УДК 517.537.72

О. Ю. Задорожна, О. М. Мулява

ПРО СПРЯЖЕНІ АБСЦИСИ ЗБІЖНОСТІ ПОДВІЙНОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ

O. Yu. Zadorozhna, O. M. Mulyava. *On the conjugate abscissas convergence of the double Dirichlet series*, Matematychni Studii, **28** (2007) 29–36.

We concider new relations between conjugate abscissas convergence and absolute convergence of the double Dirichlet series.

О. Ю. Задорожна, О. М. Мулява. *О сопряженных абсциссах сходимости двойного ряда Дирихле* // Математичні Студії. – 2007. – Т.28, №1. – С.29–36.

Устанавливаются новые соотношения для сопряженных абсцисс сходимости и абсолютной сходимости двойных рядов Дирихле.

1. Вступ. Нехай $(\lambda_n^{(1)})$ і $(\lambda_m^{(2)})$ — послідовності невід'ємних чисел, $\lambda_0^{(1)} = \lambda_0^{(2)} = 0$, а

$$F(s_1, s_2) = \sum_{n,\, m=0}^{\infty} a_{nm} \exp\{s_1\lambda_n^{(1)} + s_2\lambda_m^{(2)}\}, \quad s_j = \sigma_j + it_j \quad (j \in \{1, 2\}), \tag{1}$$

— подвійний ряд Діріхле. Абсолютну збіжність ряду (1) за умови

$$\lim_{m+n\to\infty} \frac{\ln(n+m)}{\lambda_n^{(1)} + \lambda_m^{(2)}} = 0 \tag{2}$$

досліджував В. П. Громов ([1 - 3]). Він довів, що якщо подвійний ряд Діріхле абсолютно збіжний в околі точки $(\sigma_1^0 + it_1^0, \sigma_2^0 + it_2^0) \in \mathbb{C}^2$, то він збіжний абсолютно в області $\{(s_1, s_2) : \operatorname{Re} s_1 < \sigma_1^0, \operatorname{Re} s_2 < \sigma_2^0\}$. Тому ([2]), якщо B — множина всіх точок $(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R}^2$, які є абсцисами точок абсолютної збіжності ряду (1), і $B^0 = \operatorname{int} B$, то сукупність крайових точок множини B^0 (за умови, що ряд (1) не є абсолютно збіжний всюди в $\mathbb{C}^2$) утворює криву θ_a, яка розділяє $\mathbb{R}^2$ на дві частини; до однієї з них належать точки $(\sigma_1, \sigma_2) \in B^0$, які є абсцисами точок абсолютної збіжності ряду (1), а до іншої — точки $(\sigma_1, \sigma_2) \notin B$, які є абсцисами точок, у яких ряд (1) не є абсолютно збіжним. Крива θ_a називається ([2]) *лінією спряжених абсцис* абсолютної збіжності ряду (1), а її координати $(\sigma_{a1}, \sigma_{a2})$ називаються *спряженими абсцисами* абсолютної збіжності цього ряду. Множина B є опуклою, а крива θ_a може бути горизонтальною або вертикальною прямою у залежності від того, чи $\sigma_{a1} = +\infty$ або $\sigma_{a2} = +\infty$. Спряжені абсциси абсолютної збіжності функціонально залежні, тобто $\sigma_{a2} = \varphi_1(\sigma_{a1})$. В [2] доведено таку теорему.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 30D15.

Теорема А. *Якщо виконується умова (2), то для того щоб пара дійсних чисел* $(\sigma_{a1}, \sigma_{a2})$ *була парою спряжених абсцис абсолютної збіжності подвійного ряду Діріхле (1), необхідно і досить, щоб*

$$\overline{\lim_{n+m\to\infty}} \frac{\ln|a_{nm}| + \sigma_{a1}\lambda_n^{(1)} + \sigma_{a2}\lambda_m^{(2)}}{\lambda_n^{(1)} + \lambda_m^{(2)}} = 0.$$

Збіжність подвійних рядів Діріхле вивчав А. Янушаускас ([4-5]), який довів ([4]) таку теорему.

Теорема Б. *Якщо ряд (1) збіжний в околі точки* $(\sigma_1^0 + it_1^0,\ \sigma_2^0 + it_2^0) \in \mathbb{C}^2$, *то він збіжний у прямому добуткові півплощин* $\{s_1 :\ Re\, s_1 < \sigma_1^0\}$ *і* $\{s_2 :\ Re\, s_2 < \sigma_2^0\}$, *причому збіжність є рівномірною на кожному компакті з цього прямого добутку.*

З теореми Б випливає, що для кожного подвійного ряду Діріхле можливі три ситуації: 1) ряд збіжний для всіх скінченних s_1 та s_2; 2) ряд не збігається у жодній області з $\mathbb{C}^2$; 3) ряд збіжний в області $\{(s_1, s_2) : \operatorname{Re} s_1 < \sigma_{c1}, \operatorname{Re} s_2 < \sigma_{c2}\}$ і не збігається у жодній області $\{(s_1, s_2) :\ \operatorname{Re} s_1 < \sigma_1^0, \operatorname{Re} s_2 < \sigma_2^0\}$, де або $\sigma_1^0 > \sigma_{c1}$ і $\sigma_2^0 \geq \sigma_{c2}$, або $\sigma_1^0 \geq \sigma_{c1}$ і $\sigma_2^0 > \sigma_{c2}$. Числа σ_{c1} і σ_{c2} називаються [4] спряженими абсцисами збіжності ряду (1). Безпосередньо з означення випливає, що якщо $(\sigma_{c1}^*, \sigma_{c2}^*)$ і $(\sigma_{c1}^{**}, \sigma_{c2}^{**})$ — дві пари спряжених абсцис ряду (1), то з нерівності $\sigma_{c1}^* < \sigma_{c1}^{**}$ випливає нерівність $\sigma_{c2}^* \geq \sigma_{c2}^{**}$. Тому край області збіжності ряду (1) задається рівнянням $\operatorname{Re} s_2 = \varphi_2(\operatorname{Re} s_1)$, де φ_2 — незростаюча функція, властивості якої досліджено в [5].

