УДК 512.552

М. В. Плахотник

КВАЗІКРОНЕКЕРОВІ ДОБУТКИ ГОРЕНШТЕЙНОВИХ МАТРИЦЬ

M. V. Plakhotnyk. *On the quasikronecker product of Gorenstein matrices*, Matematychni Studii, **28** (2007) 3–10.

The construction of quasikronecker product of matrices is introduced in this article. It preserves the matrix property of being Gorenstein matrix and defines the semigroup structure on the set of Gorenstein matrices. Also the cyclic index of direct product of permutations is expressed in terms of cyclic indices of the initial ones. This is used to show impossibility of using quasikronecker product for describing all Gorenstein matrices.

М. В. Плахотник. *О квазикронекеровских произведениях горенштейновых матриц* // Математичні Студії. – 2007. – Т.28, №1. – С.3–10.

В статье введена конструкция квазикронекеровского произведения матриц, которая сохраняет свойство матрицы быть горенштейновой, и определяет полугрупповую структуру на множестве горенштейновых матриц. Цикловой индекс прямого произведения перестановок выражен через индексы исходных. Доказана невозможность использования квазикронекеровских произведений для описания всех горенштейновых матриц.

Горенштейнові матриці є потужним засобом вивчення черепичних порядків над дискретно нормованими кільцями. Ці порядки, починаючи з 70-х років минулого століття, вивчались багатьма математиками, зокрема, Р. Б. Тарсі, В. Румпом, А. Відеманом, Х. Фуджіїтою, В. А. Ятегаонкаром, К. В. Рогенкампом, Д. Сімсоном, Ю. А. Дроздом, О. Г. Завадським та В. В. Кириченком.

Відомо багато математичних конструкцій, які включають в себе горенштейнові матриці. Серез них можемо назвати правило побудови сагайдака за горенштейновою матрицею і його дослідження; порівняння горенштейнової матриці з таблицею Келі деякої групи (тобто дослідження можливості розгляду горенштейнової матриці як таблиці Келі групи); відоме дослідження груп, таблиці Келі яких є горенштейновими матрицями; на даний час цілком вивчені та описані горенштейнові матриці, перестановка Кириченка яких є циклом; відоме дослідження зв'язку ланцюгів Маркова з черепичними порядками (частинним випадком яких є горенштейнові черепичні порядки); відоме дослідження горенштейнових $(0, 1)$ матриць.

Легко перевірити, що кронекерів добуток двох горенштейнових матриць не є горенштейновою матрицею, і, навіть, може не бути матрицею показників. Втім, можна ввести деяку операцію, яка задається майже так, як кронекерів добуток, і зберігає властивість матриці бути горенштейновою. Ця операція за свою зовнішню схожість з кронекеровим добутком названа квазікронекеровим добутком матриць. Втім, перед безпосереднім описом квазікронекерового добутку та його властивостей, нагадаємо деякі факти про кронекерів добуток матриць та орієнтовані графи.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 05C25, 05C50.

Нехай σ — перестановка множини $X_m = \{1, \dots, m\}$, а τ — перестановка множини $X_n = \{1, \dots, n\}$. Вслід за [8] it прямим добутком цих *перестановок* називатимемо перестановку $\gamma = \sigma \times \tau$, визначену на прямому добутку $X_m \times X_n$ за правилом

$$\gamma(x, y) = (\sigma(x), \tau(y)).$$

Нехай $\{p_i\}_{i \in I}$ та $\{q_j\}_{j \in J}$ — множини вершин графів F та G відповідно. *Кронекеровим добутком* цих *графів* називається ([6]) граф $F \otimes G$, вершинами якого є пари $(p_i,\, q_j)$; кількість стрілок, що з'єднують вершину $(p_i,\, q_j)$ графа $F \otimes G$ з вершиною $(p_k,\, q_l)$ цього графа, дорівнює добуткові кількостей стрілок, що з'єднують p_i з p_k в графі F та кількості стрілок, що з'єднують q_j з q_l в графі G.

Твердження 1 ([6]). *Граф $G \otimes H$ зв'язний тоді і лише тоді, коли один з графів G та H має цикл непарної довжини.*

Для графа G через $d(G)$ позначимо найбільший спільний дільник довжин циклів цього графа.

