УДК 517.5

В. М. Дільний

ПРО УТОЧНЕННЯ ОДНІЄЇ ОЦІНКИ ДОБУТКУ НЕВАНЛІННИ-ВЕЙЄРШТРАССА

V. M. Dil'nyi. *On specification of an estimate of Nevanlinna-Weierstrass' product*, Matematychni Studii, **28** (2007) 41–44.

Let (λ_n) be a sequence, $\lambda_n \in \mathbb{C}_+ = \{z : \mathrm{Re} z > 0\}$. If $\lim\limits_{r\to+\infty} \big(\sum\limits_{|\lambda_n|\leqslant 1} \mathrm{Re}\lambda_n + \sum\limits_{1<|\lambda_n|\leqslant r} \big(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{r^2}\big) \frac{\mathrm{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|} - \frac{\sigma}{\pi} \ln r\big) = -\infty$, then for the first genus Nevanlinna-Weierstrass' product Π^* in the half-plane $\mathbb{C}_+$ the estimate $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(\frac{\ln\left|\Pi^*(x+iy)\right|}{x} - \frac{2\sigma}{\pi} \ln x\big) = -\infty$ is true uniformly in y on each interval $[a; b] \subset \mathbb{R}$.

В. Н. Дильный. *Об уточнении одной оценки произведения Неванлинны-Вейерштрасса* // Математичні Студії. – 2007. – Т.28, №1. – С.41–44.

Пусть (λ_n) — последовательность из $\mathbb{C}_+ = \{z : \mathrm{Re} z > 0\}$. Показано, что если $\lim\limits_{r\to+\infty} \big(\sum\limits_{|\lambda_n|\leqslant 1} \mathrm{Re}\lambda_n + \sum\limits_{1<|\lambda_n|\leqslant r} \big(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{r^2}\big) \frac{\mathrm{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|} - \frac{\sigma}{\pi} \ln r\big) = -\infty$, то для произведения Неванлинны-Вейерштрасса первого рода Π^* в полуплоскости $\mathbb{C}_+$ справедлива равномерная по y на каждом промежутке $[a; b] \subset \mathbb{R}$ оценка $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(\frac{\ln\left|\Pi^*(x+iy)\right|}{x} - \frac{2\sigma}{\pi} \ln x\big) = -\infty$.

Нехай (λ_n) — послідовність точок із $\mathbb{C}_+ = \{z : \mathrm{Re} z > 0\}$, $S(r) = \sum\limits_{1<|\lambda_n|\leqslant r} \left(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{r^2}\right) \frac{\mathrm{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|}$, а $\Pi^*(z) = \prod\limits_{|\lambda_n|\leqslant 1} \dfrac{z-\lambda_n}{z+\overline{\lambda}_n} \prod\limits_{|\lambda_n|>1} \dfrac{1-z/\lambda_n}{1+z/\overline{\lambda}_n} \exp\left(\dfrac{z}{\lambda_n} + \dfrac{z}{\overline{\lambda}_n}\right)$ відповідний добуток Неванлінни-Вейєрштрасса. В [1] доведено, що якщо

$$\sum_{|\lambda_n|\leqslant 1} \mathrm{Re}\lambda_n < +\infty, \quad \varlimsup_{r\to+\infty} \left(S(r) - \frac{\sigma}{\pi} \ln r\right) < +\infty, \tag{1}$$

то добуток Π^* збігається абсолютно і рівномірно на кожному компакті із $\mathbb{C}_+$, функція Π^* має майже скрізь (м. с.) на $\partial\mathbb{C}_+$ кутові граничні значення $\Pi^*(iy)$, модуль яких дорівнює 1 і правильна оцінка (тут і далі c_j — додатні сталі, якщо не вказано іншого)

$$|\Pi^*(z)| \leqslant c_1 \exp\left(\frac{2\sigma}{\pi} x \ln r + c_1 x\right), z = x + iy = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}_+. \tag{2}$$

В [2] за додаткової умови $\varlimsup\limits_{r\to+\infty} \frac{1}{r} \sum\limits_{1<|\lambda_n|\leqslant r} \cos\arg\lambda_n < +\infty$ доведено, що

$$|\Pi^*(z)| \leqslant c_2 \exp\left(2xS_0(r) + c_2 x\right), \quad z \in \mathbb{C}_+, \; S_0(r) = \sum_{1<|\lambda_n|\leqslant r} |\lambda_n|^{-2} \mathrm{Re}\lambda_n.$$

У зв'язку з дослідженнями деяких рівнянь типу згортки (див. [5], [6]) виникає потреба у додаткових оцінках добутків Неванлінни-Вейєрштраса зверху і знизу поблизу дійсної півосі. Доведемо таку теорему.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 30D50, 30D55.

