УДК 517.51

В. К. Маслюченко, Д. І. Кукульняк

ПРО ЗВ'ЯЗОК МІЖ ПОДВІЙНИМ І ПОВТОРНИМИ ІНТЕГРАЛАМИ

V. K. Maslyuchenko, D. I. Kukhulnyak. *On connection between the double and the iterated integrals*, Matematychni Studii, **28** (2007) 25-28.

Let $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ be a Riemann integrable function on $[0,1]^2$. Denote $f(x,y) = f^x(y) = f_y(x)$ and $X_{\overline{R}}(f) = \{x \in [0,1] : f^x \text{ is not Riemann integrable}\}$, $Y_{\overline{R}}(f) = \{y \in [0,1] : f_y \text{ is not Riemann integrable}\}$. It is proved that for such a function f the sets $X_{\overline{R}}(f)$ and $Y_{\overline{R}}(f)$ are subsets of F_σ–sets which have the Lebesgue measure zero. And conversely, if we have two sets A and B which are subsets of F_σ–sets of zero Lebesgue measure then there exists a Riemann integrable function $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ with $X_{\overline{R}}(f) = A$, $Y_{\overline{R}}(f) = B$.

В. К. Маслюченко, Д. И. Кукульняк *О связи между двойным и повторными интегралами* // Математичні Студії. – 2007. – Т.28, №1. – С.25-28.

Пусть $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ функция интегрирумая по Риману на $[0,1]^2$. Обозначим $f(x,y) = f^x(y) = f_y(x)$ и $X_{\overline{R}}(f) = \{x \in [0,1] : f^x$ не интегрируема по Риману$\}$, $Y_{\overline{R}}(f) = \{y \in [0,1] : f_y$ не интегрируема по Риману$\}$. В статье доказано, что для такой функции f множества $X_{\overline{R}}(f)$ и $Y_{\overline{R}}(f)$ — это в точности подмножества множеств типа F_σ отрезка $[0,1]$, которые имеют нулевую меру Лебега.

1. У цій статті *під інтегровністю функції* від однієї чи двох змінних скрізь, крім пункту 5, розумітимемо її *інтегровність за Ріманом.* Нехай $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ — обмежена функція. Позначимо $\overline{\int_0^1} f(x)dx = \inf\limits_{T\in\mathcal{T}} \overline{\sigma}(f,T)$ і $\underline{\int_0^1} f(x)dx = \sup\limits_{T\in\mathcal{T}} \underline{\sigma}(f,T)$, де $\overline{\sigma}(f,T)$ і $\underline{\sigma}(f,T)$ — відповідно верхня та нижня суми Дарбу функції f на проміжку $[0,1]$, що відповідають розбиттю T відрізка $[0,1]$, а $\mathcal{T}$ — сукупність всіх розбиттів відрізка $[0,1]$. Добре відомо, що функція f інтегровна на $[0,1]$ тоді і тільки тоді, коли $\underline{\int_0^1} f(x)dx = \overline{\int_0^1} f(x)dx$.

Нехай $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ — обмежена функція. Позначатимемо $u_f(x) = \overline{\int_0^1} f(x,y)dy$, $l_f(x) = \underline{\int_0^1} f(x,y)dy$, $U_f(y) = \overline{\int_0^1} f(x,y)dx$, $L_f(y) = \underline{\int_0^1} f(x,y)dx$, $s_f(x) = u_f(x) - l_f(x)$ і $S_f(y) = U_f(y) - L_f(y)$. Через $R[0,1]^2$ ($R[0,1]$) позначимо множину всіх інтегровних на квадраті $[0,1]^2$ (відповідно, на відрізку $[0,1]$) функцій $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ (відповідно, $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$). Далі покладемо $X_{\overline{R}}(f) = \{x \in [0,1]\colon s_f(x) > 0\}$ і $Y_{\overline{R}}(f) = \{y \in [0,1]\colon S_f(y) > 0\}$. Множина $X_{\overline{R}}(f)$ складається з усіх тих точок $x \in [0,1]$, що функція $f^x = f(x,\cdot)$ не інтегровна на $[0,1]$, а множина $Y_{\overline{R}}(f)$ — з точок $y \in [0,1]$, для яких $f_y = f(\cdot,y)$ не інтегровна на $[0,1]$.

