Математичні Студії. Т.28, №1 Matematychni Studii. V.28, No.1

УДК 517.5+517.9

Ю. Г. Леонов

ВЛОЖЕНИЯ КРАТНЫХ СПЛЕТЕНИЙ ГРУПП $\mathbb{Z}_2$ В ГРУППЫ КАЛУЖНИНА[1]

Yu. G. Leonov. *Immersing wreath powers of the groups $\mathbb{Z}_2$ into the Kaloujnine groups*, Matematychni Studii, **28** (2007) 18-24.

Monomorphisms of arbitrary wreath powers of the groups $\mathbb{Z}_2$ into the Kaloujnine groups is regarded.

Ю. Г. Леонов. *Вложения кратных сплетений групп $\mathbb{Z}_2$ в группы Калужнина* // Математичні Студії. – 2007. – Т.28, №1. – C.18-24.

В работе рассматриваются мономорфизмы произвольных кратных сплетений групп $\mathbb{Z}_2$ в группы Калужнина.

Операция сплетения $A \wr B$ двух групп A и B является одной из важнейших конструкций в теории групп, позволяющей получать новые группы при помощи уже известных. Напомним, что $A \wr B$ есть группа, элементы которой составляют множество пар вида $\{(b, w) \mid b \in B, w \in \mathrm{Fun}(B, A)\}$, где $\mathrm{Fun}(B, A)$ — множество всех функций из B в A с определенной групповой операцией произведения пар $(b_1, w_1) \cdot (b_2, w_2) = (b_1 b_2, w_1^{b_2} w_2)$, причем $w_1^{b_2}(x) = w_1(b_2 x)$, $x \in B$ ([1]). Назовем *группой Калужнина* $P_{p,n}$ n-кратное сплетение групп порядка p, построенное в ([2]). Множество этих групп можно определить рекуррентно следующим образом. Положим $P_{p,0} = \mathbb{Z}_p, P_{p,n} = P_{p,n-1} \wr \mathbb{Z}_p,$ при $n > 0$. Эти группы достаточно хорошо изучены, занимают одно из центральных мест в теории групп, так как являются силовскими p-подгруппами симметрических групп степени p^{n+1} (см., [3], [4]), однако, операция сплетения не является ассоциативной и существует много кратных сплетений n циклических групп порядка p с другим расположением скобок. Количество таких групп совпадает с числом всевозможных расстановок скобок, так как по определению сплетения следует, что при различных расположениях скобок группы имеют различные порядки, т.е. не изоморфны друг другу. Другими словами, число различных групп сплетений n циклических групп порядка p равно числу Каталана $C_n = C_{2n-2}^{n-1}/n$. В данной работе мы рассмотрим гомоморфные вложения кратных сплетений групп $\mathbb{Z}_2$ в группы Калужнина. Наиболее важным случаем является вложение группы $I_n = \mathbb{Z}_2 \wr\ P_{2,n}$.

Теорема 1. *Существует мономорфизм* $\Omega_n\colon\ I_n \to P_{2,m},\quad$ *для* $n \geq 0, m = 2^{n+1} - 1$ *и данное* m *является наименьшим при котором возможен мономорфизм.*

Группы Калужнина легко интерпретируются как группы автоморфизмов однородных деревьев. Поэтому указанные ниже вложения произвольных итеративных сплетений

[1]Работа поддержана институтом Макса Планка, Бонн (MPI) в рамках программы Geometry and Group Theory (2006), а также грантом NSF DMS-0456185
2000 *Mathematics Subject Classification:* 20E22, 15A33, 20B05.

групп $\mathbb{Z}_2$ могут использоваться в качестве интерпретации данных групп в виде подгрупп групп автоморфизмов соответствующих деревьев. Осюда, также будет следовать представление данных групп унитреугольными матрицами над полем из двух элементов (см. [5] и [6]). Согласно [3], каждый элемент группы Калужнина $y \in P_{2,n}$ можно представить в виде таблицы $y = [y_{0,1}, y_{1,1} + y_{1,2}t_1, \dots, y_{n,1} + y_{n,2}t_1 + \dots + y_{n,2^n}t_1 \cdots t_n]$. Здесь на k месте ($k \in \{0, 1, \dots, n\}$) в таблице стоят многочлены $y_k(t_1, \dots, t_k)$, которые являются представителями минимальной степени классов смежности кольца многочленов $\mathbb{Z}_2[t_1, \dots, t_k]$ по модулю идеала, порожденного многочленами вида $t_1^2 - t_1, \dots, t_k^2 - t_k$. Такие *многочлены называются редуцированными.* Операция произведения в таблицах, согласованная с операцией сплетения, определяется следующим образом:

$$[y_0, y_1(t_1), y_2(t_1, t_2), \dots] \cdot [z_0, z_1(t_1), z_2(t_1, t_2), \dots] = \\ = [y_0 + z_0, y_1(t_1 + z_0) + z_1(t_1), y_2(t_1 + z_0, t_2 + z_1(t_1)) + z_2(t_1, t_2), \dots].$$

