УДК 517.76

Л. Л. Лугова, М. М. Шеремета

ПРО ТРИЧЛЕННУ СТЕПЕНЕВУ АСИМПТОТИКУ ЦІЛОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ

L. L. Lugova, M. M. Sheremeta. *On three–member power asymptotic of an entire Dirichlet series.*, Matematychni Studii, **28** (2007) 37–40.

Conditions on the exponents of an entire Dirichlet series $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{(\sigma+it)\lambda_n}$, are found, under which the asymptotic inequalities $\ln M(\sigma) \le T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{p_2} + (\tau + o(1))\sigma^p$ and $\ln\mu(\sigma) \le T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{p_2} + (\tau + o(1))\sigma^p$ as $\sigma \to +\infty$ are equivalent, where $M(\sigma) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$, $\mu(\sigma) = \max\{|a_n|\exp(\sigma\lambda_n) : n \ge 0\}$ and $p_1 > 1$, $0 < p < p_2 < p_1$, $T_1 > 0$, $T_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\tau \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Л. Л. Лугова, М. М. Шеремета. *О трехчленной степенной асимптотике целого ряда Дирихле* // Математичні Студії. – 2007. – Т.28, №1. – С.37–40.

Найдены условия на показатели целого ряда Дирихле $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{(\sigma+it)\lambda_n}$, при которых асимптотические неравенства $\ln M(\sigma) \le T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{p_2} + (\tau + o(1))\sigma^p$ и $\ln\mu(\sigma) \le T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{p_2} + (\tau + o(1))\sigma^p$ при $\sigma \to +\infty$ равносильны, где $M(\sigma) = \sup\{|F(\sigma+it)| : t \in \mathbb{R}\}$, $\mu(\sigma) = \max\{|a_n|\exp(\sigma\lambda_n) : n \ge 0\}$, а $p_1 > 1$, $0 < p < p_2 < p_1$, $T_1 > 0$, $T_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ и $\tau \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

1. Вступ. Нехай $\Lambda = (\lambda_n)$ – зростаюча до $+\infty$ послідовність додатних чисел, $\lambda_0 = 0$, $n(t) = \sum_{\lambda_n \le t} 1$ — лічильна функція послідовності (λ_n), а $S(\Lambda)$ — клас цілих рядів Діріхле $F(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{z\lambda_n\}, z = \sigma + it$. Приймемо $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$, і нехай $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n|\exp\{\sigma\lambda_n\} : n \ge 1\}$ — максимальний член ряду, а $\nu(\sigma, F) = \max\{n : \mu(\sigma, F) = |a_n|\exp\{\sigma\lambda_n\}\}$ — його центральний індекс. Зростання цілого ряду Діріхле ототожнюється зі зростанням функції $\ln M(\sigma, F)$, а зв'язок між зростанням $\ln M(\sigma, F)$ і поводженням коефіцієнтів a_n переважно вивчають у два етапи. Спочатку встановлюють зв'язок між зростанням функції $\ln\mu(\sigma, F)$ і поводженням коефіцієнтів a_n, а потім досліджують умови на показники λ_n, за яких $\ln M(\sigma, F)$ і $\ln\mu(\sigma, F)$ мають однакове зростання в тій чи іншій шкалі зростання. У термінах тричленної степеневої асимптотики зв'язок між зростанням $\ln\mu(\sigma, F)$ і поводженням послідовностей (a_n) і (λ_n) досліджено в [1], де доведено таку теорему.

Теорема A ([1]). *Нехай $p_1 > 1$, $0 < p < p_2 < p_1$, $T_1 > 0$, $T_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\tau \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ і $\tau^* = \tau I_{\{p: p \ge 2p_2 - p_1\}}(p) - \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)} I_{\{p: p \le 2p_2 - p_1\}}(p)$, де $I_E(p)$- характеристична функція множини E, тобто $I_E(p) = 1$ для $p \in E$ і $I_E(p) = 0$ для $p \notin E$. Тоді для того, щоб*

$$\ln\mu(\sigma, F) = T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{p_2} + (\tau + o(1))\sigma^p, \qquad \sigma \to +\infty,$$

необхідно, а у випадку, коли $p \ge 2p_2 - p_1$, і досить, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$:

2000 *Mathematics Subject Classification:* 30D15.