Зв'зки між спряженими абсцисами збіжності і абсолютної збіжності, а також зв'язки спряжених абсцис з коефіцієнтами подвійного ряду Діріхле досліджувались в [4], де встановлювались формули для абсцис збіжності, подібні до формули Валірона, встановленої для рядів Діріхле від однієї змінної ([6]) .

У статті [7] отримано твердження, що містять узагальнення, як згаданої формули Валірона, так і деяких інших подібних формул, а також встановлено зв'язки абсцис збіжності з абсцисами існування максимального члена ряду Діріхле. У даній статті результати з [7] перенесемо на випадок подвійного ряду Діріхле (1).

2. Абсциси існування максимального члена. Спочатку опишемо умови, за яких існує максимальний член

$$\mu(\sigma_1, \sigma_2) = \max\{|a_{nm}| \exp\{\sigma_1\lambda_n^{(1)} + \sigma_2\lambda_m^{(2)}\} : n \geq 0, m \geq 0\}$$

подвійного ряду Діріхле (5), тобто $\mu(\sigma_1, \sigma_2) < +\infty$. Зауважимо, що якщо $\mu(\sigma_1^0, \sigma_2^0) < +\infty$, то $\mu(\sigma_1, \sigma_2) < +\infty$ за умов $\sigma_1 \leq \sigma_1^0$ і $\sigma_2 \leq \sigma_2^0$. Звідси випливає, що є три можливості: 1) $\mu(\sigma_1, \sigma_2) = +\infty$ для всіх $(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R}^2$; 2) $\mu(\sigma_1, \sigma_2) < +\infty$ для всіх $(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R}^2$; 3) $\mu(\sigma_1, \sigma_2) < +\infty$ для всіх $\sigma_1 < \sigma_{\mu1}$ та $\sigma_2 < \sigma_{\mu2}$ і $\mu(\sigma_1, \sigma_2) = +\infty$, якщо або $\sigma_1 > \sigma_{\mu1}$ та $\sigma_2 \geq \sigma_{\mu2}$, або $\sigma_1 \geq \sigma_{\mu1}$ та $\sigma_2 > \sigma_{\mu2}$. Пару $(\sigma_{\mu1}, \sigma_{\mu2})$ будемо називати спряженими абсцисами існування максимального члена. Зрозуміло, що у випадку їх скіченності існує функціональна залежність $\sigma_{\mu2} = \varphi_3(\sigma_{\mu1})$, де φ_3 — незростаюча функція, а випадку, коли $\mu(\sigma_1, \sigma_2) < +\infty$ не для всіх $(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R}^2$ і $\sigma_{\mu1} = +\infty$, то $\sigma_{\mu2} = \mathrm{const}$.

Теорема 1. *Пара* $(\sigma_{\mu1}, \sigma_{\mu2})$ *дійсних чисел є спряженими абсцисами існування максимального члена тоді і тільки тоді, коли*

$$\overline{\lim_{n+m\to\infty}} \frac{\ln|a_{nm}| + \sigma_{\mu1}\lambda_n^{(1)} + \sigma_{\mu2}\lambda_m^{(2)}}{\lambda_n^{(1)} + \lambda_m^{(2)}} = 0. \tag{3}$$

Доведення. Позначимо через A ліву частину рівності (3) і припустимо, що $\sigma_{\mu 1}$ і $\sigma_{\mu 2}$ є спряженими абсцисами існування максимального члена. Тоді

$$|a_{nm}|\exp\{\sigma_1\lambda_n^{(1)}+\sigma_2\lambda_m^{(2)}\}\le\mu(\sigma_1,\sigma_2)<+\infty$$

для будь-яких $\sigma_1<\sigma_{\mu 1}$ і $\sigma_2<\sigma_{\mu 2}$. Тому

$$A\le\varlimsup_{n+m\to\infty}\frac{\ln\,\mu(\sigma_1,\sigma_2)+(\sigma_{\mu 1}-\sigma_1)\lambda_n^{(1)}+(\sigma_{\mu 2}-\sigma_2)\lambda_m^{(2)}}{\lambda_n^{(1)}+\lambda_m^{(2)}}\le\max\{\sigma_{\mu 1}-\sigma_1,\,\sigma_{\mu 2}-\sigma_2\}$$

і з огляду на довільність $\sigma_1<\sigma_{\mu 1}$ і $\sigma_2<\sigma_{\mu 2}$ отримуємо нерівність $A\le 0$.

