УДК 517.53

А. І. Бандура, О. Б. Скасків

ЦІЛІ ФУНКЦІЇ ОБМЕЖЕНОГО І НЕОБМЕЖЕНОГО ІНДЕКСУ ЗА НАПРЯМКОМ

A. I. Bandura, O. B. Skaskiv. *Entire function of bounded and unbounded index in direction*, Matematychni Studii, **27** (2007) 211–215.

An example of an entire function of unbounded index in direction is constructed. Sufficient conditions of boundedness of L-index in direction of the entire function $f(z_1 \cdot z_2)$, where $f(t)$ is an entire function in $t \in \mathbb{C}$, are obtained.

А. И. Бандура, О. Б. Скаскив. *Целые функции ограниченного и неограниченного индекса по направлению* // Математичні Студії. – 2007. – Т.27, №2. – С.211–215.

Построен пример целой функции неограниченного индекса по направлению. Получены достаточные условия ограниченности L-индекса целой функции двух переменных вида $f(z_1 \cdot z_2)$, где $f(t)$ — целая функция переменной $t \in \mathbb{C}$ ограниченного l-индекса.

1. **Приклад цілої функції необмеженого індексу за напрямком.** Вживатимемо такі позначення з [1]: $\mathbf{K}! = k_1!k_2! \cdots k_n!$ для $\mathbf{K} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$. Якщо $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{a} = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, то також використовуватимемо такі скорочені записи: $\mathbf{a}^{\mathbf{b}} = a_1^{b_1} a_2^{b_2} \ldots a_n^{b_n}$, $\|\mathbf{z}\| = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$, $|\mathbf{z}| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \ldots + |z_n|^2}$.

Для $\eta > 0$, $z \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ і додатної неперервної функції $L : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ визначимо $\lambda_1^{\mathbf{b}}(z, \eta) = \inf\left\{\inf\left\{\frac{L(z+t\mathbf{b})}{L(z+t_0\mathbf{b})} : |t - t_0| \le \frac{\eta}{L(z+t_0\mathbf{b})}\right\} : t_0 \in \mathbb{C}\right\}$, $\lambda_1^{\mathbf{b}}(\eta) = \inf\{\lambda_1^{\mathbf{b}}(z, \eta) : z \in \mathbb{C}^n\}$, а також $\lambda_2^{\mathbf{b}}(\eta) = \sup\{\lambda_2^{\mathbf{b}}(z, \eta) : z \in \mathbb{C}^n\}$, де $\lambda_2^{\mathbf{b}}(z, \eta) = \sup\left\{\sup\left\{\frac{L(z+t\mathbf{b})}{L(z+t_0\mathbf{b})} : |t - t_0| \le \frac{\eta}{L(z+t_0\mathbf{b})}\right\} : t_0 \in \mathbb{C}\right\}$.

Клас функцій L, які для всіх $\eta \ge 0$ задовольняють умову $0 < \lambda_1^{\mathbf{b}}(\eta) \le \lambda_2^{\mathbf{b}}(\eta) < +\infty$ позначатимемо через $Q_{\mathbf{b}}^n$.

Цілу функцію $F(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, називаємо цілою функцією *обмеженого L-індексу за напрямком* $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$, якщо існує $m_0 \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $m \in \mathbb{Z}_+$ та кожного $z \in \mathbb{C}^n$ виконується нерівність:

$$\frac{1}{m!L^m(z)} \left|\frac{\partial^m F(z)}{\partial \mathbf{b}^m}\right| \le \max\left\{\frac{1}{k!L^k(z)} \left|\frac{\partial^k F(z)}{\partial \mathbf{b}^k}\right| : 0 \le k \le m_0\right\}, \tag{1}$$

де $\dfrac{\partial^0 F(z)}{\partial \mathbf{b}^0} = F(z)$, $\dfrac{\partial F(z)}{\partial \mathbf{b}} = \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial F(z)}{\partial z_j} b_j = \langle \mathbf{grad}\ F, \overline{\mathbf{b}}\rangle$, $\dfrac{\partial^k F(z)}{\partial \mathbf{b}^k} = \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{b}}(\dfrac{\partial^{k-1} F(z)}{\partial \mathbf{b}^{k-1}})$, $k \ge 2$.

Найменше серед таких чисел $m_0 = m_0(\mathbf{b})$ число $N_{\mathbf{b}}(F, L) = m_0$ назвемо *L-індексом за напрямком* $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ *цілої функції* $F(z)$.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 32A15.

У випадку $n=1$ і $L(z)=l(z)$, $z\in\mathbb{C}$, отримуємо означення цілої функції обмеженого l-індексу, а у випадку $L(z)\equiv 1$ отримуємо означення цілої функції обмеженого індексу.

Для додатної неперервної функціїі $l(z)$, $z\in\mathbb{C}$ та $z_0\in\mathbb{C}$, $\eta>0$ позначимо $\lambda_1(z_0,\eta)\equiv\lambda_1^{\mathbf{b}}(0,z_0,\eta)$ та $\lambda_2(z_0,\eta)\equiv\lambda_2^{\mathbf{b}}(0,z_0,\eta)$у випадку $z=0$, $\mathbf{b}=1$, $n=1$, $L\equiv l$, а також $\lambda_1(\eta)=\inf\{\lambda_1(z_0,\eta): z_0\in\mathbb{C}\}$, $\lambda_2(\eta)=\inf\{\lambda_2(z_0,\eta): z_0\in\mathbb{C}\}$.