1) існувало $n_0 = n_0(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n \geq n_0$

$$\ln|a_n| \leq -T_1(p_1-1)\Big(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)} + T_2\Big(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{p_2/(p_1-1)} + (\tau^*+\varepsilon)\Big(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{\frac{\max\{p,\,2p_2-p_1\}}{p_1-1}};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$$\ln|a_{n_k}| \geq -T_1(p_1-1)\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)} + T_2\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p_2/(p_1-1)} + (\tau^*-\varepsilon)\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{\frac{\max\{p,\,2p_2-p_1\}}{p_1-1}}$$

і

$$\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o\Big(\lambda_{n_k}^{\frac{p_1+\max\{p,\,2p_2-p_1\}-2}{2(p_1-1)}}\Big), \qquad k \to \infty.$$

Доведемо таку теорему.

Теорема 1. *Якщо*

$$\ln\, n(t) = o(t^{p/p_1}), \quad t \to +\infty, \tag{1}$$

то співвідношення $\ln\mu(\sigma, F) = T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{p_2} + (\tau + o(1))\sigma^p$ і $\ln M(\sigma, F) = T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{p_2} + (\tau + o(1))\sigma^p$, $\sigma \to +\infty$, є рівносильними.

На істотність умови (1) в теоремі 1 вказує така теорема.

Теорема 2. *Для того, щоб для кожної функції $F \in S(\Lambda)$ співвідношення $\ln\mu(\sigma, F) \leq T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{p_2} + (\tau + o(1))\sigma^p$ і $\ln M(\sigma, F) \leq T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{p_2} + (\tau + o(1))\sigma^p$, $\sigma \to +\infty$, були рівносильними, досить, а у випадку, коли $p \geq 2p_2 - p_1$, і необхідно, щоб послідовність Λ задовольняла умову (1).*

2. Доведення теореми 1 і достатності умови (1) у теоремі 2. Спочатку доведемо таке загальне твердження.

Твердження 1. *Нехай $T_1 > 0$, $p_1 > 1, 0 < p < p_m < \cdots < p_2 < p_1$, $T_j \in \mathbb{R}$ $(j = 1, \ldots, m)$ і $T \in \mathbb{R}$. Тоді, якщо виконується умова (1), то з асимптотичної нерівності*

$$\ln\mu(\sigma, F) \leq \sum_{j=1}^{m} T_j\sigma^{p_j} + (T + o(1))\sigma^p, \quad \sigma \to +\infty, \tag{2}$$

випливає асимптотична нерівність

$$\ln M(\sigma, F) \leq \sum_{j=1}^{m} T_j\sigma^{p_j} + (T + o(1))\sigma^p, \quad \sigma \to +\infty. \tag{3}$$

Доведення твердження 1. У доведенні теореми 1 з [2] встановлено, що

$$M(\sigma, F) \leq \mu(\sigma, F)\bigg(n(2\lambda_{\nu(\sigma+1,F)}) + \int_{2\lambda_{\nu(\sigma+1,F)}}^{\infty} e^{-t/2}dn(t)\bigg). \tag{4}$$

Оскільки $p/p_1 < 1$, то з умови (1) випливає збіжність інтегралу $\int_0^\infty e^{-t/2}dn(t)$ і, отже,

$$\int_{2\lambda_{\nu(\sigma+1,F)}}^{\infty} e^{-t/2}dn(t) \to 0, \quad \sigma \to +\infty. \tag{5}$$