Рассмотрим множество кратных сплетений груп $\mathbb{Z}_2$ с различным расположением скобок. Перечислять группы сплетений будем рекуррентно, считая $P_{2,1} = P_{2,1}(1)$ и далее для $n \geq 1$ полагая $\mathbb{Z}_2 \wr P_{2,n}(s_1, \dots, s_n) = P_{2,n+1}(1, s_1 + 1, \dots, s_n + 1)$, $P_{2,n}(s_1, \dots, s_n) \wr \mathbb{Z}_2 = P_{2,n+1}(s_1 + 1, \dots, s_n + 1, 1)$ и $P_{2,n}(s_1, \dots, s_n) \wr P_{2,m}(r_1, \dots, r_m) = P_{2,n+m+1}(s_1 + 1, \dots, s_n + 1, 1, r_1 + 1, \dots, r_m + 1)$ при $n, m \geq 1$. Таким образом различным расположениям скобок будут соответствовать различные обозначения (и попарно неизоморфные группы). Заметим, что в группе $P_{2,n}(s_1, \dots, s_n)$ числа $s_1, \dots, s_n$ соответствуют последовательно числу открытых, не еще не закрытых скобок перед каждым знаком сплетения $\wr$. В этих обозначениях группы Калужнина имеют вид $P_{2,n} = P_{2,n}(n, n-1, \dots, 1)$.

1. Вложения групп особого вида. Как будет видно ниже, для вложения в группы Калужнина произвольных групп $P_{2,n}(s_1, \dots, s_n)$ необходимо рассмотреть вложение групп вида $I_n = \mathbb{Z}_2 \wr P_{2,n} = P_{2,n+1}(1, n+1, n, \dots, 2)$. Пусть $UT_N(2)$ – группа нижнетреугольных обратимых матриц размерности N над полем из двух элементов. Рассмотрим представление f_n группы $P_{2,n}$ унитреугольными матрицами из группы $UT_{2^n+1}(2)$, данное в работе [5]. Согласно этой работе, представление получается следующим образом (определение, данное в [5] изменено транспонированием матриц, что более удобно в данной конструкции).

Пусть $t_{i_1} \cdots t_{i_m}$ – некоторый одночлен. *Высотой* такого *одночлена* называем число

$$h(t_{i_1} \cdots t_{i_m}) = 1 + \sum_{b=1}^{m} 2^{i_b - 1}.$$

Очевидно, любой многочлен может быть однозначно представлен в виде суммы одночленов попарно разных высот.

Для $y \in P_{2,n}$ обозначим $y = [y_0, y_1(t_1), \dots, y_n(\bar{t}_n)]$. Пусть

$$y_k(t_1, \dots, t_k) = \sum_{j=1}^{2^k} y_{k,j} t(j),$$

где $t(j)$ – одночлен высоты j, $t(1) = 1$. Наибольшая из высот одночленов с ненулевым коэффициентом в последней сумме называется *высотой многочлена.*

Определим теперь *действие таблицы* $y \in P_{2,n}$ *на многочлен* g высоты $k \in \{1, \dots, 2^n + 1\}$. Для данных n и g составим таблицу элемента $\overline{g}$ в сплетении $P_{2,n+1}$ следующим образом. Первые n координат таблицы выберем нулевыми, а последнюю координату возьмем равной g. Легко видеть, что определение корректно и $\overline{g} \in P_{2,n+1}$. Определим по заданному y элемент $\widetilde{y} = [y_0, \dots, y_n(\bar{t}_n), 0] \in P_{2,n+1}$. Рассмотрим элемент $\overline{g}^{\widetilde{y}} = \widetilde{y}^{-1} \cdot \overline{g} \cdot \widetilde{y}$. Все координаты его таблицы нулевые, кроме, быть может, последней. Многочлен, являющийся последней координатой, обозначим просто g^y. Из определения видно, что высота многочлена $h(g)$ совпадает с высотой $h(g^y)$. Будем говорить, что многочлен g^y получен действием элемента y на многочлен g.

Определим отображение $f_n \colon P_{2,n} \to UT_{2^n+1}(2)$. Высота многочлена в последней координате таблицы $y \in P_{2,n}$ ограничена числом 2^n. Рассмотрим одночлены $t(k)$ высот $k \in \{1, 2, \ldots, 2^n+1\}$ и многочлены $t(k)^y = \sum_{j=1}^{k} u_{k,j} \cdot t(j)$. Возьмем квадратную матрицу $A = f_n(y)$ размерности 2^n+1 с условием $A_{k,j} = \begin{cases} 0, & k < j, \\ u_{k,j}, & k \geq j. \end{cases}$ Из определения видно, что $A_{k,k} = u_{k,k} = 1$ и следовательно отображение f_n задано корректно.