Теорема 1. *Нехай* (λ_n) *— послідовність точок із* $\mathbb{C}_+$. *Якщо виконується*

$$\sum_{|\lambda_n|\leqslant 1} \operatorname{Re}\lambda_n < +\infty, \lim_{r\to+\infty}\Big(S(r) - \frac{\sigma}{\pi}\ln r\Big) = -\infty, \tag{3}$$

то рівномірно по y *на кожному відрізку* $[a, b] \subset \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln|\Pi^*(x+iy)|}{x} - \frac{2\sigma}{\pi}\ln x\right) = -\infty. \tag{4}$$

У доведенні теореми 1 істотно використовуємо опис повних мір (в термінології А. Грішина), встановлений в [3]. Зазначимо також, що теорему 1 можна, напевно, отримати, розвиваючи методи, застосовані в [1].

Нехай $H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+), \sigma > 0,$ — простір аналітичних у $\mathbb{C}_+$ функцій, для яких

$$||f|| = \sup_{z\in\mathbb{C}_+}\left\{|f(z)|e^{-\sigma|\mathrm{Im} z|}\right\} < +\infty.$$

Відомо, що [4] функції із цього простору мають м. с. на $\partial\mathbb{C}_+$ кутові граничні значення, які теж позначаємо через $f(iy)$ і $f(iy) \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Для доведення теореми 1 наведемо одне допоміжне твердження, що є частинним випадком результату з [3] (див. також [7]).

Лема. *Нехай послідовність* λ_n *із* $\mathbb{C}_+$ *і функція* $f\colon \partial\mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}$ *задовольняють умови (1),* $\ln|f(iy)| \in L^1(-1; 1), f(iy)e^{-\sigma|y|} \in L^\infty(\mathbb{R}),\ \overline{\lim_{r\to+\infty}}\,(S(r) - K_f(r)) < +\infty$, *де* $K_f(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{1<|t|\leqslant r}\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right)\ln|f(it)|dt$. *Тоді функція*

$$f(z) = \Pi^*(z)\exp\left\{\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(tz+i)^2}{(1+t^2)^2(t+iz)}\ln|f(it)|dt\right\}$$

задовольняє умову $(\exists c \in [0; +\infty))\colon\ f(z)e^{-cz} \in H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$, *а інтеграл у показнику збігається абсолютно і рівномірно на кожному компакті із* $\mathbb{C}_+$.

Доведення теореми 1. З рівності (3) випливає існування такої функції $\eta\colon [1 : +\infty) \to \mathbb{R}$, що $\eta(r) \geqslant S(r) - \frac{\sigma}{\pi}\ln r,\ \lim_{r\to+\infty}\eta(r) = -\infty$, причому без обмеження загальності можна вважати, що функція η є спадною, неперервною і функція $r\eta(r)$ є опуклою вниз на $[1; +\infty)$. Тоді визначимо функцію η_1 як $\eta_1(k) = \eta(k) - \eta(1), k \in \mathbb{N}$, а на кожному проміжку $(k; k+1)$ продовжимо її лінійно з кінців відрізка. Отже, функція η_1 є спадною, неперервною, кусково-диференційовною на $[1; +\infty)$, $\eta_1(r) \to -\infty$ при $r \to +\infty$ і $\eta_1(1) = 0$. Тоді знайдеться така функція $f_1\colon \partial\mathbb{C}_+\backslash(-i; i) \to [1; +\infty)$, $f_1(iy) = f_1(-iy), y \in \mathbb{R}$, що

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{1<|t|\leqslant r}\frac{1}{t^2}\ln f_1(it)dt = -\eta_1(r). \tag{5}$$