Покажемо, що $A\ge 0$. Справді, якщо $A<0$, то для будь-якого $\eta\in(A,\,0)$ і всіх досить великих $m+n$ правильна нерівність $\ln|a_{nm}|+\sigma_{\mu 1}\lambda_n^{(1)}+\sigma_{\mu 2}\lambda_m^{(2)}\le\eta(\lambda_n^{(1)}+\lambda_m^{(2)})$, звідки $|a_{nm}|\exp\{(\sigma_{\mu 1}-\eta)\lambda_n^{(1)}+(\sigma_{\mu 2}-\eta)\lambda_m^{(2)}\}\le 1$ тобто $\mu(\sigma_{\mu 1}+|\eta|,\sigma_{\mu 2}+|\eta|)<+\infty$ і $\sigma_{\mu 1}$ та $\sigma_{\mu 2}$ не є є спряженими абсцисами існування максимального члена. Необхідність умови (3) доведено.

Доведемо її достатність. Для будь-якого $\varepsilon>0$ і всіх досить великих $m+n$ маємо $\ln|a_{nm}|+\sigma_{\mu 1}\lambda_n^{(1)}+\sigma_{\mu 2}\lambda_m^{(2)}\le\varepsilon(\lambda_n^{(1)}+\lambda_m^{(2)})$, тобто $\mu(\sigma_{\mu 1}-\varepsilon,\sigma_{\mu 2}-\varepsilon)<+\infty$ і, завдяки довільності $\varepsilon>0$, отримуємо $\mu(\sigma_1,\sigma_2)<+\infty$ для будь-яких $\sigma_1<\sigma_{\mu 1}$ та $\sigma_2<\sigma_{\mu 2}$.

З іншого боку, для будь-якого $\varepsilon>0$ існує підпослідовність $(\widehat{n},\widehat{m})$ така, що $\widehat{n}+\widehat{m}\to\infty$ і $\ln|a_{\widehat{n}\widehat{m}}|+\sigma_{\mu 1}\lambda_{\widehat{n}}^{(1)}+\sigma_{\mu 2}\lambda_{\widehat{m}}^{(2)}\ge-(\varepsilon/2)(\lambda_{\widehat{n}}^{(1)}+\lambda_{\widehat{m}}^{(2)})$. Тому

$$|a_{\widehat{n}\widehat{m}}|\exp\{(\sigma_{\mu 1}+\varepsilon)\lambda_{\widehat{n}}^{(1)}+(\sigma_{\mu 2}+\varepsilon)\lambda_{\widehat{m}}^{(2)}\}\ge\exp\{(\varepsilon/3)(\lambda_{\widehat{n}}^{(1)}+\lambda_{\widehat{m}}^{(2)})\}\to+\infty,\quad \widehat{n}+\widehat{m}\to\infty,$$

тобто $\mu(\sigma_{\mu 1}+\varepsilon,\sigma_{\mu 2}+\varepsilon)=+\infty$. Завдяки довільності ε, достатність умови (3) і, отже, теорему 1 доведено. $\square$

Наслідок 1. *Пара $(\sigma_{\mu 1},\sigma_{\mu 2})$ невід'ємних чисел, принаймні одне з яких додатне, є спряженими абсцисами існування максимального члена тоді і тільки тоді, коли*

$$\varliminf_{n+m\to\infty}\frac{\ln(1/|a_{nm}|)}{\sigma_{\mu 1}\lambda_n^{(1)}+\sigma_{\mu 2}\lambda_m^{(2)}}=1,$$

а пара $(\sigma_{\mu 1},\sigma_{\mu 2})$ недодатних чисел, принаймні одне з яких від'ємне, є спряженими абсцисами існування максимального члена тоді і тільки тоді, коли

$$\varlimsup_{n+m\to\infty}\frac{\ln|a_{nm}|}{-(\sigma_{\mu 1}\lambda_n^{(1)}+\sigma_{\mu 2}\lambda_m^{(2)})}=1.$$

Доведення. Зупинимось тільки на доведенні першої частини наслідку. Не зменшуючи загальності, вважаємо, що $\min\{\sigma_{\mu 1},\,\sigma_{\mu 2}\}>0$. Рівність (3) можна подати у вигляді

$$\varliminf_{n+m\to\infty}\frac{\ln(1/|a_{nm}|)-(\sigma_{\mu 1}\lambda_n^{(1)}+\sigma_{\mu 2}\lambda_m^{(2)})}{\lambda_n^{(1)}+\lambda_m^{(2)}}=0,\tag{4}$$

тобто для будь-якого $\varepsilon>0$ і всіх досить великих $n+m$ маємо $\ln(1/|a_{nm}|)>\sigma_{\mu 1}\lambda_n^{(1)}+\sigma_{\mu 2}\lambda_m^{(2)}-\varepsilon(\lambda_n^{(1)}+\lambda_m^{(2)})$ і, отже,

$$\frac{\ln(1/|a_{nm}|)}{\sigma_{\mu 1}\lambda_n^{(1)}+\sigma_{\mu 2}\lambda_m^{(2)}}>1-\frac{\varepsilon(\lambda_n^{(1)}+\lambda_m^{(2)})}{\sigma_{\mu 1}\lambda_n^{(1)}+\sigma_{\mu 2}\lambda_m^{(2)}}\ge 1-\frac{\varepsilon}{\min\{\sigma_{\mu 1},\,\sigma_{\mu 2}\}},$$