Теорема 2 ([5]). *Отображение $f_n : P_{2,n} \to UT_{2^n+1}(2)$ является мономорфизмом.*

Общий вид матрицы $f_n(y)$ (от переменных $y_{0,1}, y_{1,1}, y_{1,2}, \ldots$) до сих пор полностью не исследован. Некоторую информацию можно получить из следующего утверждения.

Лемма 1. *Для $k = 0, 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, 2^k$ выполняется: 1. $f_n(y)_{2^k+1,j} = y_{k,j}$;*
2. При $l < 2^k+1$ в элементе $f_n(y)_{l,j}$ нет переменных $y_{k,1}, \ldots, y_{k,2^k}$.

Доказательство. Зафиксируем k и заметим, что $t(2^k+1) = t_{k+1}$. Следовательно, $t_{k+1}^y = t_{k+1} + y_k(t_1, \ldots, t_k) = t_{k+1} + \sum_{j=1}^{2^k} y_{k,j} t(j)$ для любого $y \in P_{2,n}$, и первое утверждение леммы следует из определения $f_n(y)$.

Пусть теперь $l < 2^k+1$. Тогда одночлен $t(l)$ может зависеть только от переменных $t_1, \ldots, t_k$. Таким образом, $t(l) = V(t_1, \ldots, t_k)$ и для любого $y \in P_{2,n}$ имеем $V(t_1, \ldots, t_k)^y = V(t_1 + y_0, \ldots, t_k + y_{k-1}(t_1, \ldots, t_{k-1}))$. Полученный многочлен не содержит переменных $y_{b,j}$, для всех $b \geq k$ и для всех j. Лемма доказана. $\square$

Для матрицы $M \in UT_{2^n+1}(2)$ обозначим через $M^{[N]}$, $N \leq 2^n+1$ главную подматрицу порядка N матрицы M ($M^{[N]}$ – матрица, полученная из M выбором первых N строк и N столбцов). Для подмножества матриц $\overline{M} \subseteq UT_{2^n+1}(2)$ множество таких матриц обозначим $\overline{M}^{[N]}$. Очевидно $\overline{M}^{[N]} \subseteq UT_N(2)$.

Рассмотрим множество матриц $M_k = f_k(P_{2,k}) = \{f_k(y) : y \in P_{2,k}\}$, $k \in \{0, \ldots, n\}$. Из сказанного выше о мономорфизме f_n в лемме 1 следует

Лемма 2. *Верно равенство матриц $M_k = M_n^{[2^k+1]}$, $k \leq n$ и отображение $\tau_k \colon M_k \to M_n^{[2^k+1]}$, заданное равенством $\tau_k(f_n(y)^{[2^k+1]}) = f_n(y)^{[2^k+1]}$, является изоморфизмом.*

Зафиксируем n и обозначим $m = 2^{n+1} - 1$. Матрицы множества M_n однозначно определяются переменными $y_{0,1}, y_{1,1}, y_{1,2}, \ldots$, пробегающими кольцо $\mathbb{Z}_2$.

Рассмотрим матрицу $T_n \in UT_m(\mathbb{Z}_2[t_1, \ldots, t_m])$, с элементами из кольца редуцированных многочленов $\mathbb{Z}_2[t_1, \ldots, t_m])$ от переменных $t_1, \ldots, t_m$, пробегающих $\mathbb{Z}_2$. Данную матрицу получим при помощи подстановки $\sigma \colon 1 \to 1$ и $\sigma \colon y_{k,l} \to t_{R(k,l)}$, $k \in \{0, \ldots, n\}$, $l \in \{1, \ldots, 2^k\}$, $R(k,l) = \begin{cases} k+1, & \text{при } l = 1 \\ 2^k - k + l + n - 1, & \text{при } l > 1, \end{cases}$ заменяющей элементы $y_{k,l}$ в матрице $f_n(y)$ на соответствующие переменные кольца $\mathbb{Z}_2[t_1, \ldots, t_m])$. Схематично отображение σ можно изобразить так: $y_{0,1} \to t_1$, $y_{1,1} \to t_2, \ldots, y_{n,1} \to t_{n+1}$, $y_{2,2} \to t_{n+2}$, $y_{2,3} \to t_{n+3}$, $y_{2,4} \to t_{n+4}$, $y_{3,2} \to t_{n+5} \ldots$. Нетрудно видеть, что для выбранных диапазонов, которые пробегают числа k и l, соответствие R является взаимнооднозначным и $R(k,l)$ принимает значения $1, 2, \ldots, m$. Это позволяет рассмотреть также обратную функцию $r \colon \{1, 2, \ldots, m\} \to \{0, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, 2^n\}$, с условием: $r(i) = (k,l)$, если $R(k,l) = i$. Обозначим, в этом случае $r_1(i) = k$, $r_2(i) = l$.

