colon I\to E^n$ *интегрируема на* I. *Тогда для любого* $t\in I$ *имеем*

$$F(t)=F(t_0)+\int_{t_0}^t F'(s)ds.$$

Определение 5 ([2]). Отображение $f\colon I\times E^n\to E^n$ называется *слабо непрерывным в точке* $(t_0,x_0)\in I\times E^n$, если для любого фиксированного $\alpha\in[0,1]$ и произвольного $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon,\alpha)>0$ такое, что $h([f(t,x)]^\alpha,[f(t_0,x_0)]^\alpha)<\varepsilon$ для всех $t\in I$, $x\in E^n$ таких, что $|t-t_0|<\delta(\varepsilon,\alpha)$ и $h([x]^\alpha,[x_0]^\alpha)<\delta(\varepsilon,\alpha)$.

Определение 6 ([6]). Говорят, что *отображение* $f\colon I\times E^n \to E^n$ *удовлетворяет условию Липшица по переменной* x, если существует постоянная $L>0$ такая, что для любой пары $(t,x),(t,y)\in I\times E^n$ и всех $\alpha\in[0,1]$ справедливо неравенство

$$h([f(t,x)]^\alpha,[f(t,y)]^\alpha)\le Lh([x]^\alpha,[y]^\alpha).$$

Очевидно, что если отображение $f\colon I\times E^n\to E^n$ удовлетворяет условию Липшица по переменной x с постоянной $L>0$, то для любой пары $(t,x),(t,y)\in I\times E^n$ справедливо неравенство $D(f(t,x),f(t,y))\le LD(x,y)$.

Обозначим через

$$I_0=[t_0,T],\ B(x_0,b)=\{x\in E^n\colon D(x,x_0)\le b\},\ J_0=I_0\times B(x_0,b).$$

Рассмотрим нечеткое дифференциальное уравнение

$$\dot x=f(t,x),x(t_0)=x_0, \tag{1}$$

где $f\colon J_0\to E^n-$ слабо непрерывное отображение, $x_0\in E^n$.

Определение 7 ([6]). Отображение $x\colon \widetilde I\to E^n,\ \widetilde I\subset I_0$ называется *решением задачи (1)*, если оно слабо непрерывно и для всех $t\in\widetilde I$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds.$$

Теорема 5 ([6]). *Предположим, что отображение* $f\colon J_0\to E^n$ *слабо непрерывно и удовлетворяет условию Липшица по* x. *Тогда существует единственное решение* $x=x(t)$ *задачи (1), определенное на промежутке* $[t_0,t_0+\delta]$, *где*

$$\delta=\min\big\{T-t_0,\frac{b}{M}\big\},\ M=\sup_{(t,x)\in J_0}D(f(t,x),\widehat 0),\ \widehat 0\in E^n \text{ такое, что } \widehat 0(y)=\left\{\begin{array}{l}1, y=0,\\ 0, y\in\mathbb{R}^n\backslash 0.\end{array}\right.$$

Рассмотрим нечеткое импульсное дифференциальное уравнение вида

$$\dot x=f(t,x),\ t\ne\tau_i,\ x(t_0)=x_0, \tag{2}$$

$$x(\tau_i+0)=\psi(x(\tau_i)), \tag{3}$$

где правая часть $f\colon I_0\times E^n\to E^n$, импульсные функции $\psi_i\colon E^n\to E^n,\ i=\overline{1,m}$, начальное условие $x_0\in E^n$, моменты импульсов $\tau_i\in I_0, i=\overline{1,m}$ занумерованы в возрастающем порядке.

Определение 8. Отображение $x\colon I\to E^n$ называется *решением задачи (2), (3)*, если оно является решением задачи (2) на промежутках между импульсами и удовлетворяет условию скачка (3) в точках импульса.