Твердження 2 ([7]). *Нехай G та H — сильно зв'язні графи, $d_1 = d(G)$, $d_2 = d(H)$, $d_3 =$ НСД$(d_1,\, d_2)$. Тоді граф $G \otimes H$ має точно d_3 зв'язних компонент і для кожної його компоненти C має місце рівність $d(C) =$ НСК$(d_1,\, d_2)$.*

Це твердження можна узагальнити до такого вигляду

Твердження 3 ([7]). *Нехай $G_1, \dots, G_s$ — сильно зв'язні графи, $d_i = d(G_i)$. Тоді кількість зв'язних компонент в $G = G_1 \otimes \ldots \otimes G_s$ дорівнює $\prod d_i/$НСК$\{d_i\}$, кожна з яких має $d =$ НСД$\{d_i\}$.*

Зробимо зауваження про зв'язок кронекерового добутку матриць та кронекерового добутку неорієнтованих графів без петель. Для довільного такого графа, матриця суміжності A (для якої $a_{ij} = a_{ji}$ для кожних i та j) визначається не однозначно, а лише з точністю до перенумерації вершин графа. Тому, насправді графові відповідає не матриця A, а клас еквівалентних матриць $\overline{A}$, де еквівалентність задається спряженням перестановочною матрицею. Нехай $\circ$ — деяка матрична операція, яка індукує композицію графів, заданих матрицями A та B. Вимагатимемо, щоб ця операція мала властивості:

(1) $A \circ B$ є матрицею суміжності деякого графа без петель.

(2) Для довільних перестановочних матриць P_1 та P_2 відповідних порядків існує така перестановочна матриця P, що виконується рівність $P(A \circ B)P^{-1} = (P_1 A P_1^{-1}) \circ (P_2 B P_2^{-1})$, тобто матриці $P(A \circ B)P^{-1}$ та $(P_1 A P_1^{-1}) \circ (P_2 B P_2^{-1})$ визначають один і той самий граф з точністю до перенумерації вершин.

Крім того повинні виконуватись умови:

(3) $\overline{A \circ B} = \overline{B \circ A}$

(4) $\overline{(A \circ B) \circ C} = \overline{A \circ (B \circ C)}$.

Однією з операцій, яка має наведені властивості, є *кронекерів добуток* ([6]). Відповідну операцію з матрицями можна виписати явно. Вона називається *кронекеровим добутком матриць*.

Нехай A та B — квадратні матриці розміру n та m відповідно. *Кронекеровим добутком* цих *матриць* називається матриця

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B & \cdots & a_{1,m}B \\ a_{2,1}B & a_{2,2}B & \cdots & a_{2,m}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}B & a_{m,2} & \cdots & a_{m,m}B \end{pmatrix}.$$

Твердження 4 ([6]). *Нехай A та B — матриці суміжності двох графів. Тоді кронекерів добуток цих графів є графом, визначеним матрицею $A \otimes B$ як матрицею суміжності.*

Нехай U_k — матриця з одиниць розмірності k, A та B — матриці розмірностей m та n відповідно. *Квазікронекеровим добутком матриць* A та B називатимемо матрицю $C = A \odot B = A \otimes U_n + U_m \otimes B$. Легко бачити, що квазікронекеровий добуток матриць є матрицею вигляду

$$C = \begin{pmatrix} a_{1,1}U_n + B & a_{1,2}U_n + B & \cdots & a_{1,m}U_n + B \\ a_{2,1}U_n + B & a_{2,2}U_n + B & \cdots & a_{2,m}U_n + B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}U_n + B & a_{m,2}U_n + B & \cdots & a_{m,m}U_n + B \end{pmatrix}.$$

Цілочисельну матрицю $A = (a_{i,j})$ порядку n називатимемо:

матрицею показників, якщо $a_{i,j} + a_{j,k} \geq a_{i,k}$ та $a_{i,i} = 0$ для всіх $i, j, k \in [1, n]$;

зведеною матрицею показників, якщо $a_{i,j} + a_{j,i} > 0$ для всіх i, j , $i \neq j$.