Отметим, что для $x \in P_{2,n}$ можно считать матрицу $f_n(x)$ принадлежащей группе $UT_m(\mathbb{Z}_2[t_1, \ldots, t_m])$. При этом, элементы этой матрицы – константы. Как следствие получаем корректность произведения $f_n(x) \cdot T_n$, как элемента группы $UT_m(\mathbb{Z}_2[t_1, \ldots, t_m])$.

Для $x \in P_{2,n}$ и $i \in \{1, \ldots, m\}$ определим многочлены $\Phi_i^{\{x\}}(\bar{t}_i) = t_i + (f_n(x) \cdot T_n)_{k,l}$, где $k = 2^{r_1(i)} + 1$, $l = r_2(i)$. Для упрощения записи иногда будем писать $\bar{t}_i$ вместо последовательности переменных $t_1, \ldots, t_i$. Обозначим, $M_n(x) = f_n(x) \cdot T_n$.

Лемма 3. *Многочлены $\Phi_i^{\{x\}}(\bar{t}_i)$ не зависят от переменной t_i для любого $i \in \{1, \ldots, m\}$.*

Доказательство. Рассмотрим k-ую строку матрицы T_n при $k = 2^v+1$, для некоторого v. Согласно определению вложения R и по первому утверждению леммы 1, имеем $(T_n)_{k,1} = t_{k+1}$ и $(T_n)_{k,l} = t_{2^k-k+l+n-1}$, при $l > 1$. Первые $k-1$ элемент в каждом столбце с номером l являются многочленами от переменных с меньшими индексами. Действительно, при $l = 1$ это следует из второго утверждения леммы 1. Из этого же утверждения и согласно индуктивным рассуждениям, в матрице T_n в первых $k-1$ строках все многочлены зависят от переменных с индексами $\leq 2^{k-1} - (k-1) + 2^{k-1} + n - 1 = 2^k - k + n$, которые меньше числа $2^k - k + l + n - 1$ для любых $l > 1$.

Для $i \in \{1, \ldots, m\}$, докажем, что t_i, присутствующее в определении функции $\Phi_i^{\{x\}}$, сокращается. Пусть $k = 2^{r_1(i)} + 1$, $l = r_2(i)$. Имеем, $M_n(x)_{k,l} = \sum_{j=l}^{k} (f_n(x))_{k,j} \cdot (T_n)_{j,l} = \sum_{j=l}^{k-1} x_{r_1(i),j} \cdot (T_n)_{j,l} + (T_n)_{k,l}$. Из сказанного выше, все слагаемые этой суммы, кроме последнего, являются многочленами от переменных t_*, меньших индексов, чем индекс $(T_n)_{k,l} = t_i$. Другими словами, многочлен $M_n(x)_{k,l}$ имеет вид $t_i + V(t_1, \ldots, t_{i-1})$. Следовательно, $\Phi_i^{\{x\}} = t_i + t_i + V(t_1, \ldots, t_{i-1}) = V(t_1, \ldots, t_{i-1})$ и лемма доказана. □

Ввиду доказанной леммы 3 будем писать $\Phi_i^{\{x\}}(\bar{t}_{i-1})$.

Лемма 4. *Для любого $k \in \{1, \ldots, 2^n\}$ многочлен $(T_n)_{k,1}$ является одночленом высоты k.*

Доказательство. следует из определения представления. Пусть $t(k)$ – одночлен высоты k и $y \in P_{2,n}$. Тогда, элемент $(f_n(y))_{k,1}$ равен свободному члену многочлена $t(k)^y$. Пусть $t(k) = t_{i_1} t_{i_2} \ldots$. Отсюда, $t(k)^y = (t_{i_1} + y_{i_1-1}(\bar{t}_{i_1-1})) \cdot (t_{i_2} + y_{i_2-1}(\bar{t}_{i_2-1}) \ldots$ и $(f_n(y))_{k,1} = y_{i_1-1,1} \cdot y_{i_2-1,1} \ldots$. Последний элемент, по определению отображения R (в силу $R(i_1 - 1, 1) = i_1, R(i_2 - 1, 1) = i_2, \ldots$), дает элемент матрицы $(T_n)_{k,1} = t_{i_1} t_{i_2} \cdots = t(k)$, что и требовалось доказать. □

Лемма 5. *Пусть $x = [x_{0,1}, x_{1,1} + x_{1,2} t_1, \ldots, x_{n,1} + \cdots + x_{n,2^n} t_1 \cdots t_n] \in P_{2,n}$. Отображение $\rho_n \colon P_{2,n} \to P_{2,m-1}$ заданное таблицей вида $\rho_n(x) = [\Phi_1^{\{x\}}, \Phi_2^{\{x\}}(t_1), \ldots, \Phi_m^{\{x\}}(\bar{t}_{m-1})]$ является мономорфизмом.*

