УДК 512.552

В. М. Дармосюк

СЛАБКОПЕРВИННІ СПАДКОВІ СПРАВА $SPSD$-КІЛЬЦЯ

V. M. Darmosiuk. *Weakly prime right hereditary SPSD-rings*, Matematychni Studii, **28** (2007) 11–17.

It is proved that every weakly prime right hereditary semiperfect and semidistributive ring is a serial Noetherian ring.

В. М. Дармосюк. *Слабопервичнные наследственные справа SPSD-кольца* // Математичні Студії. – 2007. – Т.28, №1. – С.11–17.

Доказывается, что любое слабопервичное наследственное справа полусовершенное и полудистрибутивное кольцо является полуцепным нетеровым кольцом.

1. Попередні відомості. Нехай A асоціативне кільце з $1 \neq 0$. Ми будемо розглядати праві модулі над кільцем A. Такі модулі називатимемо A-*модулями*, або просто *модулями.* Нагадаємо, що модуль M називається *дистрибутивним*, якщо для будь-яких його підмодулів K, L, N виконується рівність

$$K \cap (L + N) = K \cap L + K \cap N.$$

Зрозуміло, що підмодуль і фактормодуль дистрибутивного модудя є дистрибутивними. Модуль називається *напівдистрибутивним,* якщо він є прямою сумою дистрибутивних модулів. Кільце A називається *напівдистрибутивним справа* (зліва), якщо його правий (лівий) регулярний модуль $A_A({}_AA)$ є напівдистрибутивним. Напівдистрибутивне справа і зліва кільце називається *напівдистрибутивним.*

Позначимо через R *радикал Джекобсона* кільця A. Нагадаємо, що *кільце* A називається *напівлокальним,* якщо $\overline{A} = A/R$ є артіновим справа кільцем. Напівлокальне кільце A називається *напівдосконалим,* якщо його ідемпотенти можна піднімати за модулем радикала Джекобсона R кільця A.

Напівдосконале та напівдистрибутивне кільце називається $SPSD$-*кільцем.* Властивості таких кілець вивчались в ([10], [13], [14]). Важливим підкласом $SPSD$-кілець є *напівланцюгові кільця.* Нагадаємо означення ланцюгового та напівланцюгового кільця. Модуль називається *ланцюговим,* якщо гратка його підмодулів є ланцюгом, тобто множина всіх його підмодулів є лінійно впорядкованою по включенню. Модуль називається *напівланцюговим,* якщо він розкладається в пряму суму ланцюгових підмодулів. Кільце називається *ланцюговим справа (зліва),* якщо воно є правим (лівим) ланцюговим модулем над собою, тобто гратка правих (лівих) ідеалів є лінійно впорядкованою. Кільце називається *напівланцюговим справа (зліва),* якщо воно є правим (лівим) напівланцюговим модулем над собою. Кільце, яке є одночасно напівланцюговим справа і зліва

2000 *Mathematics Subject Classification:* 16P50, 16U20.

називається *напівланцюговим кільцем.* Вперше поняття "ланцюговий" та "напівланцюговий" були введені Л. А. Скорняковим ([20]). Ті ж самі поняття були введені Уорфілдом ([21]), як "uniserial module" і "uniserial ring" та "serial module" і "serial ring".

Артінові ланцюгові та примарно розкладні напівланцюгові артінові кільця вперше розглядав та вивчав Г. Кьоте в ([15]). Він довів, що будь-який модуль над таким кільцем є прямою сумою циклічних модулів (він називав такі кільця "Einreihig Ringen"). Цей результат узагальнений Т. Накаямою для артінових напівланцюгових кілець, причому називалися такі кільця "узагальнені ланцюгові кільця" ([17], [18], [19]). У цих роботах Накаямою доведено, що будь-який модуль над таким кільцем є прямою сумою ланцюгових підмодулів, кожен з яких гомоморфний образ ідеала, породженого примітивним ідемпотентом.