З іншого боку, $\ln\,\mu(\sigma+2,F)-\ln\,\mu(\sigma+1,F)=\int_{\sigma+1}^{\sigma+2}\lambda_{\nu(t,F)}dt\geq\lambda_{\nu(\sigma+1,F)}$ і тому з огляду на умову (1)

$$\ln\,n(2\lambda_{\nu(\sigma+1,F)})=o\big(\lambda_{\nu(\sigma+1,F)}^{p/p_1}\big)=o\big(\ln^{p/p_1}\,\mu(\sigma+2,F)\big),\quad \sigma\to+\infty. \tag{6}$$

З (4) — (6) і (2) легко отримуємо

$$\begin{aligned}\ln\,M(\sigma,F)\ &\leq\ \ln\,\mu(\sigma,F)+\ln\,n(2\lambda_{\nu(\sigma+1,F)})+o(1)\leq\ln\,\mu(\sigma,F)+o\big(\ln^{p/p_1}\,\mu(\sigma+2,F)\big)\leq\\ &\leq\ \sum_{j=1}^{m}T_j\sigma^{p_j}+(T+o(1))\sigma^p+o(\sigma^p),\quad \sigma\to+\infty,\end{aligned} \tag{7}$$

тобто маємо асимптотичну нерівність (3). □

Доведення теореми 1. Якщо виберемо $m=2$ і $T=\tau$, то з твердження 1 отримаємо достатність умови (1) у теоремі 2. Далі, з нерівності (7) і нерівності Коші $\mu(\sigma,F)\leq M(\sigma,F)$, при $\sigma\to+\infty$, маємо $0\leq\ln\,M(\sigma,F)-\ln\,\mu(\sigma,F)=o\big(\ln^{p/p_1}\,\mu(\sigma+2,F)\big)=o\big(\ln^{p/p_1}\,M(\sigma+2,F)\big)=o\big(\sigma^p\big)$, якщо виконується одне зі співвідношень, що розглядаються у Теоремі 1, а звідси випливає еквівалентність цих співвідношень. Теорему 1 доведено. □

3. Доведення теореми 2. Нам залишилось довести необхідність умови (1). Для цього будемо використовувати таких два допоміжних твердження.

Лема 1([2, 3]). *Якщо (μ_n) — зростаюча до $+\infty$ послідовність додатних чисел і $\varlimsup\limits_{n\to+\infty}\ln n/\mu_n>1$, то існує підпослідовність (μ_k^*) послідовності (μ_n) така, що $k\leq\exp\{\mu_k^*\}+1$ для всіх $k\in\mathbb{N}$ і $k_j\geq\exp\{\mu_{k_j}^*\}$ для деякої зростаючої до $+\infty$ послідовності (k_j).*

Лема 2([1]). *Нехай $p\geq 2p_2-p_1$. Асимптотична нерівність $\ln\mu(\sigma,F)\leq T_1\sigma^{p_1}+T_2\sigma^{p_2}+(\tau+o(1))\sigma^p$ $(\sigma\to+\infty)$ правильна тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $\varepsilon>0$ існує $n_0=n_0(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n\geq n_0$*

$$\ln|a_n|\leq -T_1(p_1-1)\Big(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)}+T_2\Big(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{p_2/(p_1-1)}+(\tau^*+\varepsilon)\Big(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{\frac{p}{p_1-1}},$$

де τ^* таке, як у теоремі A.

Доведення необхідності умови (1). Припустимо, що вона не виконується, тобто $\varlimsup\limits_{t\to+\infty}\ln n/\lambda_n^{p/p_1}>\beta>0$. Тоді за лемою 1 існує підпослідовність (λ_k^*) послідовності (λ_n) така, що $k\leq\exp\big\{\beta\big(\lambda_k^*\big)^{p/p_1}\big\}+1$ для всіх $k\in\mathbb{N}$ і $k_j\geq\exp\big\{\beta\big(\lambda_{k_j}^*\big)^{p/p_1}\big\}$ для деякої зростаючої до $+\infty$ послідовності (k_j). Приймемо $a_n=0$, якщо $\lambda_n\neq\lambda_k^\star$, і $a_n=a_k^*$, якщо $\lambda_n=\lambda_k^\star$, де

$$\ln\,a_k^*=-T_1(p_1-1)\Big(\frac{\lambda_k^\star}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)}+T_2\Big(\frac{\lambda_k^\star}{T_1p_1}\Big)^{p_2/(p_1-1)}+\tau^*\Big(\frac{\lambda_k^\star}{T_1p_1}\Big)^{\frac{p}{p_1-1}},$$