Доказательство. Обозначим, $x_k(\bar{t}_k) = \sum_{j=1}^{2^k} x_{k,j} t(j)$. В силу леммы 4, учитывая вид $2^k + 1$-ой строки матрицы $f_n(x)$ получаем, что $\Phi_k^{\{x\}}(\bar{t}_k) = x_k(\bar{t}_k)$, для $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Отсюда сразу следует, что отображение ρ_n является вложением. Осталось доказать, что ρ_n гомоморфизм. Пусть $y = [y_0, y_1(t_1), \ldots, y_n(\bar{t}_n)]$. Покажем, что $\rho_n(xy) = \rho_n(x)\rho_n(y)$. Другими словами, необходимо показать, что для любого $i \in \{1, \ldots, m\}$

$$\Phi_i^{\{x\}}(t_1 + \Phi_1^{\{y\}}, t_2 + \Phi_2^{\{y\}}(t_1), \ldots) + \Phi_i^{\{y\}}(\bar{t}_i) = \Phi_i^{\{xy\}}(\bar{t}_i). \tag{1}$$

Доказательство проведем по индукции с очевидной базой. Для фиксированного $k \leq n$ и $d \in \{1, 2, \ldots, 2^k\}$ рассмотрим (единственное) i с условием $r_1(i) = k$, $r_2(i) = d$. Так как $(f_n(x))_{2^k+1,l} = x_{k,l}$, при $l \leq 2^k$, то в многочлене $\Phi_i^{\{x\}}(\bar{t}_i)$ слагаемое с коэффициентом $x_{k,l}$ имеет вид $x_{k,l} \cdot (T_n)_{l,d}$. Допустим, в многочлен $(T_n)_{l,d}$ входит одночлен $t_{i_1} \ldots t_{i_b}$.

Из определения матрицы T_n и по лемме 1, следует, что любой индекс переменной t_* в данном одночлене (а значит и во всем многочлене) меньше k и значит можно воспользоваться индукцией. По индукции слева в (1) при коэффициенте $x_{k,l}$ вместо нашего одночлена имеем следующий многочлен $(t_{i_1} + \Phi_{i_1}^{\{y\}}(\bar{t}_{i_1})) \ldots (t_{i_b} + \Phi_{i_b}^{\{y\}}(\bar{t}_{i_b})) =$

$= (f_n(y)\cdot T_n)_{2^{r_1(i_1)}+1, r_2(i_1)} \dots (f_n(y)\cdot T_n)_{2^{r_1(i_b)}+1, r_2(i_b)}$. Заметим теперь, что одночлен $t_{i_1}\dots t_{i_b}$ можно интерпретировать в терминах элементов матрицы T_n. А именно, $t_{i_1}\dots t_{i_b} = (T_n)_{2^{r_1(i_1)}+1, r_2(i_1)} \dots (T_n)_{2^{r_1(i_b)}+1, r_2(i_b)}$. По лемме 2, в силу изоморфности отображения $\tau_{k-1}\colon\ f_n(P_{2,n})^{[2^{k-1}+1]} \to f_n(P_{2,n})^{[2^k]}$ имеем $M_n(y)_{l,d} = t_{i_1}\dots t_{i_b} + \dots + t_{j_1}\dots t_{j_c} = M_n(y)_{2^{r_1(i_1)}+1, r_2(i_1)} \dots M_n(y)_{2^{r_1(i_b)}+1, r_2(i_b)} + \dots + M_n(y)_{2^{r_1(j_1)}+1, r_2(j_1)} \dots M_n(y)_{2^{r_1(j_c)}+1, r_2(j_c)}$. С другой стороны, в многочлене $\Phi_i^{\{xy\}}(\bar t_{i-1}) = t_i + ((f_n(xy)\cdot T_n)_{2^k+1,d}$, в силу $f_n(xy) = f_n(x)\cdot f_n(y)$, слагаемое с коэффициентом $x_{k,l}$ равно $(f_n(y)\cdot T_n)_{l,d}$. Мы получаем равенство многочленов слева и справа в (1) при любом коэффициенте $x_{k,l}$, а значит равенство (1) выполняется и лемма доказана. □

Теорема 3. *1. Существует мономорфизм $\Omega_n\colon\ I_n \to P_{2,m}$, для $n \geq 0, m = 2^{n+1}-1$ и данное m является наименьшим при котором возможен мономорфизм.*
2. Пусть $g = (y, w) \in I_n$, $y = [y_0, \dots, y_n(\bar t_n)] \in P_{2,n}$, $w \in \mathrm{Fun}(P_{2,n}, \mathbb{Z}_2)$. Тогда элемент $\Omega_n(g)$ может быть определен своей таблицей $\Omega_n(g) = [\Phi_1^{\{y\}}, \Phi_2^{\{y\}}(t_1), \dots, \Phi_m^{\{y\}}(\bar t_{m-1}), F_w(\bar t_m)]$, в группе $P_{2,m}$, где многочлен последней координаты таблицы зависит только от функции w и равен

$$F_w(\bar t_m) = \sum_{x\in P_{2,n}} \big(w(x)\cdot \prod_{i=1}^{m} \big(t_i + \Phi_i^{\{x^{-1}\}}(\bar t_{i-1})\big)\big). \tag{2}$$