Артінові кільця головних ідеалів вивчалися в роботах Г. Кьоте та К. Асано ([1]) та ([2]). Л. А. Скорняков в ([20]) довів, що A є артіновим напівланцюговим кільцем тоді і тільки тоді, коли кожен лівий A-модуль є прямою сумою ланцюгових модулів. Структуру та властивості напівланцюгових артінових кілець вивчали багато авторів, зокрема, Купіш, Мюразе, Голді, Ейзенбуд та Гріффіт. Локальні нетерові та спадкові кільця вивчав П. М. Кон ([4]) та А. Закс ([22]). Вперше напівланцюгові неартінові кільця вивчалися та описувалися Р. Б. Уорфілдом ([21]) та В. В. Кириченком ([11], [12]). Зокрема вони повністю описали структуру напівланцюгових нетерових кілець.

Нагадаємо, що *модуль* M називається *скінченно зображувальним,* якщо $M \cong P/Q$, де P та Q скінченнопороджені модулі, і P-проективний модуль. Наступна теорема Дрозда-Уорфілда ([7], [21]) дає характеризацію кілець, над якими всі скінченно зображувальні модулі є напівланцюговими.

Теорема 1. *Для кільця A наступні умови є еквівалентними: 1) кільце A напівланцюгове; 2) всі скінченно зображувальні праві A-модулі є напівланцюговими; 3) всі скінченно зображувальні ліві A-модулі є напівланцюговими.*

Нам знадобляться також такі дві теореми.

Теорема 2 ([3]). *Нехай A нетерове справа та зліва кільце. Тоді якщо A спадкове справа, то воно є і спадковим зліва кільцем.*

Теорема 3 ([16], с.327). *Кільце A є нетеровим спадковим напівдосконалим первинним кільцем тоді і тільки тоді, коли A ізоморфне кільцю $n \times n$-матриць*

$$A \cong \begin{pmatrix} D(m_1 \times m_1) & M(m_1 \times m_2) & M(m_1 \times m_3) & \dots & M(m_1 \times m_k) \\ D(m_2 \times m_1) & D(m_2 \times m_2) & M(m_2 \times m_3) & \dots & M(m_2 \times m_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & M(m_{k-1} \times m_k) \\ D(m_k \times m_1) & D(m_k \times m_2) & \dots & \dots & D(m_k \times m_k) \end{pmatrix} \qquad (1)$$

над дискретно нормованим (необов'язково комутативним) кільцем D з максимальним ідеалом M, де $n = \sum_{j=1}^{k} m_i$ та $D(m_i \times m_j)$ і $M(m_i \times m_j)$ позначають множину всіх $m_i \times m_j$ матриць над D та M, відповідно.

2. Кільце $H_m(\mathcal{O})$.Наведемо означення дискретно нормованого кільця, дане Уорфілдом ([21]).

Означення 1 ([21], с.211). *Дискретно нормоване кільце* є нетеровим неартіновим локальним ланцюговим кільцем. Це еквівалентно тому, що кільце $\mathcal{O}$ з радикалом Джекобсона $\mathcal{M}$ задовольняє умови: *1.* $\mathcal{O}/\mathcal{M}$-тіло; *2.* $\bigcap_{n>0} \mathcal{M}^n = 0$; *3.* $\mathcal{M}^n \neq 0$ для всіх $n > 0$; *4.* $\mathcal{M}^n/\mathcal{M}^{n+1}$ є простим, як лівий і правий $\mathcal{O}$-модуль.

У цьому випадку $\mathcal{M} = \pi\mathcal{O} = \mathcal{O}\pi$, де π-простий елемент кільця $\mathcal{O}$.

Кільце $H_m(\mathcal{O})$ має вигляд $H_m(\mathcal{O}) = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{O} & ... & \mathcal{O} \\ \pi\mathcal{O} & \mathcal{O} & ... & \mathcal{O} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \pi\mathcal{O} & ... & \pi\mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix}$, де $\mathcal{O}$-дискретно нормоване кільце. Наведемо означення *верхньотрикутного матричного кільця.*

Означення 2 ([21], с.211). Нехай B-кільце, J-двосторонній ідеал в B. Кільце A називається $(B : J)$-*верхньотрикутним матричним кільцем*, якщо кільце A є підкільцем всіх $m \times m$ матриць з елементами із кільця B таким, що всі елементи нижче діагоналі (α_{ij} у яких $i > j$) є елементами з J.