Зведена матриця показників A називається *горенштейновою*, якщо існує така перестановка без нерухомих точок σ множини $\{1, 2, \dots n\}$, що $a_{i,k} + a_{k,\sigma(i)} = a_{i,\sigma(i)}$ для всіх $i, k \in [1, n]$. Співвідношення вигляду $a_{i,k} + a_{k,\sigma(i)} = a_{i,\sigma(i)}$ називаються *горенштейновими співвідношеннями*, а перестановка σ — *перестановка Кириченка* ([2]).

Горенштейнові матриці A, B називаються *еквівалентними*, якщо одну з іншої можна отримати такими перетвореннями:

1) додаванням до кожного елемента деякого рядка матриці фіксованого цілого числа з одночасним відніманням цього числа від кожного елемента стовпчика з цим же номером;

2) одночасною перестановкою двох рядків та двох стовпчиків з тими ж номерами,

3) композицією вказаних перетворень 1) і 2).

Перетворення 1) і 2) називатимемо відповідно перетвореннями першого та другого типу. Наступні твердження є досить важливими в теорії горенштейнових матриць, оскільки розбивають множину цих матриць на класи еквівалентності, при цьому розбитті кожен з класів еквівалентних матриць містить точно одну матрицю з нульовим першим рядком.

Твердження 5 ([4]). *При перетвореннях першого типу горенштейнова матриця переходить в горенштейнову, якій відповідає та сама перестановка Кириченка.*

Твердження 6 ([4]). *Якщо A — горенштейнова матриця з відповідною перестановкою σ, а B отримана з неї перетворенням другого типу, то B — горенштейнова з перестановкою $\tau\sigma\tau$, де τ — відповідна транспозиція.*

Теорема 1. *Нехай задано горенштейнові матриці $A = (a_{i,j})$ розмірності m з перестановкою Кириченка σ та $B = (b_{i,j})$ розмірності n з перестановкою Кириченка τ. Тоді матриця $C = A \odot B$ є горенштейновою матрицею розмірності mn з перестановкою Кириченка $\gamma = \sigma \times \tau$.*

Доведення. Для доведення цієї теореми явно випишемо формули для елементів матриці C та перестановки γ, що діє на множині потужності mn.

Почнемо з матриці C. Легко бачити, що для довільних $i, j \in [1, m]$ та $p, q \in [1, n]$ існує елемент матриці C, який дорівнює $a_{i,j} + b_{p,q}$. Справді, оскільки множиною блоків, з яких складена матриця C є $a_{r,s}U_n + B$, то в матриці C є блок $a_{i,j}U_n + B$, всі елементи якого є сумами $a_{i,j}$ з усіма можливими елементами матриці B.

Ці самі міркуваня дозволяють вказати елемент $c_{x,y}$ матриці C, який дорівнює $a_{i,j} + b_{p,q}$. Оскільки $c_{x,y}$ належить до блоку з координатами (i, j), то $x = n(i-1)+r$ для деякого $r \in [1,\, n]$. Легко бачити, що остача при діленні x на n дорівнює остачі при діленні на n першої координати відповідного елемента матриці B, звідки $x = n(i-1)+p$. Аналогічно отримаємо $y = n(j-1)+q$. Отже, маємо формулу для елемента матриці C, відповідного сумі елементів матриць A та B:

$$a_{i,j} + b_{p,q} = c_{n(i-1)+p,n(j-1)+q} \tag{1}$$

Нескладно подібно виразити елементи матриці C через елементи матриць A і B. Нехай $c_{x,y} = a_{i,j} + b_{p,q}$. Елемент $c_{x,y}$ блочної матриці C розташований у блоці з координатами $\left(\left[\frac{x-1}{n}\right]+1, \left[\frac{y-1}{n}\right]+1\right)$, звідки $i = \left[\frac{x-1}{n}\right]+1$, $j = \left[\frac{y-1}{n}\right]+1$. Коефіцієнти елемента b визначають зсув $c_{x,y}$ у відповідному блоці матриці C, тому $p = x - n\left[\frac{x-1}{n}\right]$, $q = y - n\left[\frac{y-1}{n}\right]$.