а для деякої підпослідовності $(\widehat{n}, \widehat{m})$ такої, що $\widehat{n}+\widehat{m}\to\infty$, подібно отримуємо

$$\frac{\ln(1/|a_{\widehat{n}\widehat{m}}|)}{\sigma_{\mu1}\lambda^{(1)}_{\widehat{n}}+\sigma_{\mu2}\lambda^{(2)}_{\widehat{m}}}<1+\frac{\varepsilon(\lambda^{(1)}_{\widehat{n}}+\lambda^{(2)}_{\widehat{m}}))}{\sigma_{\mu1}\lambda^{(1)}_{\widehat{n}}+\sigma_{\mu2}\lambda^{(2)}_{\widehat{m}}}\le 1+\frac{\varepsilon}{\min\{\sigma_{\mu1},\,\sigma_{\mu2}\}}.$$

З огляду на довільність ε ці нерівності рівносильні до рівності (4). □

Теорема 2. *Для того щоб $\mu(\sigma_1,\sigma_2)<+\infty$ для всіх $(\sigma_1,\sigma_2)\in\mathbb{R}^2$, необхідно і досить, щоб*

$$\lim_{n+m\to\infty}\frac{1}{\lambda^{(1)}_n+\lambda^{(2)}_m}\ln\frac{1}{|a_{nm}|}=+\infty. \tag{5}$$

Доведення. Якщо $\mu(\sigma_1,\sigma_2)<+\infty$ для всіх $(\sigma_1,\sigma_2)\in\mathbb{R}^2$, то для кожного $\sigma>0$ правильна нерівність $|a_{nm}|\exp\{\sigma(\lambda^{(1)}_n+\lambda^{(2)}_m)\}\le\ \mu(\sigma,\sigma)<+\infty$, тобто $\frac{1}{\lambda^{(1)}_n+\lambda^{(2)}_m}\ln\frac{1}{|a_{nm}|}\ge\sigma+o(1)$, $n+m\to\infty$, і з огляду на довільність σ правильна рівність (5). Навпаки, з умови (5) випливає, що для кожного $\sigma>0$ і всіх досить великих $m+n$ правильна нерівність $\frac{1}{\lambda^{(1)}_n+\lambda^{(2)}_m}\ln\frac{1}{|a_{nm}|}\ge\sigma$. Тому, якщо $(\sigma_1,\sigma_2)\in\mathbb{R}^2$, то, вибираючи $\sigma>\max\{\sigma_1,\sigma_2\}$, маємо

$$|a_{nm}|\exp\{\sigma_1\lambda^{(1)}_n+\sigma_2\lambda^{(2)}_m\}\le\exp\{-(\sigma-\sigma_1)\lambda^{(1)}_n-(\sigma-\sigma_2)\lambda^{(2)}_m)\}\to 0,\quad n+m\to\infty,$$

тобто $\mu(\sigma_1,\sigma_2)<+\infty$. Теорему 2 доведено. □

Теорема 3. *Для того щоб $\mu(\sigma_1,\sigma_2)<+\infty$ для всіх $\sigma_1<+\infty$ і $\sigma_2<\sigma_{\mu2}<+\infty$, необхідно і досить, щоб для кожного $\sigma<\sigma_{\mu2}$*

$$\lim_{n,m\to\infty}\frac{\ln(1/|a_{nm}|)-\sigma\lambda^{(2)}_m}{\lambda^{(1)}_n}=+\infty. \tag{6}$$

Доведення. Якщо $\mu(\sigma_1,\sigma_2)<+\infty$ для всіх $\sigma_1<+\infty$ і $\sigma_2<\sigma_{\mu2}$, то для довільних $\sigma<\sigma_{\mu2}$ і $\sigma_1<+\infty$ правильна нерівність

$$\frac{\ln(1/|a_{nm}|)-\sigma\lambda^{(2)}_m}{\lambda^{(1)}_n}\ge\frac{-\ln\,\mu(\sigma_1,\sigma)}{\lambda^{(1)}_n}+\sigma_1,$$

звідки з огляду на довільність σ_1 отримуємо (6). Навпаки, з умови (6) випливає, що для довільних $\sigma^*<+\infty$ та $\sigma<\sigma_{\mu2}$ і всіх досить великих n та m правильна нерівність $|a_{nm}|\le\exp\{-(\sigma^*\lambda^{(1)}_n+\sigma\lambda^{(2)}_m)\}$, тобто для довільних $\sigma_1<\sigma^*$ та $\sigma_2<\sigma$

$$|a_{nm}|\exp\{\sigma_1\lambda^{(1)}_n+\sigma_2\lambda^{(2)}_m\}\le\exp\{-(\sigma^*-\sigma_1)\lambda^{(1)}_n-(\sigma-\sigma_2)\lambda^{(2)}_m\}\to 0,\quad m+n\to\infty,$$

і отже, $\mu(\sigma_1,\sigma_2)<+\infty$. З огляду на довільність $\sigma^*<+\infty$ та $\sigma<\sigma_{\mu2}$ теорему 3 доведено. □

3. Зв'язок між абсцисами збіжності та існування максимального члена. Зрозуміло, що якщо ряд (1) збіжний у точці $(\sigma_1+it_1,\sigma_2+it_2)$, то $|a_{nm}|\exp\{\sigma_1\lambda^{(1)}_n+\sigma_2\lambda^{(2)}_m\}\to 0\,(m+n\to\infty)$ і, отже, $\mu(\sigma_1,\sigma_2)<+\infty$. Тому $\sigma_{a1}\le\sigma_1\le\sigma_{\mu1}$ і $\sigma_{a2}\le\sigma_2\le\sigma_{\mu2}$.