Символ $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$ будемо розуміти так: при фіксованому $x \in [0,1]$ обчислюється інтеграл $F(x) = \int_0^1 f(x,y)dy$, потім ця функція інтегрується на $[0,1]$. Якщо для деякого $x \in [0,1]$ інтеграл $F(x)$ не існує, то значення $F(x)$ вибирається довільно з проміжку $[l_f(x), u_f(x)]$. Аналогічний сенс має і символ $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx$, де значення

2000 *Mathematics Subject Classification:* 26A42.

функції $G(y) = \int_0^1 f(x,y)dx$ у випадку, коли інтеграл не існує, вибирається довільно з проміжку $[L_f(x), U_f(x)]$. Відомо [1, с.132], що *з інтегровності f на $[0,1]^2$ випливає інтегровність функцій $F(x)$ і $G(y)$ на проміжку $[0,1]$ і рівність $\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx$*. При цьому [1, с.133] *множини $X_{\overline{R}}(f)$ і $Y_{\overline{R}}(f)$ мають нульову лінійну лебеґову міру.* Тут ми ставимо і розв'язуємо задачу про характеризацію цих множин для інтегровної за Ріманом функції f, а саме, даємо повний опис тих множин A і B відрізка $[0,1]$ для яких існує функція $f \in R[0,1]^2$, така, що $X_{\overline{R}}(f) = A$ і $Y_{\overline{R}}(f) = B$. Виявляється, що такими множинами можуть бути підмножини F_σ-множин нульової міри і тільки вони. Ми розв'язуємо подібну задачу і для інтеграла Лебеґа (п. 5).

Вартим уваги є також таке *запитання:* для яких множин $X_{\overline{R}}(f)$ і $Y_{\overline{R}}(f)$ функція $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ є інтегровною на $[0,1]^2$? Добре відомо ([2, с.148]), що навіть за умови $X_{\overline{R}}(f) = Y_{\overline{R}}(f) = \varnothing$, тобто коли функція є нарізно інтегровною, вона може бути не інтегровною на $[0,1]^2$. Більше того, у [3] наведено приклад обмеженої нарізно нескінченно диференційовної функції $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, яка не є інтегровною за Ріманом на $[0,1]^2$.

2. Для відображення $f\colon X \to Y$ топологічного простору X в топологічний простір Y символами $C(f)$ і $D(f)$ ми позначатимемо відповідно множину точок неперервності f і множину точок розриву f. Використовуватимемо критерій Лебеґа інтегровності за Ріманом ([1, с.111]), згідно з яким *функція $f\colon P \to \mathbb{R}$, що задана на невиродженому паралелепіпеді $P = \prod_{k=1}^n [a_k, b_k]$ у просторі $\mathbb{R}^n$, інтегровна за Ріманом на P тоді і тільки тоді, коли f — обмежена на P і множина $D(f)$ її точок розриву має нульову міру Лебеґа в $\mathbb{R}^n$*. Крім того, нам потрібне добре відоме твердження про те, що *для функції $f\colon X \to Y$ зі значеннями в метризовному просторі Y множина $D(f)$ є типу F_σ.*

В цьому пункті ми встановимо, що для кожної функції $f \in R[0,1]^2$ множини $X_{\overline{R}}(f)$ та $Y_{\overline{R}}(f)$ містяться в деяких F_σ-множинах нульової міри. Надалі через λ позначатимемо лінійну міру Лебеґа, а через μ плоску міру Лебеґа.

Теорема 1. *Нехай $f \in R[0,1]^2$. Тоді $X_{\overline{R}}(f) \subseteq D(s_f)$ і $Y_{\overline{R}}(f) \subseteq D(S_f)$, причому $D(s_f)$ і $D(S_f)$ — F_σ-множини нульової міри в $\mathbb{R}$.*

Доведення. Оскільки $f \in R[0,1]^2$, то $s_f, S_f \in R[0,1]$, причому $\int_0^1 s_f(x)dx = \int_0^1 S_f(y)dy = 0$ (див. [1, с.132]). Тому за критерієм Лебеґа $\lambda(D(s_f)) = \lambda(D(S_f)) = 0$. Крім того, $D(s_f)$ і $D(S_f)$ — це множини типу F_σ, як множини точок розриву функцій з $[0,1]$ в $\mathbb{R}$.