А оскільки $(-\eta_1(r)r)' = -\eta_1'(r)r - \eta_1(r) < c$ для деякого $c > 0$ при всіх $r \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, то $-\eta_1'(r) < c/r$, з чого отримуємо $f_1(iy)e^{-\sigma|y|} \in L^\infty(\mathbb{R})$. З (5) маємо $\lim_{r\to+\infty}K_{f_1}(r) = +\infty$, бо припустивши протилежне і врахувавши, що $\ln f_1(it) \geqslant 0, t \in \mathbb{R}$, отримали б, як і в [3] $\frac{1}{2\pi}\int_{1<|t|\leqslant r}\frac{1}{t^2}\ln f_1(it)dt < c_3$, де c_3 від $r \in [1; +\infty)$ не залежить, що суперечить (5). Розглянемо функцію $f_2(z) = \Pi^*(z)e^{-\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z}\exp\left\{-\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(tz+i)^2}{(t^2+1)^2(t+iz)}\ln f_1(it)dt\right\}$. Вона задовольняє умови леми. Справді, за побудовою функції f_1 маємо $\ln|f_1(iy)e^{-\sigma|y|}| \in$

$L^1(-1;1)$, $\frac{1}{f_1(iy)} \in L^\infty(\mathbb{R})$. Крім цього, $\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \big(S(r) - \frac{\sigma}{\pi}\ln r + K_{f_3}(r)\big) < +\infty$, тобто умови леми для функції f_2 виконуються. Тому $(\exists c \in [0;+\infty))\colon\ f_2(z)e^{-cz} \in H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Оскільки $\Pi^*(z) = f_2(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z}f_3(z)$, де $f_3(z) = \exp\Big\{\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(tz+i)^2}{(t^2+1)^2(t+iz)}\ln f_1(it)dt\Big\}$, і ([4, c.30]) з (1) випливає, що добуток $f_4(z) = \prod_{|\lambda_n|\leqslant 1}(z-\lambda_n)/(z+\overline{\lambda}_n)$ збігається в $\mathbb{C}_+$ і $|f_4(z)| \leqslant 1, z \in \mathbb{C}_+$, то для доведення (4) досить встановити, що $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln|f_3(x+iy)| = -\infty$ рівномірно по y на кожному відрізку $[a;b] \subset \mathbb{R}$. Оскільки $f_1(it) = |f_3(it)|$ м. с. на $\mathbb{R}$, то беручи дійсну частину від виразу в експоненті для f_3, отримаємо $\frac{1}{x}\ln|f_3(x+iy)| = -\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^2x^2}{\pi(t^2+1)^2((t-y)^2+x^2)}\ln|f_3(it)|dt + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(1+2t^2+2t^3y-t^2y^2\right)\ln|f_3(it)|dt}{\pi(t^2+1)^2((t-y)^2+x^2)} = -I_1 + I_2$.

Але, $|f_3(it)| \leqslant ce^{\sigma|t|}$, тому $I_2 \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+2t^2}{\pi(t^2+1)^2((t-y)^2+x^2)}\sigma|t|dt + \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^3|y|}{(t^2+1)^2((t-y)^2+x^2)}\sigma|t|dt \leqslant$

$\leq \frac{2\sigma}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{|t|dt}{(t^2+1)((t-y)^2+x^2)} + \frac{2|y|\sigma}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(t-y)^2+x^2} \leqslant c_5 + c_6|y|$, де c_5 та c_6 від $x > 1$ та y не залежать. До того ж, $I_1 \geqslant \int\limits_{1<|t|\leqslant x}\frac{t^2x^2\ln|f_3(it)|dt}{\pi(t^2+1)^2((t-y)^2+x^2)} \geqslant c_7\frac{1}{4\pi}\int\limits_{1<|t|\leqslant x}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{x^2}\right)\ln|f_3(it)|dt = \frac{c_7}{2}K_{f_3}(x)$, де $c_7 = \min\left\{\frac{x^2}{(x+|y|)^2+x^2}\colon y \in [a;b]\right\} > 0$ залежить тільки від a та b. Тому з $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln|f_3(x+iy)| = -\infty$ отримуємо рівність (4). $\square$