В дальнейшем нам понадобится следующие вспомогательные утверждения:

Лемма 1. *Пусть* $x_j,\ y_j\in E^n,\ j=\overline{1,p}$. *Тогда*

$$D\big(\textstyle\sum_{j=1}^p x_j,\sum_{j=1}^p y_j\big)\le\sum_{j=1}^p D(x_j,y_j).$$

Доказательство. Воспользуемся определением расстояния между нечеткими множествами и свойствами расстояния по Хаусдорфу

$$D\Big(\sum_{j=1}^{p} x_j, \sum_{j=1}^{p} y_j\Big) = \sup_{0\le\alpha\le1} h\Big(\big[\sum_{j=1}^{p} x_j\big]^{\alpha}, \big[\sum_{j=1}^{p} y_j\big]^{\alpha}\Big) =$$
$$= \sup_{0\le\alpha\le1} h\Big(\sum_{j=1}^{p}[x_j]^{\alpha}, \sum_{j=1}^{p}[y_j]^{\alpha}\Big) \le \sup_{0\le\alpha\le1} \sum_{j=1}^{p} h\big([x_j]^{\alpha}, [y_j]^{\alpha}\big) \le$$
$$\le \sum_{j=1}^{p} \sup_{0\le\alpha\le1} h\big([x_j]^{\alpha}, [y_j]^{\alpha}\big) = \sum_{j=1}^{p} D(x_j, y_j),$$

что и требовалось доказать. □

Лемма 2. *Если неотрицательная функция $u(t)$ удовлетворяет при $t \ge t_0$ неравенству*

$$u(t) \le \alpha + \int_{t_0}^{t} [\beta + \gamma u(s)] ds, \tag{4}$$

где $\alpha \ge 0,\ \beta \ge 0,\ \gamma > 0$, то справедлива оценка $u(t) \le \big(\alpha + \frac{\beta}{\gamma}\big)e^{\gamma(t-t_0)} - \frac{\beta}{\gamma}$.

Доказательство. Перепишем (4) в виде

$$u(t) + \frac{\beta}{\gamma} \le \alpha + \frac{\beta}{\gamma} + \int_{t_0}^{t} \gamma\big[\frac{\beta}{\gamma} + u(s)\big] ds$$

и воспользуемся неравенством Гронуолла–Беллмана для функции $\widehat{u}(t) = u(t) + \frac{\beta}{\gamma}$. □

Рассмотрим вопрос о непрерывной зависимости решений от начальных данных и правых частей для нечетких импульсных дифференциальных уравнений вида:

$$\dot{x} = f_1(t, x),\ t \ne \tau_i,\ x(0) = x_0, \tag{5}$$
$$x(\tau_i + 0) = \psi_{1i}(x(\tau_i)), \tag{6}$$
$$\dot{y} = f_2(t, y),\ t \ne \tau_i,\ y(0) = y_0, \tag{7}$$
$$y(\tau_i + 0) = \psi_{2i}(y(\tau_i)), \tag{8}$$

где правые части $f_1, f_2 \colon I_0 \times E^n \to E^n$, импульсные функции $\psi_{1i}, \psi_{2i} \colon E^n \to E^n$, начальные условия $x_0, y_0 \in E^n$, моменты импульсов $\tau_i, i = \overline{1, m}$ занумерованы в возрастающем порядке.

Теорема 6. *Пусть в области $Q = \{t \in I_0,\ x \in D \subset E^n\}$ выполнены следующие условия:*
1) отображения $f_1(t, x)$ и $f_2(t, x)$ слабо непрерывны, удовлетворяют условию Липшица по x с постоянной $L > 0$ и существует такая постоянная η, что справедлива оценка

$$D(f_1(t, x), f_2(t, x)) \le \eta; \tag{9}$$

2) отображения $\psi_{1i}(x)$ и $\psi_{2i}(x)$ удовлетворяют условию Липшица с постоянной λ и удовлетворяют неравенству

$$D(\psi_{1i}(x), \psi_{2i}(x)) \le \eta. \tag{10}$$

Тогда для решений $x(t)$ и $y(t)$ задач (5), (6) и (7), (8), удовлетворяющих начальным условиям $x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0,\ D(x_0, y_0) \le \delta_0$, имеет место оценка

$$D(x(t), y(t)) \le \lambda^{i(t_0,t)} e^{L(t-t_0)} \delta_0 + C\eta, \tag{11}$$

где C — некоторая постоянная.