Приклад 1. Нехай D-тіло, тоді його радикал Джекобсона-це нуль, а $(D : 0)$-верхньотрикутне матричне кільце $T_n(D)$ має вигляд $T_n(D) = \begin{pmatrix} D & D & ... & D \\ 0 & D & ... & D \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & D \end{pmatrix}$.

Приклад 2. Кільце $H_m(\mathcal{O})$ є $(\mathcal{O} : \mathcal{M})$-верхньотрикутним матричним кільцем.

Кільця, які розглядав Міхлер (див. теорему 3) в загальному випадку не є зведеними. Зведене кільце A вигляду (1) має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \pi\mathcal{O} & ... & ... & \pi\mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \pi\mathcal{O} \\ \mathcal{O} & ... & ... & \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

де $\mathcal{O}$-дискретно нормоване кільце. Будь-яке кільце вигляду (2) ізоморфне до кільця $H_m(\mathcal{O})$. Ми розглядаємо кільця у вигляді $H_m(\mathcal{O})$, оскільки прагнемо, щоб нумерація вершин сагайдака була узгодженою з нумерацією головних модулів. Нагадаємо, що *головний модуль*-це нерозкладний проективний A-модуль, який має наступний вигляд: $P = eA$. Отже, $H_m(\mathcal{O}) = P_1 \oplus ... \oplus P_m$, де $e_{ii}H_m(\mathcal{O}) = P_i$. Нехай R-радикал Джекобсона, тоді $P_iR = P_{i+1}$ $(i = 1, ..., m-1)$ і $P_mR = \pi P_1$, тобто $P_mR \simeq P_1$.
Сагайдак є простим циклом C_m, тобто

$$C_m = \left\{ \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \cdots \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[lll, bend left] \end{tikzcd} \right\}.$$

Як приклад наведемо сагайдак $(D : 0)$-верхньотрикутного матричного кільця.

$$T_n(D) = \left\{ \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \cdots \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd} \right\}.$$

Такими кільцями з точністю до еквівалентності в сенсі Моріти вичерпуються всі спадкові напівланцюгові (справа та зліва) кільця.

Теорема 4 ([12], с. 518, [21], с.211). *Якщо A нерозкладне нетерове напівланцюгове (неартінове) кільце, тоді A еквівалентне в сенсі Моріти до $(\mathcal{O}:\mathcal{M})$ -верхньотрикутного матричного кільця над дискретно нормованим кільцем $\mathcal{O}$ з радикалом Джекобсона $\mathcal{M}$, тобто до кільця $H_m(\mathcal{O})$.*

3. Слабкопервинні кільця. Як відомо, кільце A називається *напівпервинним,* якщо воно не має ненульових нільпотентних ідеалів. Кільце A називається первинним, якщо добуток будь-яких двох ненульових двосторонніх ідеалів A є ненульовим.

Означення 3 ([5]). Кільце A називається *слабкопервинним*, якщо добуток будь-яких двох ідеалів, які не належать до R, є ненульовим.

Зрозуміло, що будь-яке первинне кільце є слабкопервинним і слабкопервинне кільце є нерозкладним. Метою цієї статті є доведення такої основної теореми.

Теорема 5. *Спадкове справа слабкопервинне $SPSD$-кільце еквівалентне в сенсі Моріти або до тіла, або до кільця $H_m(\mathcal{O})$. Навпаки всі такі кільця є спадковими справа і зліва слабкопервинними $SPSD$-кільцями.*

Для доведення даної теореми нагадаємо основні властивості слабкопервинних кілець.

Лема 1 ([5]). *Якщо e ненульовий ідемпотент слабкопервинного кільця A, тоді кільце eAe є слабкопервинним.*

Доведення. Нехай I та J двосторонні ідеали, які не належать радикалу Джекобсона eRe кільця eAe і нехай $1 = e + f$. Розглянемо двосторонні ідеали $\overline{I} = I + IeAf + fAeI + fAeIeAf$ та $\overline{J} = J + JeAf + fAeJ + fAeJeAf$ кільця A. Зрозуміло, що $\widetilde{I} \nsubseteq R$ та $\widetilde{J} \nsubseteq R$. Отже, $\widetilde{I}\widetilde{J} \neq 0$. З іншої сторони $\widetilde{I}\widetilde{J} = IJ + IJeAf + fAeIJ + fAeIJeAf$. Це означає, що $\widetilde{I}\widetilde{J} \neq 0$, лему доведено.