Доведемо, що $X_{\overline{R}}(f) \subseteq D(s_f)$. Нехай $x_0 \in X_{\overline{R}}(f)$ і $x_0 \notin D(s_f)$ для деякого x_0. Тоді $x_0 \in C(s_f)$, тобто функція s_f неперервна в точці x_0. Крім того, $s_f(x_0) > 0$. З неперервності s_f у точці x_0 випливає, що існує такий невироджений відрізок $\Delta = [\alpha, \beta]$, що $x_0 \in \Delta \subseteq [0,1]$ і $s_f(x) \geq \frac{1}{2}s_f(x_0) = \gamma$ на Δ. Але $s_f(x) \geq 0$ на $[0,1]$. Тому $\int_0^1 s_f(x)dx \geq \int_\alpha^\beta s_f(x)dx \geq \gamma(\beta - \alpha) > 0$, що суперечить рівності $\int_0^1 s_f(x)dx = 0$. Отже, $x_0 \in D(s_f)$ і ми довели включення $X_{\overline{R}}(f) \subseteq D(s_f)$. Подібно доводиться, що $Y_{\overline{R}}(f) \subseteq D(S_f)$. □

3. Займемося тепер оберненою задачею. Для підмножини M множини X символом χ_M позначаємо характеристичну функцію множини M в X, для якої $\chi_M(x) = 1$, якщо $x \in M$, і $\chi_M(x) = 0$, якщо $x \in X \setminus M$. Перетин $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ множини $\mathbb{Q}$ раціональних чисел з відрізком $[0,1]$ позначимо через $\mathbb{Q}_0$.

Теорема 2. *Нехай* $A \subseteq B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subseteq [0,1]$, *множини* B_n *замкнені,* $\lambda(B_n) = 0$, $A_n = A \cap B_n$ *і* $f_n = 2^{-n}\chi_{A_n \times \mathbb{Q}_0}$ *для кожного* $n \in \mathbb{N}$. *Тоді формулою* $f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x,y)$ *визначається функція* $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, *яка має такі властивості: (i)* $0 \le f(x,y) \le 1$; *(ii)* $f \in R[0,1]^2$; *(iii)* $X_{\overline{R}}(f) = A$; *(iv)* $Y_{\overline{R}}(f) = \varnothing$.

Доведення. (i) Оскільки $0 \le f_n(x,y) \le 2^{-n}$ на $[0,1]^2$ для кожного n і $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x,y)$ збігається рівномірно на $[0,1]^2$ і для його суми $f(x,y)$ виконується подвійна нерівність $0 \le f(x,y) \le 1$ на $[0,1]^2$.

(ii) Доведемо, що $f \in R[0,1]^2$. Для цього досить встановити, що $\mu(D(f)) = 0$. Оскільки множини B_n замкнені і $A_n \subseteq B_n$, то $D(f_n) \subseteq B_n \times [0,1]$, адже $f_n(x,y) = 0$ на відкритій у квадраті $[0,1]^2$ множині $G_n = ([0,1] \setminus B_n) \times [0,1]$ і тому $G_n \subseteq C(f_n)$. З рівномірної збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x,y)$ на $[0,1]^2$ і включень $([0,1] \setminus B_n) \times [0,1] \subseteq C(f_n)$, що виконуються для кожного n, випливає, що $([0,1] \setminus B) \times [0,1] \subseteq C(f)$, отже, $D(f) \subseteq B \times [0,1]$. Але $\mu(B \times [0,1]) = \lambda(B) \cdot \lambda([0,1]) = 0 \cdot 1 = 0$, отже, і $\mu(D(f)) = 0$.