Доказательство. Прежде всего, для данного n, порядок группы $P_{2,m-1}$ меньше порядка группы I_n, поэтому выбранное m не может быть уменьшено. Отметим, что в формуле (2) каждое слагаемое есть произведение коэффициента $w(x)$ и $m = 2^{n+1}-1$ сомножителей.
1. Проверим, является ли выбранное отображение Ω_n гомоморфизмом. Пусть $g = (y, w)$, $h = (z, u) \in I_n$. Тогда по определению сплетения в группе I_n имеем $g\cdot h = (y\cdot z, w^z\cdot u)$ и выполнение равенства $\Omega_n(g\cdot h) = \Omega_n(g)\cdot\Omega_n(h)$ следует из леммы 5 для всех координат таблицы элемента кроме последней. Последняя координата таблицы $\Omega_n((yz, w^z u))$, учитывая $(w^z u)(x) = w(zx) + u(x)$, равна $F_{w^z u}(\bar t_m) = F_{w^z}(\bar t_m) + F_u(\bar t_m)$. С другой стороны, последняя координата таблицы произведения $\Omega_n((y, w))\cdot\Omega_n((z, u))$ равна $F_w(t_1 + \Phi_1^{\{z\}}, \dots, t_m + \Phi_m^{\{z\}}(\bar t_{m-1})) + F_u(\bar t_m)$. Осталось проверить выполнение равенства

$$F_{w^z}(\bar t_m) = F_w(t_1 + \Phi_1^{\{z\}}, \dots, t_m + \Phi_m^{\{z\}}(\bar t_{m-1})). \tag{3}$$

Посмотрим на многочлен справа, как на сумму по формуле (2). Слагаемое с коэффициентом $w(x)$ состоит из произведения, i-ый сомножитель которого имеет вид $t_i + \Phi_i^{\{z\}}(\bar t_{i-1}) + \Phi_i^{\{x^{-1}\}}(t_1 + \Phi_1^{\{z\}}, \dots, t_{i-1} + \Phi_{i-1}^{\{z\}}(\bar t_{i-2}))$. Рассмотрим левую часть выражения (3) $F_{w^z}(\bar t_m) = \sum_{x\in P_{2,n}} \big(w^z(x)\cdot \prod_{i=1}^{m}\big(t_i + \Phi_i^{\{x^{-1}\}}(\bar t_{i-1})\big)\big) = \sum_{x\in P_{2,n}} \big(w(x)\cdot \prod_{i=1}^{m}\big(t_i + \Phi_i^{\{x^{-1}z\}}(\bar t_{i-1})\big)\big)$. В силу леммы 5, для i-ого многочлена $(\rho_n(x^{-1}z))_i$ таблицы $\rho_n(x^{-1}z)$ выполняется $\Phi_i^{\{x^{-1}z\}}(\bar t_{i-1}) = (\rho_n(x^{-1}z))_i = (\rho_n(x^{-1})\cdot\rho_n(z))_i = \Phi_i^{\{x^{-1}\}}(t_1 + \Phi_1^{\{z\}}, \dots, t_{i-1} + \Phi_{i-1}^{\{z\}}(\bar t_{i-2})) + \Phi_i^{\{z\}}(\bar t_{i-1})$. Отсюда видно попарное совпадение сомножителей левой и правой части выражения (3) в каждом слагаемом и гомоморфизм отображения Ω_n доказан.

Докажем теперь, что Ω_n - вложение. Точнее, докажем, что при $(y, w) \neq (z, u)$ следует $\Omega_n((y, w)) \neq \Omega_n((z, u))$. Неравенство верно при $y \neq z$ в силу лемммы 5, поэтому далее считаем $y = z$. Рассмотрим выражение (2) для многочлена $F_w(\bar t_m)$. Обозначим $v = x^{-1}$ и рассмотрим таблицу элемента $v = [v_0, v_1(t_1), \dots, v_n(\bar t_n)] \in P_{2,n}$. Отметим, что свободный член многочлена $t_i+\Phi_i^{\{v\}}(\bar{t}_{i-1}) = (f_n(v)\cdot T_n)_{2^{r_1(i)}+1,r_2(i)}$ равен $f_n(v)_{2^{r_1(i)}+1,r_2(i)} = v_{r_1(i),r_2(i)}$. Зафиксируем $t_1,\dots,t_m$ и рассмотрим систему уравнений $\{\Phi_i^{\{v\}}(\bar{t}_{i-1}) = 1\ ;\ i \in \{1,2,\dots,m\}\ \}$ относительно неизвестных $v_{0,1},\ v_{1,1}, v_{1,2},\dots,v_{n,2^n}$. Как следует из леммы 1, переменная $v_{r_1(i),r_2(i)}$ не встречается в многочленах $(f_n(v)\cdot T_n)_{2^{r_1(j)}+1,r_2(j)}$ для любых $j < i$. Следовательно, матрица коэффициентов нашей системы m уравнений и m неизвестных может быть представлена в унитреугольном виде, а значит система имеет единственное решение, которое обозначим $v(t_1,\dots,t_m)$. Слагаемое с коэффициентом $w(v)$ будет не нулевым только при условии равенства 1 значений всех сомножителей в формуле (2). Отсюда, при фиксированном наборе $t_1,\dots,t_m$ мы имеем: $F_w(t_1,\dots,t_m) = w(v(t_1,\dots,t_m))$, причем для иного набора значений $t_1,\dots,t_m$, как видно из рассуждений выше, мы будем иметь другое $v \in P_{2,n}$. Следовательно, при $w \neq u$ и для некоторого $x \in P_{2,n}$ с условием $w(x^{-1}) \neq u(x^{-1})$ мы имеем (единственный) набор элементов $t_1,\dots,t_m \in \mathbb{Z}_2$ с условием $x^{-1} = v = v(t_1,\dots,t_m)$. Отсюда получаем неравенство $F_w(t_1,\dots,t_m) \neq F_u(t_1,\dots,t_m)$. Значит, Ω_n вложение и мономорфизм. Теорема доказана. □