□

Теорема 6 ([5]). *Нехай $1 = e_1 + e_2 + ... + e_n$ — розклад одиниці напівдосконалого кільця A в суму взаємно ортогональних локальних ідемпотентів і $A_{ij} = e_iAe_j$ $(i, j = 1, ..., n)$. Кільце A є слабкопервинним тоді і тільки тоді, коли $A_{ij} \neq 0$ для всіх i, j.*

Доведення. Припустимо, що кільце A є слабкопервинним і $A_{pq} = 0$ для деяких $p \neq q$. Розглянемо кільце $C = A_{pp} + A_{qq} + A_{qp}$. Тоді $Z = A_{pp} + A_{qp}$ та $N = A_{qq} + A_{qp}$ двосторонні ідеали кільця C, які не належать радикалу Джекобсона кільця C і такі, що виконується рівність $ZN = 0$. Але це суперечить лемі 1.

Якщо всі $A_{ij} \neq 0$, тоді A-слабкопервинне. Існує розклад одиниці кільця A в суму взаємно ортогональних ідемпотентів $1 = f_1 + ... + f_s$ таких, що $f_iAf_i = M_{n_i}(\mathcal{O}_i)$, з локальним кільцем $\mathcal{O}_i$, $i = 1, ..., s$ та $f_iAf_i = f_iRf_j$ $(i \neq j, i, j = 1, ..., s)$.

Розглянемо двосторонні ідеали I та J такі, що $I \nsubseteq R$, $J \nsubseteq R$. Нехай $f_kIf_l = I_{kl}$ та $f_pJf_q = J_{pq}$. Це означає, що існує такий індекс t_0, що $I_{t_0t_0} \nsubseteq R$. Без втрати загальності, можна припустити, що $t_0 = 1$. Очевидно існує індекс t_1 такий, що $J_{t_1t_1} \nsubseteq R$. Якщо $t_1 = 1$, тоді $IJ \neq 0$. Отже, можна припустити, що $t_1 = 2$ та $J_{22} = M_{n_2}(\mathcal{O}_2)$. Оскільки $I_{11}f_1Af_2 = f_1Af_2 \subseteq I$ та $f_1Af_2J_{22} = f_1Af_2 \subseteq J$, то отримуємо $f_1If_1f_1Jf_2 = f_1Af_1f_1Af_2 = f_1Af_2 \neq 0$. □

Добре відомим є таке твердження.

Твердження 1. *Модуль P проективний тоді і тільки тоді, коли для кожного епіморфізма π: $M \to P$ існує гомоморфізм i: $P \to M$ такий, що $\pi i = 1_P$ (1_P-тотожний автоморфізм модуля P).*

Доведення. Тотожне відображення 1_P, за означенням проективного модуля P, можна представити у вигляді $1_P = \pi i$, де i: $P \to M$. Навпаки, нехай $\pi i = 1_P$. Тоді $m = i(\pi m) + (m - i\pi(m))$ дає прямий розклад модуля M в пряму суму модуля, ізоморфного $\operatorname{Im}\pi$ та $\operatorname{Ker}\pi$. Беручи в якості M вільний модуль F, фактормодулем якого є P, отримуємо, що P проективний. □

Наступну добре відому лему наведемо з доведенням.