Випишемо явну формулу для дії перестановки γ на елементи множини $\{1, \ldots, mn\}$. Занумеровуючи множину пар (a, b), $a \in [1, m]$, $b \in [1, n]$, природно вважати, що $(a, b) \sim \sim n(a-1) + b$, звідки $\gamma(n(a-1)+b) \sim (\sigma(a), \tau(b)) \sim n(\sigma(a)-1) + \tau(b)$, тобто

$$\gamma(b + n(a-1)) = n(\sigma(a)-1) + \tau(b) \tag{2}$$

Доведемо, що матриця C є матрицею показників.

Для довільних i, $i \in [1, mn]$ маємо $c_{i,i} = a_{[\frac{i-1}{n}]+1,[\frac{i-1}{n}]+1} + b_{i-n[\frac{i-1}{n}],i-n[\frac{i-1}{n}]} = 0$, тоді $c_{i,j} + c_{j,k} = \left(a_{[\frac{i-1}{n}]+1,[\frac{j-1}{n}]+1} + b_{i-n[\frac{i-1}{n}],j-n[\frac{j-1}{n}]}\right) + \left(a_{[\frac{j-1}{n}]+1,[\frac{k-1}{n}]+1} + b_{j-n[\frac{j-1}{n}],k-n[\frac{k-1}{n}]}\right) \geq \geq a_{[\frac{i-1}{n}]+1,[\frac{k-1}{n}]+1} + b_{i-n[\frac{i-1}{n}],k-n[\frac{k-1}{n}]} = c_{i,k}$.

Доведемо, що матриця C є зведеною матрицею показників. З доведеного раніше випливає, що

$c_{i,j} + c_{j,i} = \left(a_{[\frac{i-1}{n}]+1,[\frac{j-1}{n}]+1} + b_{i-n[\frac{i-1}{n}],j-n[\frac{j-1}{n}]}\right) + \left(a_{[\frac{j-1}{n}]+1,[\frac{i-1}{n}]+1} + b_{j-n[\frac{j-1}{n}],i-n[\frac{i-1}{n}]}\right) > 0.$

Перевіримо виконання горенштейнових співвідношень для матриці C. Зафіксувавши довільні числа $r, s \in [1, mn]$, доведемо рівність $c_{r,s} + c_{s,\gamma(r)} = c_{r,\gamma(r)}$. Розглянемо такі числа $i, j \in [1, n]$, та $p, q \in [1, n]$, що $a_{i,j} + b_{p,q} = c_{n(i-1)+p,n(j-1)+q} = c_{r,s}$. Тоді далі маємо ланцюжок рівностей: $c_{r,s} + c_{s,\gamma(r)} = c_{n(i-1)+p,n(j-1)+q} + c_{n(j-1)+q,\gamma(n(i-1)+p)} = c_{n(i-1)+p,n(j-1)+q} + + c_{n(j-1)+q,n(\sigma(i)-1)+\tau(p)} = \left(a_{i,j} + b_{p,q}\right) + \left(a_{j,\sigma(i)} + b_{q,\tau(p)}\right) = \left(a_{i,j} + a_{j,\sigma(i)}\right) + \left(b_{p,q} + b_{q,\tau(p)}\right)$. З горенштейнових співвідношень, співвідношень (1) та (2), отримуємо $c_{r,s} + c_{s,\gamma(r)} = a_{i,\sigma(i)} + b_{p,\tau(p)} = c_{n(i-1)+p,n(\sigma(i)-1)+\tau(p)} = c_{n(i-1)+p,\gamma(n(i-1)+p)} = c_{r,\gamma(r)}$, що завершує доведення теореми. □

Доведемо, що класи спряжених перестановок утворюють комутативну напівгрупу відносно операції прямого добутку. Оскільки критерієм спряженості перестановок є співпадання їх циклових індексів, то для доведення комутативності вказаної напівгрупи достатньо довести, що цикловий індекс прямого добутку перестановок не залежить від порядку множників. Це випливає з наступної теореми.