Доказательство. Для удобства положим $\tau_0 = t_0,\ \tau_{m+1} = T$. Введем следующие обозначения

$$\delta_i^- = D(x(\tau_i), y(\tau_i)), \quad \delta_i^+ = D(x(\tau_i + 0), y(\tau_i + 0)) -$$

расстояния между решениями $x(t)$ и $y(t)$ до и после i-го импульса, $\delta_0^- = \delta_0^+ = \delta_0$.

На промежутке $(\tau_i, \tau_{i+1}],\ i = \overline{0, m}$ решения систем (5), (6) и (7), (8) совпадают с решениями нечетких дифференциальных уравнений (5) и (7) соответственно, поэтому функции $x(t)$ и $y(t)$ удовлетворяют интегральным уравнениям

$$x(t) = x(\tau_i + 0) + \int_{\tau_i}^t f_1(s, x(s))\, ds, \tag{12}$$

$$y(t) = y(\tau_i + 0) + \int_{\tau_i}^t f_2(s, y(s))\, ds. \tag{13}$$

В силу условий теоремы, из (12) и (13)

$$D(x(t), y(t)) = D\left(x(\tau_i + 0) + \int_{\tau_i}^t f_1(s, x(s))\, ds, y(\tau_i + 0) + \int_{\tau_i}^t f_2(s, y(s))\, ds\right) \le$$

$$\le D(x(\tau_i + 0), y(\tau_i + 0)) + \int_{\tau_i}^t D(f_1(s, x(s)), f_2(s, y(s)))\, ds \le$$

$$\le \delta_i^+ + \int_{\tau_i}^t D(f_1(s, x(s)), f_1(s, y(s)))\, ds + \int_{\tau_i}^t D(f_1(s, y(s)), f_2(s, y(s)))\, ds \le$$

$$\le \delta_i^+ + \int_{\tau_i}^t [LD(x(s), y(s)) + \eta]\, ds.$$

Применяя обобщенное неравенство Гронуолла-Беллмана, получим

$$D(x(t), y(t)) \le \left(\delta_i^+ + \frac{\eta}{L}\right) e^{L(t - \tau_i)} - \frac{\eta}{L},\ t \in (\tau_i, \tau_{i+1}].$$

Таким образом,

$$\delta_{i+1}^- \le \left(\delta_i^+ + \frac{\eta}{L}\right) e^{L(\tau_{i+1} - \tau_i)} - \frac{\eta}{L}.$$

Кроме того, $\delta_i^+ = D(x(\tau_i + 0), y(\tau_i + 0)) = D(\psi_{1i}(x(\tau_i)), \psi_{2i}(y(\tau_i))) \le D(\psi_{1i}(x(\tau_i)), \psi_{1i}(y(\tau_i))) + D(\psi_{1i}(y(\tau_i)), \psi_{2i}(y(\tau_i))) \le \lambda D(x(\tau_i), y(\tau_i)) + \eta = \lambda \delta_i^- + \eta$.

Получаем следующую последовательность оценок

$$D(x(t), y(t)) \le \left(\delta_i^+ + \frac{\eta}{L}\right) e^{L(t - \tau_i)} - \frac{\eta}{L} \le \left(\lambda \delta_i^- + \eta + \frac{\eta}{L}\right) e^{L(t - \tau_i)} - \frac{\eta}{L} =$$

$$= \lambda \delta_i^- e^{L(t - \tau_i)} + \eta \left(\frac{e^{L(t - \tau_i)} - 1}{L} + e^{L(t - \tau_i)}\right) \le$$

$$\le \lambda \left(\left(\delta_{i-1}^+ + \frac{\eta}{L}\right) e^{L(\tau_i - \tau_{i-1})} - \frac{\eta}{L}\right) e^{L(t - \tau_i)} + \eta \left(\frac{e^{L(\tau_{i+1} - \tau_i)} - 1}{L} + e^{L(\tau_{i+1} - \tau_i)}\right) =$$

$$= \lambda \delta_{i-1}^+ e^{L(t - \tau_{i-1})} + \eta \left(\lambda\ \frac{e^{L(\tau_i - \tau_{i-1})} - 1}{L}\ e^{L(\tau_{i+1} - \tau_i)} + \frac{e^{L(\tau_{i+1} - \tau_i)} - 1}{L} + e^{L(\tau_{i+1} - \tau_i)}\right) \le \ldots \le$$

$$\le \lambda^i e^{L(t - t_0)} \delta_0 + C\eta,$$

где $C-$ некоторая постоянная, зависящая от λ, L и моментов импульсов τ_i. Теорема доказана. □