Кроме указанного мономорфизма, можно выбрать другие гомоморфные вложения. В частности, в определении $\rho_n(x)$ многочлены $\Phi_i^{\{x\}}(\bar{t}_{i-1})$ можно переставлять между собой (с определенным ограничением). Довольно естественным мономорфизмом является отображение, заданное по аналогии с теоремой 2 при помощи функции: $R(k,l) = 2^k + l$, при $k \in \{0,\dots,n\}$; $l \in \{1,\dots,2^k\}$.

2. Примеры. Построим вложение Ω_n при $n = 1$ и $n = 2$. Мономорфизм Ω_n будет указан полностью при помощи теоремы 2 заданием многочленов $\Phi_i^{\{y\}}(\bar{t}_i)$, $i \in \{1,\dots,2^{n+1}-1\}$, $y \in P_{2,n}$. Пусть $y = [y_{0,1}, y_{1,1}+y_{1,2}t_1, y_{2,1}+y_{2,2}t_1+y_{2,3}t_2+y_{2,4}t_1\cdot t_2]$. Тогда ([5]),

$$f_2(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_{0,1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ y_{1,1} & y_{1,2} & 1 & 0 & \\ y_{0,1}\cdot y_{1,1} & y_{1,1}+y_{1,2}+y_{0,1}\cdot y_{1,2} & y_{0,1} & 1 & 0 \\ y_{2,1} & y_{2,2} & y_{2,3} & y_{2,4} & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) В случае $n = 1$, $y = [y_{0,1}, y_{1,1}+y_{1,2}t_1] \in P_{2,1}$, и, $\Phi_1^{\{y\}} = y_{0,1}$, $\Phi_2^{\{y\}}(t_1) = y_{1,1} + y_{1,2}t_1$, $\Phi_3^{\{y\}}(t_1,t_2) = y_{1,2}$. **(ii)** Если $n = 2$, $y = [y_{0,1}, y_{1,1}+y_{1,2}t_1, y_{2,1}+y_{2,2}t_1+y_{2,3}t_2+y_{2,4}t_1\cdot t_2] \in P_{2,2}$, тогда, согласно определению, $\Phi_1^{\{y\}} = y_{0,1}$, $\Phi_2^{\{y\}}(t_1) = y_{1,1} + y_{1,2}t_1$, $\Phi_3^{\{y\}}(t_1,t_2) = y_{2,1}+y_{2,2}t_1+y_{2,3}t_2+y_{2,4}t_1\cdot t_2$, $\Phi_4^{\{y\}}(\bar{t}_3) = y_{1,2}$, $\Phi_5^{\{y\}}(\bar{t}_4) = y_{2,2}+y_{2,3}t_4+y_{2,4}(t_2+t_1\cdot t_4+t_4)$, $\Phi_6^{\{y\}}(\bar{t}_5) = y_{2,3}+y_{2,4}t_1$, $\Phi_7^{\{y\}}(\bar{t}_6) = y_{2,4}$.