Теорема 2. *Нехай задано перестановку σ, яка має цикловий індекс $\{l_1, \ldots, l_q\}$, та τ, яка має цикловий індекс $\{L_1, \ldots, L_s\}$. Тоді перестановка $\gamma = \sigma \times \tau$ має цикловий індекс $\{НСК(l_i, L_j) | \ i \in [1, q], \ j \in [1, s]\}$. При цьому кожне з чисел НСК(l_i, L_j) зустрічається в індексі γ точно НСД(l_i, L_j) разів.*

Для доведення цієї теореми нагадаємо деякі поняття.

Нехай задано відображення f деякої множини X в себе, і зафіксовано точку $x_0 \in X$. *Траєкторією* точки x_0, породженою відображенням f, називається послідовність $x_k, \ k \geq 0$, для якої $x_{k+1} = f(x_k)$ для кожного $k \geq 0$. *Орбітою* точки x_0, породженою відображенням f називається потужність її траєкторії.

Зауважимо, що зі скінченності множини X випливає, що орбіта кожної точки містить скінченну кількість елементів незалежно від відображення f. Крім того, якщо f є перестановкою скінченної множини, то кожна траєкторія є *циклом*, тобто для неї виконується рівність $x_{k+t} = x_k$ для деякого t і довільного $k \geq 0$. При цьому найменше T, для якого виконується остання рівність, називатимемо *періодом* траєкторії. *Цикловим індексом* перестановки називається множина потужностей різних орбіт траєкторій точок множини, на якій ця перестановка діє.

Доведення теореми 2. Нехай задано перестановки σ множини $X = \{1, \ldots, m\}$ та τ множини $Y = \{1, \ldots, n\}$, які визначають перестановку γ множини $P = X \times Y$. Зафіксуємо довільний елемент $p = (x_1, y_1) \in P$ і розглянемо траєкторію цього елемента для відображення γ. Нехай C_x та C_y — орбіти точок x_1 та y_1 відповідно, а l_x та l_y — довжини цих орбіт. Оскільки γ є перестановкою, то відповідна траєкторія є циклом. Позначимо через k його довжину. З означення довжини циклічної траєкторії маємо послідовність $(x_1, y_1), \ (x_2 = \sigma(x_1), y_2 = \tau(y_1)), \ldots, (x_k = \sigma^{(k-1)}(x_1), y_k = \tau^{(k-1)}(y_1)), (x_{k+1} = = x_1 = \sigma^k(x_1), y_{k+1} = y_1 = \tau^k(y_1)), \ldots$, де через σ^i та τ^i позначаємо степінь відповідних відображень в сенсі композиції. Очевидно, що кожна з множин $\{x_1, \ldots, x_k\}$ та $\{y_1, \ldots, y_k\}$ є орбітою точки x_1 та y_1 при відображеннях σ та τ відповідно. Оскільки записана послідовність є орбітою точки p, то k є найменшим з чисел, для яких виконуються умови $\sigma^k(x_1) = x_1$ та $\tau^k(y_1) = y_1$, отже, число k є найменшим спільним кратним чисел l_x та l_y.

Нехай C_x^i та C_y^j — деякі цикли перестановок σ та τ, які мають довжини l_x^i та l_y^j відповідно. Зафіксуємо по одній точці в кожному з цих циклів, отримавши пару (x, y), тобто точку множини P. Розглянемо траєкторію цієї точки, породжену відображенням γ, яка, згідно з наведеними вище міркуваннями, має довжину НСК(l_x^i, l_y^j). Зауважимо, що множина $\{(x, y) | x \in C_x^i, \ y \in C_y^j\}$ містить $l_x^i l_y^j$ елементів, тому кількість траєкторій довжини НСК(l_x^i, l_y^j) дорівнює $\dfrac{l_x^i l_y^j}{\text{НСК}(l_x^i, l_y^j)} = \text{НСД}(l_x^i, l_y^j)$. Отже, для довільних $i \in [1, m]$, $j \in [1, n]$ число НСК(l_x^i, l_y^j) міститься в цикловому індексі перестановки γ саме НСД(l_x^i, l_y^j) разів.