Нехай $\mathbf{G}_c$, $\mathbf{G}_a$ відповідно області збіжності та абсолютної збіжності ряду (1), а $G_c=\{x\in\mathbb{R}^2:\ x=\operatorname{Re}z,\ z\in\mathbf{G}_c\}$, $G_a=\{x\in\mathbb{R}^2:\ x=\operatorname{Re}z,\ z\in\mathbf{G}_a\}$ їхні сліди в $\{x\in\mathbb{R}^2:\ x=Re\ z,\ z\in\mathbb{C}^2\}$. Через G_μ позначимо область існування максимального члена $\mu(x,F)$ ряду (1). Зрозуміло, що $G_a\subseteq G_c\subseteq G_\mu$.

З іншого боку, для $\gamma>0$, $\{\delta,\delta_1,\delta_2\}\subset\mathbb{R}$ позначимо

$$h_1(\gamma;\delta)=\varliminf_{n+m\to\infty}\frac{(\gamma-1)\ln|a_{nm}|+\delta(\lambda_n^{(1)}+\lambda_m^{(2)})}{\ln(n+m)},$$

$$h_2(\gamma;\delta_1,\delta_2)=\varliminf_{n+m\to\infty}\frac{(\gamma-1)\ln|a_{nm}|+\delta_1\lambda_n^{(1)}+\delta_2\lambda_m^{(2)}}{\ln n+\ln m}$$

і доведемо таку теорему.

Теорема 4. *i) Якщо $h_1(\gamma;\delta)>2$, то $\gamma G_c\subseteq G_a+\delta e_1$, де $e_1=(1;1)$.*
ii) Якщо $h_2(\gamma;\delta_1,\delta_2)>1$, то правильні нерівності: 1) $\sigma_{a1}\ge\gamma\sigma_{c1}-\delta_1$ і $\sigma_{a2}\ge\gamma\sigma_{c2}-\delta_2$; 2) $\sigma_{a1}\ge\gamma\sigma_{\mu1}-\delta_1$ і $\sigma_{a2}\ge\gamma\sigma_{\mu2}-\delta_2$.

Доведення. i). Нехай $(\sigma_1^0,\ \sigma_2^0)\in G_c$; ряд (1)–збіжний у цій точці, тому $|a_{nm}|\exp\{\sigma_1^0\lambda_n^{(1)}+\sigma_2^0\lambda_m^{(2)}\}\le M$. Тобто, $\big(\forall\ \varepsilon\in(0,\ h_1(\gamma,\ \delta)-2)\big)$ і для всіх $m+n\ge k_0$

$$|a_{nm}|e^{(\gamma\sigma_1^0-\delta)\lambda_n^{(1)}+(\gamma\sigma_2^0-\delta)\lambda_m^{(2)}}=\left[|a_{nm}|e^{\sigma_1^0\lambda_n^{(1)}+\sigma_2^0\lambda_m^{(2)}}\right]^\gamma|a_{nm}|^{1-\gamma}e^{-\delta(\lambda_n^{(1)}+\lambda_m^{(2)})}\le$$

$$\le M^\gamma\exp\left\{-\tfrac{(\gamma-1)\ln|a_{nm}|+\delta(\lambda_n^{(1)}+\lambda_m^{(2)})}{\ln(n+m)}\ln(n+m)\right\}<M^\gamma\exp\big\{-(h_1(\gamma,\ \delta)-\varepsilon)\ln(n+\ m)\big\}.$$

Оскільки $h_1(\gamma,\ \delta)-1-\varepsilon>1$, то

$$\sum_{s=0}^\infty\sum_{n+m=s}^\infty|a_{nm}|\exp\{(\gamma\sigma_1^0-\delta)\lambda_n^{(1)}+(\gamma\sigma_2^0-\delta)\lambda_m^{(2)}\}\le M^\gamma\sum_{s=k_0}^\infty(s+1)\exp\{-(h_1(\gamma,\varepsilon)-1)\ln s\}\le$$

$$\le 2M^\gamma\sum_{s=k_0}^\infty\exp\{-(h_1(\gamma,\ \delta)-1-\varepsilon)\ln s\}<+\infty.$$

Звідси випливає, що ряд (1) збіжний абсолютно у кожній точці з $\gamma G_c-\delta\ e_1$, тобто $G_a\supseteq\gamma G_c-\delta e_1$,

ii). Почнемо з твердження 1). Можемо вважати, що $\sigma_1>-\infty$ і $\sigma_2>-\infty$. Нехай $\sigma_1<\sigma_{c1}$ і $\sigma_2<\sigma_{c2}$. Оскільки ряд (1) збіжний у точці (σ_1,σ_2), то $|a_{nm}|\exp\{\sigma_1\lambda_n^{(1)}+\sigma_2\lambda_m^{(2)}\}\le M<+\infty$ для всіх n і m. Тому

$$|a_{nm}|\exp\{(\gamma\sigma_1-\delta_1)\lambda_n^{(1)}+(\gamma\sigma_2-\delta_2)\lambda_m^{(2)}\}=$$

$$=(|a_{nm}|\exp\{\sigma_1\lambda_n^{(1)}+\sigma_2\lambda_m^{(2)}\})^\gamma|a_{nm}|^{1-\gamma}\exp\{-\delta_1\lambda_n^{(1)}-\delta_2\lambda_m^{(2)}\}\le$$

$$\le M^\gamma|a_{nm}|^{1-\gamma}\exp\{-\delta_1\lambda_n^{(1)}-\delta_2\lambda_m^{(2)}\}=$$

$$=M^\gamma\exp\left\{-\frac{(\gamma-1)\ln|a_{nm}|+\delta_1\lambda_n^{(1)}+\delta_2\lambda_m^{(2)}}{\ln n+\ln m}(\ln n+\ln m)\right\}\le$$

$$\le M^\gamma\exp\{-(h_2(\gamma;\delta_1,\delta_2)-\varepsilon)(\ln n+\ln m)\}$$