Лема 2. *Нехай е ненульовий ідемпотент спадкового справа кільця A , тоді кільце eAe спадкове справа.*

Доведення. Позначимо через $e = e_1$ та $e_2 = 1 - e_1$. Нехай $A = \bigoplus_{i,j=1}^{2} A_{ij}$, де $A_{ij} = e_i A e_j$ $(i, j = 1, 2)$-двосторонній пірсовський розклад кільця A. Нехай I-правий ідеал кільця A_{11}, $\{x_j\}_{j\in y}$-його система твірних. Розглянемо правий ідеал $\widetilde{I} = (I, IA_{12})$. Очевидно $\{x_j\}_{j\in y}$-система твірних правого ідеалу $\widetilde{I}$. Позначимо через $(eA)^y$ пряму суму y екземплярів модуля eA. Існує епіморфізм π: $(eA)^y \to \widetilde{I}$, при якому елемент $e_i = (0, ..., 0, e, 0, ...)$ (e стоїть на j-ому місці) переходить в x_j. Оскільки кільце A спадкове справа, то існує гомоморфізм i: $\widetilde{I} \to (eA)^y$ такий, що πi співпадає з тотожнім автоморфізмом $(eA)^y$. Згідно твердження 1 $(eA)^y = \operatorname{Im} i(\widetilde{I}) \oplus \operatorname{Ker}\pi$. Помноживши цю рівність справа на e, отримуємо $(eA)^y e = \operatorname{Im} i(\widetilde{I})e \oplus (\operatorname{Ker}\pi)e$. Враховуючи, що $(eA)^y e = (eAe)^y$ та $\operatorname{Im} i(I) = \operatorname{Im} i(\widetilde{I})e$ отримуємо, що I-проективний eAe-модуль. □

Твердження 2. *Якщо A слабкопервинне спадкове справа $SPSD$-кільце і e -ненульовий ідемпотент кільця A, то кільце eAe також є слабкопервинним спадковим справа $SPSD$-кільцем.*

Доведення. Слабкопервинність випливає з леми 1. Спадковість справа випливає з леми 2. З теореми редукції для $SPSD$-кілець ([10], с.344) випливає, що для будь-якого ненульового ідемпотента e $SPSD$-кільця A кільце eAe також є $SPSD$-кільцем. □

З твердження 2 випливає що, якщо A є слабкопервинним спадковим справа $SPSD$-кільцем, то і зведене кільце є слабкопервинним спадковим справа $SPSD$-кільцем. Тому, надалі, будемо вважати, що кільце A є зведеним.

4. Мінори першого та другого порядків слабкопервинних спадкових справа $SPSD$-кілець та доведення основної теореми. Нехай A кільце, P скінченопороджений проективний A-модуль, який розкладається в пряму суму n нерозкладних модулів. *Кільце ендоморфізмів* $B = E(P)$ модуля P називається *мінором порядку* n кільця A ([6], с.173).

Розглянемо мінори першого та другого порядків слабкопервинних спадкових справа $SPSD$-кілець. Нехай $\mathcal{O}$-мінор першого порядку такого кільця. Тоді $\mathcal{O}$ є локальним спадковим справа дистрибутивним кільцем. З теореми 14.2.1 ([10], с.343) випливає, що воно є ланцюговим кільцем. У цьому випадку з спадковості справа кільця $\mathcal{O}$ отримуємо, що воно нетерове справа і за твердженням 14.4.10 ([10], с.349) випливає, що $\mathcal{O}$ є або тілом, або дискретно нормованим кільцем. Всі такі кільця є нетеровими з двох сторін ланцюговими спадковими кільцями.

Нагадаємо означення *кускової напівдосконалої області* ([9], [13]). *Напівдосконале кільце A* називається *кусковою областю*, якщо будь-який ненульовий гомоморфізм нерозкладних проективних A-модулів є мономорфізмом.

Твердження 3 ([13], с.450). *Для довільного локального ідемпотента e кускової області A кільце eAe є цілісним кільцем.*

Доведення є очевидним. З твердження 1 випливає таке твердження.

Твердження 4. *Будь-яке спадкове справа напівдосконале кільце є кусковою областю.*

Лема 3. *Нехай M ланцюговий лівий $\mathcal{O}$-модуль над ланцюговим кільцем $\mathcal{O}$ такий, що включення $\mathcal{M}M \subset M$ строге ($\mathcal{M}$-єдиний максимальний ідеал кільця $\mathcal{O}$). Тоді $M = \mathcal{O}m$.*

Доведення. Нехай $m \in M/\mathcal{M}M$. Під модуль $\mathcal{O}m \subseteq M$ не лежить в $\mathcal{M}M$. Фактормодуль $M/\mathcal{M}M$є простим тому, що модуль Mє ланцюговим. Отже, $M = \mathcal{O}m$.

