УДК 517.5

К. Г. Малютін, В. О. Герасименко

ВІЛЬНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ЦІЛИМИ ФУНКЦІЯМИ СКІНЧЕННОГО ГАММА-ТИПУ

K. G. Malyutin, V. A. Gerasimenko. *Free interpolation by entire functions of finite gamma-type*, Matematychni Studii, **28** (2007) 45–50.

We obtain a criterion for the solvability of the free interpolation problem $F^{j-1}(a_k) = b_{k,j}$, $j \in \{1, 2, \ldots, q_k\}; k \in \mathbb{N}$, in the class of entire functions of finite γ-type, where $\gamma\colon [0; +\infty) \to (0; +\infty)$ is an increasing function.

К. Г. Малютин, В. А. Герасименко. *Свободная интерполяция целыми функциями конечного гамма-типа* // Математичні Студії. – 2007. – Т.28, №1. – С.45–50.

Получен критерий разрешимости задачи свободной интерполяция $F^{j-1}(a_k) = b_{k,j}$, $j \in \{1, 2, \ldots, q_k\}; k \in \mathbb{N}$, в классе целых функций конечного γ-типа, где $\gamma\colon [0; +\infty) \to (0; +\infty)$ — возрастающая функция.

Теорія інтерполяції аналітичними функціями, зародження якої пов'язане з іменами Ньютона і Лагранжа, є важливим розділом сучасного аналізу. Інтерес до цієї тематики обумовлений широкою сферою її застосувань в питаннях повноти систем аналітичних функцій в комплексній області, в теорії диференціальних рівнянь, рівнянь в згортках, крайових задачах, задачах оптимального керування та інших областях математики. Питаннями інтерполяції в класах цілих функцій займалися багато математиків. Вкажемо (без посилань на першоджерела) лише на імена С. А. Бернстейна, А. О. Гельфонда, В. Л. Гончарова, А. П. Гришина, Ю. Ф. Коробейника, Б. Я. Левіна, А. Ф. Леонтьєва, К. Г. Малютіна, Б. А. Тейлора та інш. Для класів цілих функцій нескінченного порядку задачі інтерполяції вивчені недостатньо повно. Ми вкажемо лише на дослідження Т. І. Абаніної ([1]), Б. В. Винницького і І. Б. Шепарович ([2]), до яких є близьким дане дослідження.

У даній статті ми будемо користуватись термінологією роботи [3]. Додатну, неперервну, зростаючу і необмежену функцію $\gamma(r)$, визначену для всіх $r > 0$, називатимемо *функцією зростання*. Скрізь у цій статті $\gamma(r)$ означатиме деяку функцію зростання. Позначимо через A і B довільні додатні сталі. Ці сталі можуть змінюватися за ходом тексту.

Нехай $\gamma(r)$ — деяка функція зростання, $r \geq 0$. Символом $\mathcal{E}(\gamma)$ позначимо клас цілих функцій скінченного γ-типу, тобто таких функцій , що нерівність $\ln|f(z)| \leq A\gamma(B|z|)$ виконується для всіх $z \in \mathbb{C}$ при деяких $A > 0$, $B > 0$, які не залежать від z.

Зазначимо, що якщо $\gamma(r) = r^{\rho(r)}$, де $\rho(r)$ — уточнений порядок ([4]), $\lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho > 0$, то простір $\mathcal{E}(\gamma) = [\rho(r), +\infty)$ є простором цілих функцій порядку $\rho(r)$ і типу не вищого

2000 *Mathematics Subject Classification:* 30E05.