для кожного $\varepsilon\in(0,\ h_2(\gamma;\delta_1,\delta_2)-1)$ і всіх досить великих n,m. Оскільки $\sum_{n,\,m=1}^\infty nm^{-h}<+\infty$ для $h=h_2(\gamma;\delta_1,\delta_2)-\varepsilon>1$, то звідси випливає, що ряд (1) абсолютно збіжний в точці $(\gamma\sigma_1-\delta_1,\ \gamma\sigma_2-\delta_2)$, тобто $\sigma_{a1}\ge\gamma\sigma_1-\delta_1$ і $\sigma_{a2}\ge\gamma\sigma_2-\delta_2$. З огляду на довільність чисел $\sigma_1<\sigma_{c1}$ і $\sigma_2<\sigma_{c2}$ твердження 1) теореми 4 доведено.

Перейдемо до доведення твердження 2). Можемо вважати, що $\sigma_{\mu1}>-\infty$ і $\sigma_{\mu2}>-\infty$. Припустимо спочатку, що $\sigma_{\mu1}<+\infty$ і $\sigma_{\mu2}<+\infty$. Тоді з (3) для кожного $\varepsilon>0$ і всіх досить великих $n+m$ отримуємо нерівність $|a_{nm}| \leq \exp\{-(\sigma_{\mu1}-\varepsilon)\lambda_n^{(1)} - (\sigma_{\mu2}-\varepsilon)\lambda_m^{(2)}\}$ і, як вище, маємо

$$|a_{nm}|\exp\{(\gamma(\sigma_{\mu1}-\varepsilon)-\delta_1)\lambda_n^{(1)} + (\gamma(\sigma_{\mu2}-\varepsilon)-\delta_2)\lambda_m^{(2)}\} =$$

$$= (|a_{nm}|\exp\{(\sigma_{\mu1}-\varepsilon)\lambda_n^{(1)} + (\sigma_{\mu2}-\varepsilon)\lambda_m^{(2)}\})^{\gamma}|a_{nm}|^{1-\gamma}\exp\{-\delta_1\lambda_n^{(1)} - \delta_2\lambda_m^{(2)}\} \leq$$

$$\leq |a_{nm}|^{1-\gamma}\exp\{-\delta_1\lambda_n^{(1)} - \delta_2\lambda_m^{(2)}\} \leq \exp\{-(h_2(\gamma;\delta_1,\delta_2)-\varepsilon)(\ln n + \ln m)\}$$

і, отже, ряд (1) абсолютно збіжний в точці $(\gamma(\sigma_{\mu1}-\varepsilon)-\delta_1, \gamma(\sigma_{\mu2}-\varepsilon)-\delta_2)$, тобто $\sigma_{a1} \geq \gamma(\sigma_{\mu1}-\varepsilon)-\delta_1$ і $\sigma_{a2} \geq \gamma(\sigma_{\mu1}-\varepsilon)-\delta_2$. З огляду на довільність $\varepsilon > 0$ твердження 2) теореми 4 у випадку, коли $\sigma_{\mu1} < +\infty$ і $\sigma_{\mu2} < +\infty$, доведено.

Нехай тепер $\sigma_{\mu1} = \sigma_{\mu2} = +\infty$. За теоремою 2 правильна рівність (5), тобто $|a_{nm}| \leq \exp\{-\sigma(\lambda_n^{(1)} + \lambda_m^{(2)})\}$ для будь-якого $\sigma > 0$ і всіх досить великих $n+m$. Звідси, як вище, отримуємо нерівність

$$|a_{nm}|\exp\{(\gamma\sigma-\delta_1)\lambda_n^{(1)} + (\gamma\sigma-\delta_2)\lambda_m^{(2)}\} \leq$$

$$\leq |a_{nm}|^{1-\gamma}\exp\{-\delta_1\lambda_n^{(1)} - \delta_2\lambda_m^{(2)}\} \leq \exp\{-(h_2(\gamma;\delta_1,\delta_2)-\varepsilon)(\ln n + \ln m)\},$$

звідки випливає, що $\sigma_{a1} \geq \gamma\sigma - \delta_1$ і $\sigma_{a2} \geq \gamma\sigma - \delta_2$ для будь-якого $\sigma > 0$, і отже, $\sigma_{a1} = \sigma_{a2} = +\infty$.