Отметим частные случаи доказанной теоремы. Пусть $\eta = 0$. Тогда $x(t)$ и $y(t)-$ решения одной и той же системы уравнений (5), но с разными начальными условиями. Для таких решений оценка (11) принимает вид $D(x(t), y(t)) \leq \lambda^{i(t_0,t)} e^{L(t-t_0)} \delta_0$, т.е.

$$D(x(t), y(t)) \leq \lambda^m e^{L(T-t_0)} \delta_0, \tag{14}$$

для всех $t \in I_0$.

Из неравенства (14) следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta(\varepsilon) = \varepsilon \lambda^{-m} e^{-L(T-t_0)}$, что если $\delta_0 = D(x_0, y_0) < \delta$, то $D(x(t), y(t)) < \varepsilon$ для всех $t \in I_0$. Это означает, что при выполнении условий теоремы решения системы (5) непрерывно зависят от начальных условий. Более того, как следует из оценки (14), эта зависимость не только непрерывна, но и липшицева, то есть решения системы уравнений (5) удовлетворяют условию Липшица по x_0 равномерно относительно $t \in I_0$.

Если же $\delta_0 = 0$, а $\eta \neq 0$, то имеем случай постоянно действующих возмущений, поэтому оценка (11) принимает вид $D(x(t), y(t)) \leq C\eta$, при всех $t \in I_0$.

Из этого неравенства следует, что для произвольного числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\eta = \eta(\varepsilon) = \frac{1}{C}\varepsilon$, что если только выполняются неравенства (9), (10), то $D(x(t), y(t)) < \varepsilon$ для всех $t \in I_0$.

Это утверждение выражает свойство непрерывности решений системы с импульсным воздействием (5) в некотором функциональном пространстве правых частей. В частности, если правые части системы (5) непрерывно зависят от некоторого параметра μ, то из полученных оценок следует непрерывность решений по данному параметру.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aumann R.J. *Integrals of set–valued functions* // J. Math. Anal. Appl. – 1965. – №12. – P. 1–12.
2. Kaleva O. *Fuzzy differential equations* // Fuzzy sets and systems. – 1987. – V. 24, №3. – P. 301–317.
3. Kaleva O. *The Cauchy problem for fuzzy differential equations* // Fuzzy sets and systems. – 1990. – V. 35, №3. – P. 389–396.
4. Laksmikantham V., Leela S., Vatsala A.S.*Interconnection between set and fuzzy differential equations* // Nonlinear Analysis. – 2003. – V. 54.– P. 351–360.
5. Negoita C.V., Ralescu D.A. Applications of fuzzy sets to systems analysis. – New York, Toronto: John Wiley and Sons, 1975.
6. Park J.Y., Han H.K. *Existence and uniqueness theorem for a solution of fuzzy differential equations* // Internat. J. Math. and Math. Sci. – 1999. – V. 22, №2. – P. 271–279.
7. Puri M.L., Ralescu D.A. *Differential of fuzzy functions* // J. Math. Anal. Appl. – 1983. – V. 91. – P. 552–558.
8. Puri M.L., Ralescu D.A. *Fuzzy random variables* // J. Math. Anal. Appl. – 1986. – V.114, №2. – P. 409–422.
9. Seikkala S. *On the fuzzy initial value problem* // Fuzzy Sets and Systems. – 1987. – V. 24, №3. – P. 319–330.
10. Song S.J., Wu C.X. *Existence and uniqueness of solutions to Cauchy problem of fuzzy differential equations* // Fuzzy Sets and Systems. – 2000. – V. 110. – P. 55–67.
11. Zadeh L. *Fuzzy sets* // Inform. and Control. – 1965. – №8. – P. 338–353.

Одесский национальный университет им.И.И.Мечникова
talie@ukr.net

Поступило 4.04.2007