за нормальний. За додаткового обмеження на функцію зростання

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\gamma(r)\ln\gamma(r)}{r\gamma'(r)}=+\infty, \tag{1}$$

простір $\mathcal{E}(\gamma)$ розглядався в [1]. Випадок, коли функція $\ln\gamma(r)$ опукла відносно $\ln r$, розглядався в [2]. У даній статті ми не обмежуємо себе умовою (1) та опуклістю $\ln\gamma(r)$ відносно $\ln r$, проте ми накладаємо обмеження:

$$\gamma\left(\frac{r}{\varphi(r)}\right)\le\frac{A\gamma(Br)}{\ln\varphi(r)}\,, \tag{2}$$

при деяких $A>0$, $B>0$ і довільній функції $\varphi(r)$, що задовольняє умову

$$\varphi(r)=o(r)\ (r\to\infty)\,. \tag{3}$$

Зазначимо, що якщо $\gamma(r)$ задовольняє умову (1) або така, що $\ln\gamma(r)$ — опукла відносно $\ln r$, то $\gamma(r)$ задовольняє умову (2).

Дивізор $D=\{a_k;q_k\}_{k=1}^{\infty}$ (тобто множина різних комплексних чисел a_k разом з їх кратностями q_k; $q_k\ge1$ - ціле число) називається *інтерполяційним в класі* $\mathcal{E}(\gamma)$, якщо для будь-якої послідовності комплексних чисел $b_{k,j}$, $j\in\{1,2,\ldots,q_k\}$, $k\in\mathbb{N}$, що задовольняють при деякому $B>0$ умову

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{\gamma(B|a_k|)}\ln\max_{1\le j\le q_k}\frac{|b_{k,j}|}{(j-1)!}<\infty\,, \tag{4}$$

існує ціла функція $F(z)$ з класу $\mathcal{E}(\gamma)$ з властивістю

$$F^{(j-1)}(a_k)=b_{k,j},\quad j\in\{1,2,\ldots,q_k\},\quad k\in\mathbb{N}\,. \tag{5}$$

Через $C(a,r)$ ми будемо позначати відкритий круг з центром в точці a радіуса r. Нехай $D=\{a_k;q_k\}_{k=1}^{\infty}$ — дивізор, G — множина в $\mathbb{C}$. Позначимо $n_D(G)=\sum\limits_{a_k\in G}q_k$. Введемо також такі позначення.

Якщо $D=\{a_k;q_k\}_{k=1}^{\infty}$ — дивізор, то $|D|=\bigcup_{k=1}^{\infty}a_k$. Включення $D\subset D'=\{s_n;p_n\}_{n=1}^{\infty}$ означає, що $|D|\subset|D'|$ і якщо $a_k=s_n$, то $q_k\le p_n$. Якщо f — ціла функція, то через D_f позначатимемо дивізор її коренів, через $n_f(G)$ — величини, побудовані за допомогою дивізора D_f. Надалі, не обмежуючи загальності, завжди припускатимемо, що $a_k\ne0$, $k\in\mathbb{N}$. Позначимо через $n_D(t)=n_D(C(0,t))$, і покладемо $N_D(r)=\int_0^r\frac{n_D(t)}{t}\,dt$.

Скажемо, що *дивізор D має скінченну γ-щільність*, якщо існують додатні сталі A і B такі, що $N(r,Z)\le A\gamma(Br)\quad r>0$.

Нехай $D\{a_k;q_k\}_{k=1}^{\infty}$ — дивізор. При $n=1,2,\ldots$ і $r\ge0$ визначимо

$$S(r;n,D)=\frac{1}{n}\sum_{|a_k|\le r}q_k{a_k}^{-n},\quad S'(r;n,D)=\frac{1}{n}\sum_{|a_k|\le r}q_k\left(\frac{\overline{a}_k}{r}\right)^n,$$

$$S(r_1,r_2;n,D)=S(r_2;n,D)-S(r_1;n,D),\quad r_2\ge r_1\ge0\,.$$

Якщо це не буде викликати непорозуміння, символ D опускатимемо і будемо писати $N(r)$, $S(r;n)$, ...

Дивізор D називається *γ-збалансованим*, якщо існують додатні сталі A і B, при яких

$$S(r_1,r_2;n)\le\frac{A\gamma(Br_1)}{r_1^n}+\frac{A\gamma(Br_2)}{r_2^n}$$

для всіх $r_2 > r_1 > 0$ і $n = 1, 2, \dots$.
Дивізор D називається γ–*допустимим*, якщо він γ–збалансований і має скінченну γ–щільність.