Навпаки, кожен цикл C відображення γ породжений деяким елементом $(x, y) \in P$. Нехай l_x — період точки x при дії відображення σ, а l_y — період точки y при дії відображення τ. З наведених вище міркувань маємо, що множина перших координат траєкторії точки (x, y) є орбітою точки x під дією відображення σ, а множина других координат цієї траєкторії є орбітою точки y при дії відображення τ, тому пара чисел (l_x, l_y) залежить лише від циклу C і не залежить від точки (x, y). Отже, цикловий індекс перестановки γ міститься в об'єднанні НСК довжин циклів σ та τ, де кожне число НСК(l_x^i, l_y^j) береться НСД(l_x^i, l_y^j) разів, і теорему доведено. □

Основний результат цієї статті містить така теорема.

Теорема 3. *Класи еквівалентності горенштейнових матриць утворюють комутативну напівгрупу відносно Кронекерового добутку як напівгрупової операції.*

Лема 1. *Нехай $A = (a_{i,j})$ — горенштейнова матриця розмірності m з перестановкою Кириченка σ, $B = (b_{i,j})$ — горенштейнова матриця розмірності n з перестановкою Кириченка τ, $C = A \odot B = (c_{i,j})$, $D = B \odot A = (d_{i,j})$. Тоді матриці C та D еквівалентні, можуть бути отримані одна з іншої перетвореннями другого типу, заданими перестановкою, яка визначає спряженість перестановок $\sigma \times \tau$ та $\tau \times \sigma$.*

Доведення. Подібно до того, як ми отримали (1), можна виписати формули для елементів матриць D та C:

$$\begin{cases} c_{n(i-1)+p,n(j-1)+q} = a_{i,j} + b_{p,q}\ , \\ d_{m(p-1)+i,m(q-1)+j} = a_{i,j} + b_{p,q}. \end{cases}$$

Розглянемо перестановку $\pi : X_{mn} \to X_{mn}$, визначену за допомогою рівності

$$\pi(n(k-1) + s) = m(s-1) + k \quad \text{для всіх } k \in [1,\, m] \text{ та } s \in [1,\, n].$$

Зауважимо, що перестановка π задана коректно, оскільки кожне число t дає певну остачу та частку при діленні на n, однозначно визначаючи числа k та s. Отже, π визначена на всій множині X_{mn}. З тих самих міркувань для m отримуємо, що кожне число з X_{mn} має прообраз при відображенні π, тобто $\pi^{-1}(k + m(s-1)) = s + n(k-1)$.

Подіємо одночасно на рядки та стовпчики матриці C перестановкою π, що дасть нам перетворення еквівалентності, яке є перетворенням другого типу. Отже, для довільних $i, j \in [1, m]$ та $p, q \in [1, n]$, для того елемента матриці C, який дорівнює $a_{i,j} + b_{p,q}$, отримуємо $c_{\pi(n(i-1)+p),\pi(n(j-1)+q)} = c_{m(p-1)+i,m(q-1)+j}$. Зауважимо, що елемент матриці D з цими ж індексами дорівнює $a_{i,j} + b_{p,q}$, тому матриці C і D еквівалентні та можуть бути отримані одна з іншої лише перетвореннями другого типу.

Відповідно до (2), для довільних $a \in [1,\, m]$ та $b \in [1,\, n]$, перестановка γ діє за формулою $\gamma(b + n(a-1)) = n(\sigma(a) - 1) + \tau(b)$. Подібно можна отримати, що для тих самих a та b перестановка Кириченка матриці D діє за формулою $\widetilde{\gamma}(a + m(b-1)) = m(\tau(b) - 1) + \sigma(a)$.

Для довільних $a \in [1,\, m]$ та $b \in [1,\, n]$ розглянемо $(\pi \circ \gamma \circ \pi^{-1})(m(b-1)+a))$, отримуючи $(\pi \circ \gamma \circ \pi^{-1})(m(b-1)+a)) = (\pi \circ \gamma)(n(a-1)+b)) = \pi(n(\sigma(a)-1)+\tau(b))) = m(\tau(b)-1)+\sigma(a) = \widetilde{\gamma}(a + m(b-1))$. Отже, діаграма

$$\begin{array}{ccc} b + n(a-1) & \xrightarrow{\gamma} & n(\sigma(a)-1) + \tau(b) \\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi} \\ m(b-1) + a & \xrightarrow{\widetilde{\gamma}} & m(\tau(b)-1) + \sigma(a) \end{array}$$