Нарешті, якщо $\sigma_{\mu1} = +\infty$ і $\sigma_{\mu2} < \infty$, то з (6) для довільних $\sigma^* < +\infty$ та $\sigma < \sigma_{\mu2}$ і всіх досить великих n та m маємо нерівність $|a_{nm}| \leq \exp\{-(\sigma^*\lambda_n^{(1)} + \sigma\lambda_m^{(2)})\}$. Тому, як вище, отримуємо нерівність

$$|a_{nm}|\exp\{(\gamma\sigma^*-\delta_1)\lambda_n^{(1)} + (\gamma\sigma-\delta_2)\lambda_m^{(2)}\} \leq$$

$$\leq |a_{nm}|^{1-\gamma}\exp\{-\delta_1\lambda_n^{(1)} - \delta_2\lambda_m^{(2)}\} \leq \exp\{-(h_2(\gamma;\delta_1,\delta_2)-\varepsilon)(\ln n + \ln m)\},$$

а з неї випливає, що що $\sigma_{a1} \geq \gamma\sigma^* - \delta_1$ і $\sigma_{a2} \geq \gamma\sigma - \delta_2$ для будь-яких $\sigma^* < +\infty$ та $\sigma < \sigma_{\mu2}$, тобто, $\sigma_{a1} = +\infty$ і $\sigma_{a2} \geq \gamma\sigma_{\mu2} - \delta_2$. Теорему 4 повністю доведено. $\square$

Наслідок 2. *Нехай* (τ_1, τ_2) — *пара додатних чисел. Якщо*

$$\varlimsup_{n+m\to\infty} \frac{\ln n + \ln m}{\tau_1\lambda_n^{(1)} + \tau_2\lambda_m^{(2)}} \leq 1, \tag{7}$$

то $\sigma_{a1} \geq \sigma_{c1} - \tau_1$, $\sigma_{a2} \geq \sigma_{c2} - \tau_2$, $\sigma_{a1} \geq \sigma_{\mu1} - \tau_1$ *і* $\sigma_{a2} \geq \sigma_{\mu2} - \tau_2$.

Справді, з (7) випливає, що $\ln n + \ln m \leq (1+\varepsilon/2)(\tau_1\lambda_n^{(1)} + \tau_2\lambda_m^{(2)})$ для будь-якого $\varepsilon > 0$ і всіх досить великих $m+n$. Тому

$$h_2(1;(1+\varepsilon)\tau_1,(1+\varepsilon)\tau_2) = \varliminf_{n,m\to\infty} \frac{(1+\varepsilon)\tau_1\lambda_n^{(1)} + (1+\varepsilon)\tau_2\lambda_m^{(2)}}{\ln n + \ln m} \geq \frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon/2} > 1$$

і за теоремою 4 $\sigma_{a1} \geq \sigma_{c1} - (1+\varepsilon)\tau_1$, $\sigma_{a2} \geq \sigma_{c2} - (1+\varepsilon)\tau_2$, $\sigma_{a1} \geq \sigma_{\mu1} - (1+\varepsilon)\tau_1$ і $\sigma_{a2} \geq \sigma_{\mu2} - (1+\varepsilon)\tau_2$, тобто з огляду на довільність $\varepsilon > 0$ отримуємо потрібні нерівності.

Зауважимо, що якщо

$$\lim_{n+m\to\infty} \frac{\ln n + \ln m}{\lambda_n^{(1)} + \lambda_m^{(2)}} = 0, \tag{8}$$

то (7) виконується для будь-яких $\tau_1 > 0$ і $\tau_2 > 0$, а за наслідком 2 $\sigma_1 = \sigma_{a1} = \sigma_{\mu 1}$ і $\sigma_2 = \sigma_{a2} = \sigma_{\mu 2}$. Неважко показати, що умови (2) і (8) рівносильні і тому звідси та теореми 2 випливає теорема A.

Зауважимо також, що приклад ряду $\sum\limits_{n,\,m=1}^{\infty} (-1)^{n+m} \exp\{s_1 \ln n + s_2 \ln m\}$ свідчить про точність наведених у наслідку 2 оцінок; тут $\sigma_{c1} = \sigma_{c2} = \sigma_{\mu 1} = \sigma_{\mu 2} = 0$, $\tau_1 = \tau_2 = 1$ і $\sigma_{a1} = \sigma_{a2} = -1$.

Наслідок 3. *Якщо* $\varliminf\limits_{n+m\to\infty} \frac{\ln|a_{nm}|}{\ln n + \ln m} = h_0 > 0$, *то* $\sigma_{a1} \geq \sigma_{c1}(1 + 1/h_0)$, $\sigma_{a2} \geq \sigma_{c2}(1 + 1/h_0)$, $\sigma_{a1} \geq \sigma_{\mu 1}(1 + 1/h_0)$ *і* $\sigma_{a2} \geq \sigma_{\mu 2}(1 + 1/h_0)$.

Справді, візьмемо в теоремі 4 $\delta_1 = \delta_2 = 0$ і $\gamma = 1 + 1/h_0 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Тоді

$$h(\gamma; 0, 0) = \varliminf_{n,m\to\infty} \frac{(1/h_0 + \varepsilon) \ln|a_{nm}|}{\ln n + \ln m} = 1 + \varepsilon h_0 > 1$$

і з теореми 4, завдяки довільності $\varepsilon > 0$ отримуємо потрібні нерівності.

Приклад ряду $\sum\limits_{n,\,m=1}^{\infty} (-1)^{n+m} nm \exp\{s_1 \ln n + s_2 \ln m\}$ свідчить про точність наведених у наслідку 2 оцінок; тут $\sigma_{c1} = \sigma_{c2} = \sigma_{\mu 1} = \sigma_{\mu 2} = -1$, $h_0 = 1$ і $\sigma_{a1} = \sigma_{a2} = -2$.