Якщо $f(z) \in \mathcal{E}(\gamma)$, то дивізор D_f є γ–допустимим ([3, теорема 4.2]).

Нехай дивізор D є γ–збалансованим, A, B — відповідні сталі. Нехай

$$p(\gamma) = \inf\left\{p \in \mathbb{N} : \varliminf_{r\to\infty} \frac{\gamma(r)}{r^p} = 0\right\}.$$

Якщо $\varliminf_{r\to\infty} \gamma(r) r^{-p} > 0$ для всіх цілих додатних p, то $p(\gamma) = \infty$. Для $1 \le k < p(\gamma)$, ми маємо $\inf_{r\ge 0} r^{-k}\gamma(Br) > 0$. Тоді існує додатне число r'_k таке, що $\gamma(Br'_k)(r'_k)^{-k} < 2\gamma(Br)r^{-k}$ для $r > 0$ і $1 \le k < p(\gamma)$. Для k в цьому випадку ми позначимо $\alpha_k = -S(r_k; k)$, де $r_k = \inf r'_k$.
Для $k \ge p(\gamma)$, ми виберемо послідовність $\{r_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\lim_{j\to\infty} r_j = \infty$, таку що

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\gamma(Br_j)}{r_j^{p(\gamma)}} = 0\,.$$

Для таких k ми позначимо $\alpha_k = -\lim_{j\to\infty} S(r_j; k)$. Зазначимо, що границя існує (див. доведення теореми 3.1 в [3]).

Елементи послідовності $\{c_k(r; D)\}$, $k \in \mathbb{Z}$, визначені за формулами $c_0(r) = N(r)$, $c_k(r) = r^k\{\alpha_k + S(r; k)\}/2 - S'(r; k)/2$ для $k \in \mathbb{N}$, $c_{-k}(r) = \overline{c_k(r)}$ для $k \in \mathbb{N}$, називаються *коефіцієнтами Фур'є дивізора D*.

Зазначимо, що наше означення коефіцієнтів Фур'є відрізняється від означення 2.6 в [3], у якому $c_k(r)$ залежать від послідовності α комплексних чисел.

Коефіцієнтами Фур'є цілої функції f називаємо

$$c_k(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\log|f(re^{i\theta})|)e^{-ik\theta}\, d\theta, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Використовуючи означення коефіцієнтів Фур'є дивізора D і теореми 2.1, 3.1, 3.2, 4.1, 4.2 з [3], сформулюємо таку теорему.

Теорема 1. *Нехай дивізор D є γ-допустимим і $\{c_k(r)\} = \{c_k(r; D)\}$, $k \in \mathbb{Z}$, — послідовність коефіцієнтів Фур'є дивізора D, тоді існує єдина ціла функція $E_D(z) \in \mathcal{E}(\gamma)$ така, що $D_E = D$, $E_D(0) = 1$, і $c_k(r; I_D) = c_k(r)$ для $k \in \mathbb{Z}$.*

Функцію $E_D(z)$ називаємо *узагальненим канонічним добутком дивізора D*.

Тепер ми в змозі сформулювати теорему, доведення якої складає зміст даної статті.

Теорема 2. *Нехай дивізор $D = \{a_k; q_k\}_{k=1}^{\infty}$ є γ-збалансованим. Для того, щоб дивізор D був інтерполяційним у класі $\mathcal{E}(\gamma)$, необхідно і досить, щоб при деякому $B > 0$ виконувалась умова:*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{\gamma(B|a_k|)} \ln \frac{q_k!}{|E^{(q_k)}(a_k)|} < \infty\,, \tag{6}$$

де $E(z)$ — узагальнений канонічний добуток дивізора D.