є комутативною, а це й потрібно довести. □

Лема 2. *Нехай $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$ — еквівалентні горенштейнові матриці розмірності m, $C = (c_{i,j})$ — горенштейнова матриця розмірності n. Тоді матриці $A \odot C$ та $B \odot C$ еквівалентні.*

Доведення. Нехай матриця A може бути отримана з матриці B лише перетвореннями другого типу, а τ — та перестановка з m елементів, яка визначає еквівалентність A та B, тобто $a_{i,j} = b_{\tau(i),\tau(j)}$. Позначимо через $G = (g_{i,j}) = A \odot C$ та $H = (h_{i,j}) = B \odot C$. Тоді, згідно з (1), формули для елементів матриць G та H матимуть вигляд

$$\begin{cases} a_{i,j} + c_{p,q} = g_{n(i-1)+p,n(j-1)+q}\ ; \\ b_{i,j} + c_{p,q} = h_{m(p-1)+i,m(q-1)+j}. \end{cases} \tag{3}$$

для всіх $i, j \in [1, m]$ та всіх $p, q \in [1, n]$.

Оскільки матриці A та B еквівалентні, то остання рівність може бути замінена на рівність $a_{\tau^{-1}(i),\tau^{-1}(j)} + c_{p,q} = h_{m(p-1)+i,m(q-1)+j}$, звідки

$$a_{i,j} + c_{p,q} = h_{m(p-1)+\tau(i),m(q-1)+\tau(j)}. \tag{4}$$

Визначимо перестановку π на mn елементах формулою $\pi(n(i-1)+p) = m(p-1)+\tau(i)$ для всіх $i \in [1,\, m]$ та $p \in [1,\, n]$. З рівності (4) та першого рядка рівності (3) випливає, що визначена так перестановка π дає еквівалентність матиць $A \odot C$ та $B \odot C$.

Нехай матриця A може бути отримана з B лише перетворенням першого типу, тобто матриця A може бути отримана з B додаванням цілого числа до усіх елементів деякого рядка з одночасним відніманням цього числа від всіх елементів стовпця з тим же номером. Позначимо це число через t. З означення операції $\odot$ над матрицями випливає що $A \odot C$ може бути отримана з $B \odot C$ додаванням цілого числа до всіх елементів всіх рядків з номерами з інтервалу $[(t-1)n+1, tn]$ з одночасним відніманням цього числа від стовпців з цими самими номерами. □

Зауваження 1. Подібно доводиться, що з еквівалентності горенштейнових матриць A та B випливає, що $C \odot A$ і $C \odot B$ еквівалентні для довільної горенштейнової матриці C.

Лема 3. *Нехай $A = (a_{i,j})$ — горенштейнова матриця розмірності m, $B = (b_{p,q})$ — горенштейнова матриця розмірності n, $C = (c_{r,s})$ — горенштейнова матриця розмірності k. Тоді матриці $A \odot (B \odot C)$ та $(A \odot B) \odot C$ еквівалентні.*

Доведення. Розглянемо матрицю $D = (d_{f,g}) = A \odot (B \odot C)$ і знайдемо такі індекси f та g, щоб справджувалась рівність $d_{f,g} = a_{i,j} + b_{p,q} + c_{r,s}$. Оскільки матриця $B \odot C$ має розмірність nk, то $d_{f,g}$ належить до блоку з координатами (i, j). Кожен з блоків матриці D розмірності mn можна розглядати як такий, що складений з блоків розмірності k. Тому $f = nk(i-1) + k(p-1) + r$, $g = nk(j-1) + k(q-1) + s$.

Згідно з лемою 1 матриця $(A \odot B) \odot C$ еквівалентна матриці $C \odot (A \odot B)$. З транзитивності випливає, що для доведення леми достатньо довести еквівалентність матриць $A \odot (B \odot C)$ та $H = (h_{f,g}) = C \odot (A \odot B)$. Так, як це було зроблено вище для матриці D, можна довести, що індекси того елемента $h_{f,g}$ матриці H, який дорівнює $c_{r,s} + a_{i,j} + b_{p,q}$, знаходяться за формулами $f = mn(r-1) + n(i-1) + p$ та $g = mn(s-1) + n(j-1) + q$.