Правильний і правий аналог цієї леми. □

Нам знадобиться така, доведена в [12], теорема.

Теорема 7. *Нехай A нетерове з двох сторін напівдосконале кільце, R-його радикал Джекобсона. Кільце A є напівланцюговим тоді і тільки тоді, коли факторкільце A/R^2 є напівланцюговим.*

Твердження 5. *Будь-який зведений мінор слабкопервинного спадкового справа $SPSD$-кільця ізоморфний кільцю $H_2(\mathcal{O})$, де $\mathcal{O}$ -дискретно нормоване кільце.*

Доведення. Нехай кільце $B = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_1 & X \\ Y & \mathcal{O}_2 \end{pmatrix}$ зведений мінор слабкопервинного спадкового справа $SPSD$-кільця, а $R(B)$ радикал Джекобсона кільця B . Очевидно, $R(B) = \begin{pmatrix} R_1 & X \\ Y & R_2 \end{pmatrix}$. Покажемо, що $\mathcal{O}_1$ та $\mathcal{O}_2$ — дискретно нормовані кільця. Якщо це не так, то без обмеження загальності, можна сказати, що $\mathcal{O}_1$ є тілом і $R(B) = \begin{pmatrix} 0 & X \\ Y & R_2 \end{pmatrix}$. Тоді $x \cdot y = 0$ для будь-яких $x \in X$та $y \in Y$. Це суперечить тому, що будь-яке спадкове справа кільце є кусковою областю.

Покажемо, що будь-який мінор другого порядку слабкопервинного спадкового справа $SPSD$-кільця є нетеровим справа та зліва. Розглянемо послідовність включень: $B = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_1 & X \\ Y & \mathcal{O}_2 \end{pmatrix} \supset \begin{pmatrix} R_1 & X \\ Y & R_2 \end{pmatrix} = R \supset R^2 = \begin{pmatrix} R_1^2 + XY & R_1X + XR_2 \\ YR_1 + R_2Y & R_2^2 + XY \end{pmatrix}$. Покажемо, що R_1X строго лежить в X. Якщо це на так, то $X = R_1X$ і $XY \neq 0$. Те, що $XY \neq 0$ випливає із спадковості справа кільця B. Тому $XY = R_1^m = R_1XY = R_1^{m+1}$. За лемою Накаями отримуємо, що $R_1^m = 0$. Отримана суперечність доводить, що R_1X строго міститься в X, звідки за лемою 3, $X = \mathcal{O}_1x_0$. Аналогічно можна довести, що $Y = \mathcal{O}_2y_0$. Тому за критерієм нетеровості (див.[10], глава 3) B-нетерове зліва кільце. Аналогічним чином можна довести, що B-нетерове справа кільце. Отже, B-слабкопервинне нетерове з двох сторін спадкове справа $SPSD$-кільце. За теоремою Ауслендера воно є спадковим справа та зліва. Розглянемо факторкільце B/R^2. З сказаного вище випливає, що B/R^2-напівланцюгове кільце і за теоремою 7 кільце B є напівланцюговим кільцем. За теоремою 4 кільце B ізоморфне кільцю $H_2(\mathcal{O})$. Ми отримали, що кожен мінор другого порядку слабкопервинного спадкового справа $SPSD$-кільця є нетеровим з двох сторін спадковим справа і зліва напівланцюговим кільцем. □

Доведення основної теореми 5 випливає з такого твердження.