(iii) Доведемо, що $X_{\overline{R}}(f) = A$. Нехай $x \in A$. Тоді існує таке n, що $x \in A_n$. Для функції $f^x = f(x,\cdot)$ будемо мати: $f^x(y) = 0$ на $\mathbb{I}_0 = [0,1] \setminus \mathbb{Q}_0$ і $f^x(y) \ge f_n^x(y) \ge 2^{-n}$ на $\mathbb{Q}_0$. Оскільки $\overline{\mathbb{I}_0} = \overline{\mathbb{Q}_0} = [0,1]$, то $\overline{\sigma}(f^x, T) \ge 2^{-n}$ і $\underline{\sigma}(f^x, T) = 0$ для кожного розбиття T відрізка $[0,1]$. Тому $u_f(x) \ge 2^{-n}$ і $l_f(x) = 0$. В такому разі $s_f(x) \ge 2^{-n} > 0$, отже, $x \in X_{\overline{R}}(f)$. Нехай $x \in [0,1] \setminus A$. Тоді $f^x = 0$, отже, $f^x \in R[0,1]$, тобто $x \notin X_{\overline{R}}(f)$ і властивість (iii) встановлено.

(iv) Залишилося довести, що $Y_{\overline{R}}(f) = \varnothing$, тобто, що всі горизонтальні розрізи $f_y = f(\cdot, y)$ функції f інтегровні за Ріманом. Якщо $y \in \mathbb{I}_0$, то $f_y = 0$, тому, $f_y \in R[0,1]$. Нехай $y \in \mathbb{Q}_0$. Тоді $f_{n,y} = f_n(\cdot, y) = 2^{-n}\chi_{A_n}$. Оскільки $A_n \subseteq B_n$ і множини B_n замкнені, то $D(f_{n,y}) \subseteq B_n$ для кожного n. Але $\lambda(B_n) = 0$, а тому, і $\lambda(D(f_{n,y})) = 0$ для кожного n. Оскільки функція $f_{n,y}$ обмежена на $[0,1]$, то за критерієм Лебеґа $f_{n,y} \in R[0,1]$ для кожного n. Але ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_{n,y}(x)$ збігається рівномірно на $[0,1]$, отже, і його сума f_y є інтегровною за Ріманом на $[0,1]$. □

Зауваження 1. Якщо множина A є замкненою і $\lambda(A) = 0$, то вже функція $f = \chi_{A \times \mathbb{Q}_0}$ має властивості (i)-(iv), причому $D(f) = A \times [0,1]$.
Зауваження 2. Якщо множина A є F_σ-множиною і $\lambda(A) = 0$, то, покладаючи $B = A$, ми отримаємо, що $B_n = A_n$, і визначена в теоремі 2 функція f крім властивостей (i)-(iv) задовольняє також умову $D(f) = A \times [0,1]$.

4. З теорем 1 і 2 легко вивести такий підсумковий результат.

Теорема 3. *Нехай* A *і* B *— підмножини* $[0,1]$. *Для того, щоб існувала функція* $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, *така, що* $f \in R[0,1]^2$, $X_{\overline{R}}(f) = A$ *і* $Y_{\overline{R}}(f) = B$, *необхідно і досить, щоб множини* A *і* B *містилися в деяких* F_σ*-множинах нульової міри на відрізку* $[0,1]$.

Доведення. Необхідність негайно випливає з теореми 1. Доведемо достатність. Нехай A і B містяться в деяких F_σ-множинах нульової міри на відрізку $[0,1]$. За теоремою 2 існують такі дві функції $g, h \in R[0,1]^2$, що $X_{\overline{R}}(g) = A$, $Y_{\overline{R}}(g) = \varnothing$, $X_{\overline{R}}(h) = \varnothing$ і $Y_{\overline{R}}(h) = B$. Нехай $f = g + h$. Зрозуміло, що $f \in R[0,1]^2$. Якщо $x \in A$, то $g^x \notin R[0,1]$ і $h^x \in R[0,1]$, отже, $f^x = g^x + h^x \notin R[0,1]$. Якщо ж $x \in [0,1] \setminus A$, то $g^x \in R[0,1]$ і $h^x \in R[0,1]$, звідки, $f^x = g^x + h^x \in R[0,1]$. Тому, $X_{\overline{R}}(f) = A$. Подібно перевіряється, що $Y_{\overline{R}}(f) = B$. □