Для цілого ряду Діріхле з такими коефіцієнтами за лемою 2 правильна асимптотична нерівність $\ln\mu(\sigma,F)\leq T_1\sigma^{p_1}+T_2\sigma^{p_2}+(\tau+o(1))\sigma^p$ $(\sigma\to+\infty)$.

Нехай $m_j=\big[k_j-\sqrt{k_j}\big]$. Тоді неважко, як в [2], встановити, що $\lambda_{m_j}^*\geq\lambda_{k_j}^*-\delta_j$, де $\delta_j=\dfrac{(1+o(1))p_1}{\beta p}\Big(\lambda_{k_j}^\star\Big)^{(p_1-p)/p_1}\exp\Big\{-\dfrac{\beta}{2}\Big(\lambda_{k_j}^\star\Big)^{p/p_1}\Big\}$, $j\to\infty$, і $M(\sigma,F)\geq\sum\limits_{k=m_j}^{k_j}a_k^*\exp\{\sigma\lambda_k^\star\}\geq$ $\geq\sqrt{k_j}a_{k_j}^*\exp\{\sigma(\lambda_{k_j}^\star-\delta_j)\}$ для $\sigma>0$. Звідси випливає, що

$$\ln\, M(\sigma,F)\geq\frac{1}{2}\ln\, k_j+\ln\, a^*_{k_j}+\sigma\lambda^\star_{k_j}-\sigma\delta_j\geq\frac{\beta}{2}\Bigl(\lambda^\star_{k_j}\Bigr)^{p/p_1}-T_1(p_1-1)\Bigl(\frac{\lambda^\star_{k_j}}{T_1p_1}\Bigr)^{p_1/(p_1-1)}+$$
$$+T_2\Bigl(\frac{\lambda^\star_{k_j}}{T_1p_1}\Bigr)^{p_2/(p_1-1)}+\tau^*\Bigl(\frac{\lambda^\star_{k_j}}{T_1p_1}\Bigr)^{p/(p_1-1)}+\sigma\lambda^\star_{k_j}-\sigma\delta_j. \tag{8}$$

Нехай

$$\sigma_j=\Bigl(\frac{\lambda^\star_{k_j}}{T_1p_1}\Bigr)^{1/(p_1-1)}-\frac{T_2p_2}{T_1p_1(p_1-1)}\Bigl(\frac{\lambda^\star_{k_j}}{T_1p_1}\Bigr)^{(p_2-p_1+1)/(p_1-1)}-\frac{p\tau^*}{T_1p_1(p_1-1)}\Bigl(\frac{\lambda^\star_{k_j}}{T_1p_1}\Bigr)^{(p-p_1+1)/(p_1-1)}$$