Твердження 6. *Нехай A спадкове справа слабкопервинне $SPSD$-кільце, яке не є локальним. Тоді A еквівалентно в сенсі Моріти кільцю $H_m(\mathcal{O})$, де $m \geq 2$.*

Доведення. Доведемо, що A первинне кільце. Можна вважати кільце A зведеним. Нехай I двосторонній нільпотентний ідеал кільця A і $1 = e_1 + ... + e_n$ розклад $1 \in A$ в суму попарно ортогональних примітивних ідемпотентів. Якщо $e_k I e_k \neq 0$ для деякого k, тоді $e_k I e_k$ нільпотентний ідеал дискретно нормованого кільця $\mathcal{O}_k$. Отримали суперечність. Нехай $I_{ij} = e_i I e_j \neq 0$ для $i \neq j$. Тоді мінор другого порядку $(e_1 + e_j)A(e_i + e_j)$ є первинним кільцем і містить ненульовий нільпотентний ідеал $(e_1 + e_j)I(e_i + e_j)$. Отже, A напівпервинне кільце і за теоремою 3.4 ([13]) є прямим добутком первинних кілець. Але кільце A-нерозкладне і тому первинне. Кожен мінор другого порядку кільця A ізоморфний з кільцем A, звідки випливає, що кільце A ізоморфне до кільця $H_m(\mathcal{O})$. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Asano K. *Über Hauptidealringe mit Kettensatz* // Osaka Math. J. – 1949. – V.1. – P.56–61.
2. Asano K. *Über verallgemeinerte Abelsche Gruppen mit hyperkomplexen Operatorenring und ihre Anwendungen* // Japan J. Math. – 1939. – V.15. – P.231–253.
3. Auslander M. *On dimension of modules and algebras III* // Nagoya Math. J. – 1955. – №9. – P.67–77.
4. Cohn P.M. *Hereditary local rings* // Nagoya Math. J. – 1966. – №1. – P.223–230.
5. Danlyev Kh., Kirichenko V.V., Yaremenko Yu. V. *On weakly prime Noeterian semiperfect rings with two-generated ideals* // Доп. НАН України. – 1996. – №12. – P.7–9.
6. Drozd Yu.A. *Minors and reduction theorems* // Coll. Math. Soc. J. Bolyai. – 1971. – V.6. – P. 173–176.
7. Дрозд Ю.А. *Об обобщенно однорядных кольцах*// Мат.заметки. – 1975. – Т. 185. – С. 705–710.
8. Fuller K.R. *On indecomposable injective over artinian rings* // Pacific. J. Math. – 1969. – V.29. – P.115–135.
9. Gordon R., Small L. *Piecewise domains* // Journal of algebra. – 1972. – V.23. – P.553–564.
10. Hazewinkel M., Gubareni N., Kirichenko V.V. *Algebras, rings and modules*// Kluwer Academic Publishers. – 2004. – V.1. – 380 pp.
11. Кириченко В.В. *Обобщенно однорядные кольца* // Киев: Препринт IM-75-1, 1975.
12. Кириченко В.В. *Обобщенно однорядные кольца* // Мат. сб. – 1976. – Т.99(141), №4. – С. 559—581.
13. Кириченко В.В., Хибина М.А. *Полусовершенные полудистрибутивные кольца* // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры./Киев: ИМ НАН Украины, 1993. – С. 457–480.
14. Kirichenko V.V. *Semi-perfect semi-distributive rings* // Algebras and Representation Theory. – 2000. – V.3. – P. 81–98.
15. Köthe G. *Verallgemeinerte Abelsche Gruppen mit hyperkomplexen Operatorenring* // Math.Zeitschr. – 1935. – V.39. – P.31–44.
16. Michler G. O. *Structure of semi-perfect hereditary noetherian rings* // Journal of algebra. – 1969. – №13. – P.327–343.
17. Nakayama T. *Note on uniserial and generalized uniserial rings* // Proc. Imp. Acad. Tokyo. – 1940. – V.16. – P.285–289.
18. Nakayama T. *On Frobeniusean algebras I* // Ann. of Math. – 1939. – V.40. – P.611–633.
19. Nakayama T. *On Frobeniusean algebras II* // Ann. of Math. – 1941. – V.42. – P.1–21.
20. Скорняков Л.А. *Когда все модули полуцепные* // Мат. Заметки. – 1969. – Т.5. – С.173–182.
21. Warfield R.B.,Jr. *Serial rings and finitely presented modules* // Journal of algebra. – 1975. – №37. – P.187–222.
22. Zaks A. *Hereditary local rings* // Michigan Math. J. – 1970. – V.17. – P.267–272.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
механіко-математичний факультет

Надійшло 31.05.2007
Після переробки 10.09.2007