Доведення. Доведемо необхідність умови (6). З умов теореми випливає, що існує ціла функція $F(z)$ з класу $\mathcal{E}(\gamma)$, така що $F(a_1)^{(q_1-1)} = 1$, $F(a_1)^{(j-1)} = 0$, $j = 1, 2, \dots, q_1 - 1$, $F(a_k)^{(j-1)} = 0$, $j = 1, \dots, q_k$, $k = 2, 3, \dots$. Отже, дивізор D належить дивізору нулів функції $F(z)(z - a_1)$, який за теоремою 4.2 з [3] є γ-допустимим. Звідси випливає, що дивізор D має скінченну γ-щільність, а тому, за умовою теореми, є γ-допустимим. Нехай

$E(z)$ — узагальнений канонічний добуток дивізора D. Необхідність умови (6) доводиться далі стандартними міркуваннями (див., наприклад, [2]).

Перш ніж переходити до доведення достатності, встановимо ряд допоміжних тверджень. Позначимо $a_k = r_k e^{i\theta_k}$, $k \in \mathbb{N}$. Доведемо, що з (6) випливає нерівність

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{q_k \ln r_k}{\gamma(Br_k)} < \infty\,, \tag{7}$$

при деякому $B > 0$. Справді, запишемо формулу Пуассона-Єнсена для функції $E(z)$ в крузі $C(a_k, r_k/2)$

$$q_k \ln \frac{r_k}{2} + \int\limits_0^{r_k/2} \frac{n_D(C(a_k,t)) - q_k}{t}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln\left|E\left(a_k + \frac{r_k}{2}e^{i\theta}\right)\right| d\theta + \ln\frac{q_k!}{|E^{(q_k)}(a_k)|}\,. \tag{8}$$

Інтеграл, розташований у лівій частині (8), невід'ємний. Тоді (7) випливає з (6) і означення класу $\mathcal{E}(\gamma)$. Позначимо далі

$$P_{k,j} = \frac{1}{(j-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{j-1} \frac{(z-a_k)^{q_k}}{E(z)}\bigg|_{z=a_k}, \quad j \in \{1, 2, \dots, q_k\}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Для доведення наступної леми скористаємося методом запропонованим в [6, лема 3].

Лема 1. *Нехай дивізор $D = \{a_k; q_k\}_{k=1}^{\infty}$ задовольняє умову* (6), *тоді для деякого $B > 0$*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{\gamma(Br_k)} \max_{1\le j\le q_k} \ln\frac{|P_{k,j}|}{r_k^{q_k-j+1}} < \infty\,, \tag{10}$$

Доведення. Позначимо через $l_k = \min\left\{\frac{r_k}{2}; \operatorname{dist}(\{|D| \setminus a_k\}; a_k)\right\}$, $k \in \mathbb{N}$, де dist — відстань між множинами. Нехай, наприклад, $l_k = \operatorname{dist}\{a_k; a_m)\}$. Покладемо $G(\zeta) = E(a_m + \zeta)$, $r = r_m$. Зазначивши, що в цьому випадку $r_m > r_k/2 > |a_k - a_m|$, застосуємо до функції $G(\zeta)$ нерівність ([6])

$$|a|^q \ge \frac{|\varphi^{(p)}(0)|}{p!}\frac{r^{p+q}}{M}\,,$$

де $\varphi(\zeta)$ — функція аналітична в крузі $C(0,r)$, $|\varphi(\zeta)| \le M$, $\zeta \in C(0,r)$, p — кратність нуля $\varphi(\zeta)$ в точці $\zeta = 0$, а q — кратність нуля $\varphi(\zeta)$ в точці $\zeta = a$, $0 < |a| < r$. Маємо

$$l_k^{q_k} \ge \frac{|E^{(q_m)}(a_m)|}{q_m!} r_m^{q_m+q_k} \frac{1}{\max\limits_{|\zeta-a_m|\le r_m} |E(\zeta)|}\,. \tag{11}$$