Визначимо перестановку π на mnk елементах за правилом $\pi(nk(i-1)+k(p-1)+r) = mn(r-1) + n(i-1) + p$ для всіх $i \in [1,\, m]$, $r \in [1,\, k]$, $p \in [1,\, n]$. Тоді $d_{f,g} = h_{\pi(f),\pi(g)}$, і матриці D та H еквівалентні. Лему доведено. □

Теорема 3 є наслідком з лем 1–3.

Може скластись враження, що кронекерові добутки горенштейнових матриць можуть бути використані як простий інструмент для опису горенштейнових матриць у тому сенсі, що для опису всіх горенштейнових матриць достатньо описати лише ті, які відповідають незвідним перестановкам в сенсі кронекерового добутку. На жаль, це не так. Розглянемо циклічні горенштейнові матриці порядків 3, 4 та 12. З теореми 2 випливає, що $\delta_3 \times \delta_4 = \delta_{12}$, де δ_k — циклічна перестановка k елементів. Якщо розглядати класи еквівалентних матриць з нульовим першим рядком, то згідно з [5] відповідні циклічні матриці Кириченка розмірностей 3 та 4 мають вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x \\ x & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & y & z \\ z & 0 & 0 & z \\ y & 0 & y-z & 0 \end{pmatrix}.$$

Для того, щоб ці матриці були горенштейновими, необхідно і достатньо, щоб всі елементи матриць були невід'ємними ([3]), тобто, щоб крім невід'ємності параметрів виконувалась рівність $y = z + t$ для деякого невід'ємного t. Але множина циклічних горенштейнових матриць розмірності 12 визначається невід'ємними розв'язками системи нерівностей $b + c \geq a$, $c + d \geq a$, $d + f \geq a$, $f + g \geq a$, $a \geq b$, $a \geq c$, $a \geq d$, $a \geq f$, $a \geq g$, $c + d + f \geq a + b$, $d + f + g \geq a + b$, $2f + g \geq a + b$, $d + 2f + g \geq a + b + c$, $a + b \geq c + d$, $a + b \geq d + f$, $a + b \geq f + g$, які не виражаються через 3 параметри. Це свідчить про те, що циклічних горенштейнових матриць порядку 12 значно більше, ніж горенштейнових матриць, які є кронекеровими добутками матриць розмірностей 3 та 4.

Автор статті висловлює щиру подяку своєму вчителю професору В. В. Кириченку за постановку задачі, який у розмові з автором запропонував конструкцію квазікронекерового добутку матриць.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кириченко В.В. *Квазифробениусовы кольца и горенштейновы порядки*// Труды мат. института им. Стеклова. – 1978. – Т.148. – С.168–178.
2. Chernousova Zh.T., Dokuchaev M.A., Khibina M.A., Kirichenko V.V., Miroshnichenko S.G., Zhuravlev N.V. *Tiled orders over diskrete valuation rings, finite Markov chains and partially orded sets*// São Paulo, Brasil, 2004 (preprint).
3. Журавльов В.М., Черноусова Ж.Т. *Циклічні горенштейнові порядки з малим числом вершин*// Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. – 2002. – №2. – С.33–40.
4. Dokuchaev M.A., Kirichenko V.V., Zelensky A.V., Zhuravlev V.N. *Gorenstein matrices*// Algebra and diskrete mathematics. – 2005. – №1. – P.8–29.
5. Plakhotnyk M. *On the dimension of the space of Gorenstein matrices for some types of correspond permutations*// 5th Iinternational Algebraic Conference in Ukraine. – P.157.
6. Weichsel P.M. *The Kronecker product of graphs*// Proc. Amer. Math. Soc. – 1962. – V.13,№1. – P.47–52.
7. McAndrew M.H. *On the product of directed graphs*// Proc. Amer. Math. Soc. – 1963. – V.14,№4. – P.600–606.
8. Сущанський В.І, Сікора В.С. Операції на підстановках. Теорія та застосування. – Чернівці: Рута, 2003. – 256 с.

Надійшло 1.11.2006