Тоді $\sigma_j\delta_j\to 0\,(j\to\infty)$ і з (8) дістаємо $\ln M(\sigma_j,F)\geq\frac{\beta}{2}\bigl(\lambda^\star_{k_j}\bigr)^{p/p_1}-T_1(p_1-1)\bigl(\frac{\lambda^\star_{k_j}}{T_1p_1}\bigr)^{p_1/(p_1-1)}+$ $+T_2\bigl(\frac{\lambda^\star_{k_j}}{T_1p_1}\bigr)^{p_2/(p_1-1)}+\tau^*\bigl(\frac{\lambda^\star_{k_j}}{T_1p_1}\bigr)^{p/(p_1-1)}+T_1p_1\bigl(\frac{\lambda^\star_{k_j}}{T_1p_1}\bigr)^{p_1/(p_1-1)}-\frac{T_2p_2}{p_1-1}\bigl(\frac{\lambda^\star_{k_j}}{T_1p_1}\bigr)^{p_2/(p_1-1)}-$ $-\frac{p\tau^*}{p_1-1}\bigl(\frac{\lambda^\star_{k_j}}{T_1p_1}\bigr)^{p/(p_1-1)}+o(1)=T_1\bigl(\frac{\lambda^\star_{k_j}}{T_1p_1}\bigr)^{p_1/(p_1-1)}+T_2\frac{p_1-p_2-1}{p_1-1}\bigl(\frac{\lambda^\star_{k_j}}{T_1p_1}\bigr)^{p_2/(p_1-1)}+$

$$+\bigl(\frac{\tau^*(p_1-p-1)}{p_1-1}+\frac{\beta}{2}\bigr)\Bigl(\frac{\lambda^\star_{k_j}}{T_1p_1}\Bigr)^{p/(p_1-1)}+o(1),\quad j\to\infty.$$

З іншого боку, використовуючи лему 6 з [1], маємо

$$T_1\sigma_j^{p_1}+T_2\sigma_j^{p_2}+\tau\sigma_j^p=T_1\left(\frac{\lambda^\star_{k_j}}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}}+\frac{T_2(p_1-p_2-1)}{p_1-1}\left(\frac{\lambda^\star_{k_j}}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1-1}}+$$
$$+\left(\frac{(\tau^*+o(1))(p_1-p-1)}{p_1-1}+o(1)\right)\left(\frac{\lambda^\star_{k_j}}{T_1p_1}\right)^{\frac{p}{p_1-1}},\quad j\to\infty.$$

З двох останніх співвідношень бачимо, що співвідношення $\ln M(\sigma,F)\leq T_1\sigma^{p_1}+T_2\sigma^{p_2}+(\tau+o(1))\sigma^p$ $(\sigma\to+\infty)$ не виконується, тобто умова (1) є необхідною для того, щоб для кожної функції $F\in S(\Lambda)$ зі співвідношення $\ln\mu(\sigma,F)\leq T_1\sigma^{p_1}+T_2\sigma^{p_2}+(\tau+o(1))\sigma^p$ $(\sigma\to+\infty)$ випливало співідношення $\ln M(\sigma,F)\leq T_1\sigma^{p_1}+T_2\sigma^{p_2}+(\tau+o(1))\sigma^p$ $(\sigma\to+\infty)$.
Зауваження. З доведення твердження 1 з огляду на нерівність Коші бачимо, що за умови (1) $\ln\, M(\sigma,F)-\ln\,\mu(\sigma,F)=o\left(\sigma^p\right),\ \sigma\to+\infty$. Звідси випливає, що за умови (1) рівносильними є також співвідношення

$$\ln\mu(\sigma,F)=\sum_{j=1}^m T_j\sigma^{p_j}+(T+o(1))\sigma^p,\ \text{та}\ \ln M(\sigma,F)=\sum_{j=1}^m T_j\sigma^{p_j}+(T+o(1))\sigma^p\ (\sigma\to+\infty).$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Шеремета М.М., Лугова Л.Л. *Тричленна степенева асимптотика логарифма максимального члена цілого ряду Діріхле*// Матем.студії. 2006. –Т.25, №2. – С. 149–168.
2. Sumyk O.M., Sheremeta M.M. *On connection between the growth of maximum modulus and maximal term of entire Dirichlet series in term of m-member asymptotics*// Matem. studii. 2003. – V. 19, №1. – P. 83–88.
3. Шеремета М.Н. *О поведении максимума модуля целого ряда Дирихле вне исключительного множества*// Матем. заметки. – 1995. – Т.57, №2. – С. 283–296.

Львівський національний університет імені Івана Франка
tftj@franko.lviv.ua

Надійшло 21.12.2006