Наслідок 4. *Якщо* $\varliminf\limits_{n+m\to\infty} \frac{\ln(1/|a_{nm}|)}{\ln n + \ln m} = h^0 > 1$, *то* $\sigma_{a1} \geq \sigma_{c1}(1 - 1/h^0)$, $\sigma_{a2} \geq \sigma_{c2}(1 - 1/h^0)$, $\sigma_{a1} \geq \sigma_{\mu 1}(1 - 1/h^0)$ *і* $\sigma_{a2} \geq \sigma_{\mu 2}(1 - 1/h^0)$.

Справді, візьмемо в теоремі 4 $\delta_1 = \delta_2 = 0$ і $\gamma = 1 - 1/h^0 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1 - 1/h^0$. Тоді

$$h(\gamma; 0, 0) = \varliminf_{n,m\to\infty} \frac{(1/h^0 + \varepsilon) \ln(1/|a_{nm}|)}{\ln n + \ln m} = 1 + \varepsilon h^0 > 1$$

і з теореми 4, завдяки довільності $\varepsilon > 0$, отримуємо потрібні нерівності.

Приклад ряду $\sum\limits_{n,\,m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{(nm)^2} \exp\{s_1 \ln n + s_2 \ln m\}$ свідчить про точність наведених у наслідку 4 оцінок; тут $\sigma_{c1} = \sigma_{c2} = \sigma_{\mu 1} = \sigma_{\mu 2} = 2$, $h^0 = 2$ і $\sigma_{a1} = \sigma_{a2} = 1$.

Наслідок 5. *Для кожного ряду Діріхле*

$$G_c \subseteq G_a + 2\tau_0 e_1$$

Справді, нехай в теоремі 1: $\gamma = 1$ і $\delta = 2\tau_0 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Тоді

$$h_1(\gamma,\ \delta) = \varliminf_{n+m\to\infty} \frac{(2\tau_0 + \varepsilon)(\lambda_n^{(1)} + \lambda_m^{(2)})}{\ln(n+m)} = \frac{2\tau_0 + \varepsilon}{\tau_0} > 2$$

і, отже, правильні оцінки $G_a \supseteq G_c - (2\tau_0 - \varepsilon)\ell$, тобто завдяки довільності ε маємо: $G_a \supseteq G_c - 2\tau_0 e_1$.

Наслідок 6. *Якщо*

$$\varliminf_{n+m\to\infty} \frac{\ln|a_{nm}|}{\ln(n+m)} = h_0 > 0,$$

то

$$G_a \supseteq \frac{h_0 + 2}{h_0} G_c.$$

Справді, нехай в теоремі 1: $\delta = 0$ і $\gamma = 1 + \frac{2+\varepsilon}{h_0}$.

Тоді

$$h_1(\gamma,\ \delta) = \varliminf_{n+m\to\infty} \frac{2+\varepsilon}{h_0} \frac{\ln|a_{nm}|}{\ln(n+m)} \geq 2 + \varepsilon h_0 > 2$$

і, отже

$$G_a \supseteq \frac{2+\varepsilon}{h_0} G_c,$$

звідки, завдяки довільності ε, отримуємо потрібне вкладення.

Наслідок 7. *Якщо*

$$\varlimsup_{n+m\to\infty} \frac{\ln(n+m)}{\ln\frac{1}{|a_{nm}|}} = h_0 \in [0,1),$$

то $G_a \supseteq (1-2h_0)G_c$.

Справді, якщо в теоремі 1 вибрати $\delta = 0$ і $\gamma = 1 - 2h_0 - \varepsilon$, то

$$h_1(\gamma,\ \delta) = \varliminf_{n+m\to\infty} \frac{(2h_0+\varepsilon)\ln\frac{1}{|a_{nm}|}}{\ln(n+m)} = \frac{2h_0+\varepsilon}{h_0} > 2$$

і, отже, $G_a \supseteq (1-2h_0-\varepsilon)G_c$ звідки, завдяки довільності ε, отримуємо потрібне вкладення.

ЛІТЕРАТУРА

1. Громов В.П. *Кратные ряды Дирихле*// Сиб. матем. журн. - 1969. - Т. 10, №3. - С. 522-536.
2. Громов В.П. *К теории кратных рядов Дирихле*// Изв. АН АрмССР. Математика. - 1970. - Т. 5, №5. - С. 449-457.
3. Громов В.П. *К теории кратных рядов Дирихле.* II// Изв. АН АрмССР. Математика. - 1972. - Т. 7, №2. - С. 90-103.
4. Янушаускас А.И. *Двойные ряды Дирихле*// Лит. матем. сб. - 1978. - Т. 13, №3. - С. 201-211.
5. Янушаускас А.И. *Свойства сопряженных абсцисс сходимости двойных рядов Дирихле*// Лит. матем. сб. - 1979. - Т. 14, №1. - С. 213-228.
6. Леонтьев А.Ф. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1976. – 536 с.
7. Мулява О.М. *Про абсцису збіжності ряду Діріхле*// Матем. студії. 1998. - Т. 9, №2. - С. 171-176.

Київський національний університет харчових технологій
Львівський національний університет імені Івана Франка
механіко-математичний факультет

Надійшло 16.06.2006