Нехай $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+), 1 \leqslant p < +\infty, \sigma \geqslant 0,$ — простір функцій, аналітичних у $\mathbb{C}_+$, для яких

$$\sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2}}\Big\{\int\limits_0^{+\infty}|f(re^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma r|\sin\varphi|}dr\Big\}^{1/p} < +\infty.$$

Цей клас є узагальненням простору Гарді $H^p(\mathbb{C}_+)$ у півплощині. Останній ([8]) одержуємо, коли $\sigma = 0$. Простори $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ вивчалися в [1], [10]. Там, зокрема, встановлено, що функції $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ мають майже скрізь (м. с.) на $\partial\mathbb{C}_+$ кутові граничні значення, які теж позначаємо через $f(iy)$, і $f(iy)e^{-\sigma|y|} \in L^p(\mathbb{R})$. Теорему 1 використовуємо для доведення такого твердження.

Теорема 2. *Для того, щоб послідовність (λ_n), $\lambda_n \in \mathbb{C}_+$, була послідовністю нулів деякої функції $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1 \leqslant p < +\infty, \sigma > 0$, для якої*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln|f(x)|}{x} = -\infty,$$

необхідно і досить, щоб виконувалася умова (3).

Для доведення теореми розглянемо простори $E^p[\mathbb{C}(\alpha,\beta)], 0 < \beta-\alpha < 2\pi, 1 \leqslant p < \infty$, функцій, аналітичних у куті $\mathbb{C}(\alpha,\beta) = \{z\colon \alpha < \arg z < \beta\}$, для яких

$$\sup_{\alpha<\varphi<\beta}\Big\{\int_0^{+\infty}|f(re^{i\varphi})|^p dr\Big\} < +\infty.$$

Ці простори досліжувалися в [11]. Там, зокрема, доведено, що функції з цих просторів мають м. с. на $\partial\mathbb{C}(\alpha,\beta)$ кутові граничні значення, які теж позначатимемо через f і $f \in L^p[\partial\mathbb{C}(\alpha,\beta)]$.

Доведення теореми 2. Необхідність. Нехай для функції $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ виконується умова $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln|f(x)|}{x} = -\infty$. Тоді можемо вважати, що $\ln|f(x)| \leqslant x\eta(x)$, $x \geqslant 1$, де $\eta\colon [1;+\infty) \to \mathbb{R}$ неперервна монотонно спадна до $-\infty$ функція і $\eta(1) < 0$. Утворимо послідовність додатних дійсних чисел (β_n): $\beta_1 = -2/\eta(1)$, $\beta_n = \min\big\{t \geqslant 1\colon -\eta(t) - 2\big(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\beta_k} + \frac{1}{t}\big) \geqslant 0\big\}, n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$. Якщо $\overline{\lim}_{r\to+\infty}\frac{1}{r}\sum_{1<|\beta_n|\leqslant r}1 = +\infty$, то перепозначимо $\beta_n = n-1, n \in \mathbb{N}$, тому можемо вважати, що $\overline{\lim}_{r\to+\infty}\frac{1}{r}\sum_{1<|\lambda_n|\leqslant r}\cos\arg\beta_n < +\infty$.

Позначивши $S_0^*(r)=\sum_{1<|\beta_n|\leqslant r}|\beta_n|^{-2}\mathrm{Re}\beta_n$, $S^*(r)=\sum_{1<|\beta_n|\leqslant r}\left(\frac{1}{|\beta_n|}-\frac{|\beta_n|}{r^2}\right)\frac{\mathrm{Re}\beta_n}{|\beta_n|}$, за побудовою послідовності (β_n) маємо $\overline{\lim}_{r\to+\infty}S_0^*(r)=+\infty$, а врахувавши (див. зауваження 3 в [1]), що $S^*(r)=S_0^*(r)+O(1)$ за умовою $\overline{\lim}_{r\to+\infty}\frac{1}{r}\sum_{1<|\lambda_n|\leqslant r}\cos\arg\beta_n<+\infty$, отримуємо, врахувавши неспадання функції S^*, $\lim_{r\to+\infty}S^*(r)=+\infty$. Позначимо

$$\Pi^{**}(z)=\prod_{|\beta_n|\leqslant 1}\frac{z-\beta_n}{z+\overline{\beta}_n}\times\prod_{|\beta_n|>1}\frac{1-z/\beta_n}{1+z/\overline{\beta}_n}\exp\left(\frac{z}{\beta_n}+\frac{z}{\overline{\beta}_n}\right).$$