З (6), (7) і (11) випливає, що

$$l_k^{q_k} \ge r_k^{q_k} \exp(-A\gamma(Br_k))\,, \tag{12}$$

при деяких $A, B > 0$. За умовою (7), ця нерівність правильна і тоді, коли $l_k = r_k/2$. Визначимо аналітичну в крузі $C(0,1)$ функцію $\psi(t)$ рівністю $t^{q_k}\psi(t) = E(a_k + l_k t)$. Тоді, $|\psi(0)| = \frac{|E^{(q_k)}(a_k)|r_k^{q_k}}{q_k!} l_k^{q_k}$ і за нерівностями (6) і (12) отримаємо

$$|\psi(0)| \ge \frac{|E^{(q_k)}(a_k)|r_k^{q_k}}{q_k!} \exp(-A\gamma(Br_k)) \ge \exp(-A\gamma(Br_k))$$

при деяких (можливо інших) $A, B > 0$. Крім того, при $|t| < 1$
$$|\psi(t)| \le \max_{|\zeta - a_k| \le l_k} |E(\zeta)| \le \exp(A\gamma(Br_k)).$$

Далі покладемо $g(t) = \psi(t)\psi^{-1}(0)$. Оскільки $g(t)$ не має коренів в крузі $C(0, 1/2)$ і $g(0) = 1$, то за теоремою Каратеодорі для круга ([4, Глава I, теорема 9]), при $|t| \le 1/4$ маємо $|g(t)| \ge \exp(-A\gamma(Br_k))$, $A, B > 0$. Звідки, $|E(a_k + \tau)| \ge \frac{\tau^{q_k}}{l_k^{q_k}} \exp(-A\gamma(Br_k))$, $A, B > 0$, при $|\tau| \le l_k/4$. За означенням (9) маємо

$$P_{k,j} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a_k|=l_k/4} \frac{(z-a_k)^{q_k-j}}{E(z)}\, dz\,. \tag{13}$$

Тому (10) випливає з означення l_k, (7) і (13). □

Покладемо далі

$$\alpha_{k,m} = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \sum_{j=0}^{q_k-m} \frac{1}{j!} P_{k,q_k+1-m-j} b_{k,j+1}, \quad m \in \{1, \dots, q_k\}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

$$P_k(z) = \sum_{m=1}^{q_k} \alpha_{k,m} \Big[\frac{1}{z-a_k}\Big(\frac{z}{a_k}\Big)^{S_k}\Big]^{(m-1)},$$

де $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ — послідовність натуральних чисел, яку ми виберемо нижче. Зауважимо ([5]), що формальний ряд

$$F(z) = E(z) \sum_{k=1}^{\infty} P_k(z) \tag{15}$$

розв'язує інтерполяційну задачу (5).

Доведемо, що за належного вибору послідовності $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$, функція $F \in \mathcal{E}(\gamma)$.

З умови (4), нерівності (10) і рівності (14) отримаємо, що для деяких $A, B > 0$ і для всіх $m \in \{1, \dots, q_k\}$, $k \in \mathbb{N}$,

$$|\alpha_{k,m}| \le \frac{q_k - m + 1}{(m-1)!} \exp(A\gamma(Br_k))\,. \tag{16}$$

Позначимо $u_{k,m}(z) = \Big[\frac{1}{z-a_k}\Big(\frac{z}{a_k}\Big)^{S_k}\Big]^{(m-1)}$, $m \in \{1, \dots, q_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, і оцінимо при $z \notin C(a_k, 2)$. Для цього позначимо через $C_z = \{t : |t - z| = 1\}$ і скористаємось інтегральною формулою Коші для $u_{k,m}(z)$ в крузі $C(z, 1)$, враховуючи при цьому, що якщо $|t - z| = 1$, то $|t - a_k| \ge 1$ і $|t| \le |z| + 1$,
$$|u_{k,m}(z)| = \frac{(m-1)!}{2\pi r_k^{S_k}} \Big| \int\limits_{C_z} \frac{t^{S_k} dt}{(t-a_k)(t-z)^m} \Big| \le \frac{(m-1)!(|z|+1)^{S_k}}{r_k^{S_k}}, \; m \in \{1, \dots, q_k\},\; k \in \mathbb{N}.$$
Звідси, з врахуванням означення функції $P_k(z)$ і (16), для деяких $A, B > 0$ і для всіх $z \notin C(a_k, 2)$ отримаємо $|P_k(z)| \le \sum_{m=1}^{q_k} |\alpha_{k,m}||u_{k,m}(z)| \le \exp(A\gamma(Br_k)) \frac{(|z|+1)^{S_k}}{r_k^{S_k}} \sum_{m=1}^{q_k} (q_k - m + 1) = \frac{\exp(A\gamma(Br_k)) q_k(q_k+1)}{2r_k^{S_k}} (|z|+1)^{S_k}$. Враховуючи нерівність (7), у результаті для деяких $A, B > 0$ отримаємо