Зауваження 3. Оскільки кожна замкнена множина нульової міри на $[0,1]$ — ніде не щільна, отже, F_σ-множини нульової міри на $[0,1]$, а тому і їхні довільні підмножини, є множинами першої категорії в $[0,1]$. Разом з цим існує множина E ([4, с.15]) нульової міри, яка є залишковою в $[0,\ 1]$, а отже, множиною другої категорії. Для цього досить розглянути деяку перенумерацію множини $\mathbb{Q}_0 = \{r_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ і покласти $E = \bigcap_{m=1}^{\infty} G_m$, де $G_m = (\bigcup_{n=1}^{\infty}(r_n - 2^{-n-m}, r_n + 2^{-n-m})) \cap [0,1]$. Хоча $\lambda(E) = 0$, але не існує такої функції $f \in R[0,1]^2$, що $X_{\overline{R}}(f) = E$.

5. У випадку, коли функція $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ інтегровна за Лебеґом на квадраті $[0,1]^2$, також можна розглянути множини: $X_{\overline{L}}(f) = \{x \in [0,1]\colon f^x$ – не інтегровна$\}$, $Y_{\overline{L}}(f) = \{y \in [0,1]\colon f_y$ – не інтегровна$\}$, при цьому йдеться про неінтегровність за Лебегом на $[0,\ 1]$, — і формулювати задачу про характеризацію цих множин. Нескладно перевірити, що в цьому випадку в ролі множин $X_{\overline{L}}(f), Y_{\overline{L}}(f)$ можуть виступати будь-які підмножини відрізка $[0,1]$, які мають нульову міру Лебеґа.

Справді, якщо функція $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ є інтегровною за Лебеґом, то за теоремою Фубіні ([5, с.317]) вказані множини мають нульову лебеґову міру. Навпаки, нехай A, B — деякі підмножини відрізка $[0,1]$, які мають нульову міру Лебеґа. Візьмемо деяку підмножину N відрізка $[0,1]$, що не вимірна за Лебеґом. Нехай $g(x,y) = \chi_{A\times N}(x,y)$, $h(x,y) = \chi_{N\times B}(x,y)$ і $f = g + h$. Тоді для функції f маємо, що $X_{\overline{L}}(f) = A, Y_{\overline{L}}(f) = B$. Справді, для кожного $x \in [0,1]$ функції h^x інтегровні, оскільки при $x \in N$ маємо $h^x = \chi_B$, а при $y \in [0,1] \setminus N$ маємо, що $h^x = 0$. Функції g^x інтегровні при $x \in [0,1] \setminus A$ і не інтегровні при $x \in A$, як характеристичні функції невимірної множини N. Отже, функції f^x не інтегровні при $x \in A$, як суми інтегровної функції h^x і не інтегровної функції g^x, а при $x \in [0,1] \setminus A$ функції f^x інтегровні, як суми двох інтегровних функцій. Тобто, $X_{\overline{L}}(f) = A$. Подібно і $Y_{\overline{L}}(f) = B$. Далі, обидві функції g і h майже скрізь на $[0,1]^2$ дорівнюють нулю. Тоді і f майже скрізь дорівнює нулю. Отже, f інтегровна за Лебеґом на $[0,1]^2$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Зорич В. А. Математический анализ. Т.2. – М.: Наука, 1984. – 640 с.
2. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.3. – М.:Наука, 1969. – 658 с.
3. Маслюченко В. К., Кукульняк Д. І. *Нарізно інтегровні за Ріманом функції* // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Матем. – 2006. – Вип.288. – С.74–76.
4. Окстоби Дж. Мера и категория. – М.: Мир, 1974. – 160 с.
5. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.:Наука, 1976. – 544 с.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
кафедра математичного аналізу
mathan@chnu.cv.ua
dima.ky@gmail.com

Надійшло 26.04.2004