Тоді внаслідок зауваження перед теоремою 1, виходячи зі способу побудови послідовності (β_n), маємо $|f(x)\Pi^{**}(x)|\leqslant c_3e^{x\eta(x)}\exp\left(2xS_0^*(x)+c_3x\right)\leqslant c_4e^{c_4x}, x\geqslant 1$. Але функція $\psi(z)=(1+z)^{-2}f(z)\Pi^{**}(z)e^{i\sigma z-c_4z}$ задовольняє умови теореми типу Фрагмена-Ліндельофа (див. [9]), бо $\psi\in L^p\left[\partial\mathbb{C}(0;\pi/2)\right]$ і $\sup_{0<\varphi<\pi/2}\left\{\int_0^{+\infty}|\psi(re^{i\varphi})|^pe^{-\varepsilon r^2}dr\right\}<+\infty$ для кожного $\varepsilon>0$. Тому $\psi\in E^p\left[\mathbb{C}(0;\pi/2)\right]$. Подібно $(1+z)^{-2}f(z)\Pi^{**}(z)e^{-i\sigma z-c_4z}\in E^p\left[\mathbb{C}(-\pi/2;0)\right]$, тому $(1+z)^{-2}f(z)\Pi^{**}(z)e^{-c_4z}\in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, звідки ([10]) отримуємо $\overline{\lim}_{r\to+\infty}\left(S(r)+S^*(r)-\frac{\sigma}{\pi}\ln r\right)<+\infty$, а врахувавши рівність $\lim_{r\to+\infty}S^*(r)=+\infty$, також (3).

Достатність. Нехай для послідовності (λ_n), $\lambda_n\in\mathbb{C}_+$, виконується умова (3). Тоді, позначивши $f(z)=(1+z)^{-2}e^{-\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z}\Pi^*(z)$, маємо $f\in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1\leqslant p<+\infty$, і за теоремою 1, виконується умова $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\ln|f(x)|=-\infty$,. □

Література

1. Винницкий Б. В. *О нулях функций, аналитических в полуплоскости, и полноте систем экспонент*// Укр. мат. журн. –1994. – Т.46, №5. –С.484–500.
2. Винницкий Б. В., Шаповаловский А.В. *О полноте систем экспонент с весом*// Укр. мат. журн. –1989. – Т.41, №12. –С.1695–1700.
3. Vynnytskyi B. V., Sharan V. L. *On the factorization of one class of functions analytic in the half-plane*// Matematychni Studii. –2000. – V.14, №1. – P.41–48.
4. Говоров Н. В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом. –М.: Наука, 1986. –240 с.
5. Винницький Б. В., Дільний В. М. *Про необхідні умови існування розв'язків одного рівняння типу згортки*// Матем. студії. – 2001. – Т.16, №1. – С.61–70.
6. Винницкий Б. В., Дильный В. Н. *Об обобщении теоремы Бёрлинга–Лакса*// Матем. заметки – 2006. – Т.79. №3. – С.362-368.
7. *Erratum*// Матем. студії. – 2001. – Т.16, №1. – С.110.
8. Седлецкий А.М. *Эквивалентное определение пространств H^p в полуплоскости и некоторые приложения*// Математический сборник. – 1975. – Т.96, №1. – С.75–82.
9. Martirosian V. *On a theorem of Djrbashian of the Phragmen-Lindelöf type*// Math. Nachr. – 1989. – V.144. – P.21–27.
10. Винницький Б. В. *Про нулі деяких класів функцій, аналітичних в півплощині*// Матем. студії. – 1997. – Т.7, №1. – С.41–52.
11. Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. –М.:Наука. – 1966. –672 с.

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка
інститут фізики, математики та інформатики, кафедра математичного аналізу.
dilnyi@ukr.net

Надійшло 31.08.2006

Після переробки 28.03.2007