$$|P_k(z)| \le \frac{\exp(A\gamma(Br_k))}{r_k^{S_k}} (|z|+1)^{S_k} = \left(\frac{e^2(|z|+1)}{r_k}\right)^{S_k} \frac{\exp(A\gamma(Br_k))}{e^{2S_k}}\,. \tag{17}$$

Нехай $S_k = [2A\gamma(Br_k)]$, $k \in \mathbb{N}$, де $[\cdot]$ — ціла частина числа. Тоді з (17) отримаємо

$$|P_k(z)| \le e \exp\{-A\gamma(Br_k)\} \left(\frac{e^2(|z|+1)}{r_k}\right)^{2A\gamma(Br_k)} . \tag{18}$$

Нехай x_r є точка максимуму функції $\left(\dfrac{e^2(r+1)}{x}\right)^{2A\gamma(Bx)}$. Зрозуміло, що $x_r < (r+1)e^2$. Якщо $qr < x_r < (r+1)e^2$ при деякому $q > 0$, то

$$\left(\frac{e^2(r+1)}{x_r}\right)^{2A\gamma(Bx_r)} \le \exp\{A_1\gamma(B_1 r)\} . \tag{19}$$

Якщо $x_r = r/\varphi(r)$, де $\varphi(r)$ задовольняє умову (3), то враховуючи нерівність (2) для деяких $A_1, B_1 > 0$ отримаємо

$$\left(\frac{e^2(r+1)}{x_r}\right)^{2A\gamma(Bx_r)} = \exp\{4A\gamma(Br/\varphi(r)) \ln \varphi(r)\} \le \exp\{A_1\gamma(B_1 r)\}. \tag{20}$$

Тоді з (18), (19) і (20) отримаємо $|P_k(z)| \le \exp(A_1\gamma(B_1|z|)) \exp(-A\gamma(Br_k))$, $k \in \mathbb{N}$. Звідси, для функції $F(z)$, яка визначається рівністю (15), отримаємо оцінку

$$|F(z)| \le \exp(A_1\gamma(B_1|z|)) \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-A\gamma(Br_k)) \le \exp(A\gamma(B|z|)) .$$

Ряд збіжний позаяк дивізор D має скінченну γ-щільність. $\square$

ЛІТЕРАТУРА

1. Абанина Т.И. *Интерполяционная задача в пространствах целых функций сколь угодно быстрого роста* // Изв. вузов. Матем. – 1990. – Т. 4. – С.72–74.
2. Винницький Б.В., Шепарович І.Б. *Про інтерполяційні послідовності деяких класів цілих функцій* // Математичні Студіі. – 1999. – Т. 12, №1. – С. 76–84.
3. Кондратюк А.А. Ряды Фурье и мероморфные функции. – Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1988. – 196 с.
4. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. – М.: Гос.-тех. издат., 1956. – 632 с.
5. Малютин К.Г. *Ряды Фурье и дельта-субгармонические функции конечного гамма-типа в полуплоскости* // Матем. сб. – 2001. – Т. 192, №6. – С. 51–70.
6. Трошин Г.Д. *Об интерполировании функций, аналитических в угле* // Матем. сб. – 1957. – Т. 39, №2. – С. 239–252.

Сумський національний аграрний університет
malyutinkg@yahoo.com

Надійшло 5.03.2007