3. Общий случай. Теорема 2 позволяет увидеть геометрическую интерпретацию группы Калужнина $P_{2,n}$ как группы автоморфизмов $Aut(T_{2,n})$ корневого бинарного дерева (от каждой вершины вниз исходит ровно 2 ребра) $T_{2,n}$ уровня n. Элементы этой группы можно рассматривать в виде так называемых *портретов*: бинарных деревьев уровня n с весом каждой вершины из кольца $\mathbb{Z}_2$. Покажем как распределять вес вершин дерева $T_{2,n}$ для элемента сплетения $y = [y_0, y_1(t_1),\dots,y_n(\bar{t}_n)]$. Обозначим множество вершин, удаленных от корневой вершины на расстояние i через $V^{(i)}$. Будем говорить, что такие вершины лежат на уровне i дерева $T_{2,n}$. Каждый многочлен $y_i(t_1,\dots,t_i)$ отвечает за распределение веса на вершинах уровня i. Покажем это. Положим вес корневой вершины равным y_0. Перенумеруем вершины множества $V^{(i)}$, $i > 0$ бинарной последовательностью длины i (количество таких вершин равно 2^i) следующим образом. Положим вершины множества $V^{(1)}$ с номерами 0 и 1, а далее по индукции для вершины множества $V^{(i)}$,

$0 < i < n$ с (бинарным) номером $v_1 \dots v_i$ полагаем номера вершин - непосредственных потомков этой вершины равными $v_1 \dots v_i 0$ и $v_1 \dots v_i 1$. Пусть теперь вершина $v \in V^{(i)}$ имеет код $v_1 \dots v_i$. Тогда положим вес этой вершины равным $y_i(v_1, \dots, v_i)$. Так определенный портрет дерева согласовывает групповую операцию в сплетении и в группе автоморфизмов дерева $T_{2,n}$.

Сказанное позволяет легко перенести утверждение теоремы о мономорфизме группы I_n на случай группы $P_{2,N} \wr P_{2,n}$, $N > 0$. Для этого достаточно рассматривать формулу (2) без изменений, считая эту сумму формальной с коэффициентами $w(x)$ из группы $P_{2,N}$. Обозначим данный мономорфизм как $\Omega_{N,n}(P_{2,N} \wr P_{2,n})$. Из сказанного выше следует, что $\Omega_n(I_n)$ можно интерпретировать как подгруппу группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(T_{2,m})$, $m = 2^{n+1} - 1$. Тогда группу $\Omega_{N,n}(P_{2,N} \wr P_{2,n})$ можно считать копией некоторой подгруппы группы $Aut(T_{2,m+N})$. Действительно, для $g = (y, w) \in P_{2,N} \wr P_{2,n}$ можно построить отображение $\Omega_{N,n}(g)$ по портрету дерева $T_{2,m+N}$, приписывая к любой вершине уровня m с кодом $v_1 \dots v_m$ не вес из группы $\mathbb{Z}_2$, а портрет дерева уровня N, соответствующий элементу $F_w(v_1, \dots, v_m) \in P_{2,N}$. Отсюда, $\Omega_{N,n}(P_{2,N} \wr P_{2,n}) \leq P_{2,m+N}$.

Мономорфизм произвольного кратного сплетения $P_{2,n}(s_1, \dots, s_n)$ в некоторую группу Калужнина $P_{2,L}$ (а значит и в группу автоморфизмов некоторого дерева) можно строить рекуррентно. Для этого необходимо найти в кратном сплетении фрагменты вида $P_{2,N_1} \wr P_{2,N_2}$ (для некоторых $N_1, N_2 \geq 0$, такие фрагменты обязательно найдутся) и вложить их в $P_{2,2^{N_1+1}-1+N_2}$ указанным выше способом. Затем, процедуру следует повторять до тех пор, пока процесс не закончится после окончательного вложения в группу вида $P_{2,L}$. Данный итоговый мономорфизм $P_{2,n}(s_1, \dots, s_n)$ в $P_{2,L}$ уже не обязательно будет наименьшим (в смысле полученного L). В связи с этим, представляет интерес *найти способ нахождения наименьших мономорфизмов в общем случае.*

Указанную в этой работе технику вложения по-видимому без особых осложнений можно использовать и в случае $p > 2$.

Автор выражает глубокую благодарность проф. В. И. Сущанскому за ценные замечания и поддержку во время работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. – М.: Наука, 1982. – 288 с.
2. Калужнин Л. А. *Об одном обобщении силовских p-подгрупп симметрических групп*// Acta Math. Acad. Sci. Hung. – 1951. – №2. – P.197–221.
3. Калужнин Л. А. Избранные главы теории групп. – Киев: Изд-во КГУ, 1979. – 52 с.
4. Ceccherini–Silberstein T.G., Leonov Yu., Scarabotti F., Tolli F. *Generalized Kaloujnine groups, uniseriality and height of automorphisms*// Intern. J. of Algebra and Computations. – 2005. – V.15, №3. – P.503–527.
5. Леонов Ю. Г. *Представление финитно-аппроксимируемых 2-групп бесконечномерными унитреугольными матрицами над полем из двух элементов*// Матем. студії. – 2004. – Т.22,№2. – С.134–140.
6. Леонов Ю. Г., Некрашевич В. В., Сущанский В. И. *Представление сплетений унитреугольными матрицами*// Доп. НАНУ. – 2005. – №4. – С.29–33.

Одесская национальная академия связи им. А. С. Попова
кафедра информационных технологий,
leonov_yu@yahoo.com

Поступило 7.03.2007