Через Q позначаємо клас додатних неперервних функцій $l(z), z\in\mathbb{C}$, які задовольняють умову: $0<\lambda_1(\eta)\le\lambda_2(\eta)<+\infty$ для всіх $\eta\ge 0$.

В [1] доведене таке твердження.

Теорема 1. ([1]) *Ціла функція $F(z)$, $z\in\mathbb{C}^n$ є функцією обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}\in\mathbb{C}^n$ тоді і тільки тоді, коли існує стала $M>0$ така, що для всіх $z^0\in\mathbb{C}^n$ функція $g_{z^0}(t)=F(z^0+t\mathbf{b})$ є обмеженого l_{z^0}-індексу $N(g_{z^0},l_{z^0})\le M<+\infty$, як функція від $t\in\mathbb{C}$ ($l_{z^0}(t)\equiv L(z^0+t\mathbf{b})$), при цьому $N_{\mathbf{b}}(F,L)=\max\{N(g_{z^0},l_{z^0}): z^0\in\mathbb{C}^n\}$.*

У зв'язку з теоремою 1 виникає природне *запитання:* чи існують ціла функція $F(z), z\in\mathbb{C}^n$ і $\mathbf{b}\in\mathbb{C}^n$ такі, що $N(g_{z^0},l_{z^0})<+\infty$ для всіх $z^0\in\mathbb{C}^n$, але $N_{\mathbf{b}}(F,L)=+\infty$? Відповідь на це запитання міститься у наведеному нижче *прикладі:* така функція існує. Для спрощення викладок розглянемо приклад у просторі $\mathbb{C}^2$, коли $L(z)\equiv 1$, $\mathbf{b}=(1,1)$.

Розглянемо цілу функцію
$$F(z_1,z_2)=\cos\sqrt{z_1z_2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(z_1z_2)^n}{(2n)!}.$$
Доведемо, що при $z_1=z_1^0+t, z_2=z_2^0+t$, де $z_1^0,z_2^0\in\mathbb{C}$ — фіксовані, $t\in\mathbb{C}$, функція F — обмеженого індексу, як функція від t.

Нехай $F(z_1^0+t,z_2^0+t)=\cos\sqrt{(z_1^0+t)(z_2^0+t)}=\cos\sqrt{t^2+at+b}$, де $a=z_1^0+z_2^0, b=z_1^0z_2^0$.

Позначимо $F(z_1^0+t,z_2^0+t)\equiv f(t)$. Обчислимо похідні цієї функції:
$$f'(t)=\frac{(2t+a)\sin\sqrt{t^2+at+b}}{2\sqrt{t^2+at+b}},$$
$$f''(t)=\frac{\sin\sqrt{t^2+at+b}}{\sqrt{t^2+at+b}}-\frac{(2t+a)^2}{4(t^2+at+b)}\cos\sqrt{t^2+at+b}-\frac{(2t+a)^2\cos\sqrt{t^2+at+b}}{4(t^2+at+b)^{3/2}}.$$
Звідси одержуємо диференційне рівняння для F:
$$f''(t)+\frac{a^2-4b}{2(2t+a)(t^2+at+b)}f'(t)+\frac{2t+a}{4(t^2+at+b)}f(t)=0. \tag{2}$$

У статті Шаха і Фріке [2] доведене таке твердження: *Нехай $g_0,g_1,\dots,g_p$ і h — цілі функції обмеженого індексу і для кожного $R\in(0,+\infty)$ існує стала $M=M(R)\in(0,+\infty)$ така, що для всіх $z\in\mathbb{C}\setminus\bigcup_k\{z:|z-b_k|\le R\}$, де b_k - нулі функції g_0, виконуються нерівності*
$$|g_j(z)|\le M|g_0(z)|, j\in\{1,2,\dots,p\}. \tag{3}$$
Тоді ціла функція f, яка задовольняє рівняння
$$g_0(z)f^{(p)}(z)+g_1(z)f^{(p-1)}(z)+\ldots+g_p(z)f(z)=h(z), \tag{4}$$
є функцією обмеженого індексу.

Перепишемо (2) у такому вигляді
$$(2t+a)(t^2+at+b)f''(t)+\frac{a^2-4b}{2}f'(t)+\frac{(2t+a)^2}{4}f(t)=0.$$

Оскільки, $g_1(z)$ - стала, то для неї виконано (3). Щодо $g_2(z) = \dfrac{2t+a}{4}$, то $\dfrac{g_2(z)}{g_0(z)} = \dfrac{(2t+a)}{4(t^2+at+b)} \to 0$ при $t \to +\infty$. Тому $\left|\dfrac{g_2(z)}{g_0(z)}\right| \le M(R)$ для $z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{k=1}^{3} \{z : |z - b_k| \le R\}$, де b_k - нулі функції $g_0(z) = (2t+a)(t^2+at+b)$.

Отже, за теоремою Шаха і Фріке [2] $f(t)$ - функція обмеженого індексу.

Залишилося довести, що $F(z_1, z_2)$ є функцією необмеженого індексу за напрямком $\mathbf{b} = (1, 1)$. Для цього використаємо теорему 10 ([1],с.42), яка містить необхідні і достатні умови обмеженості L-індексу за напрямком. Друга з необхідних і достатніх умов цієї теореми: *Для будь-якого $r > 0$ існує $\widetilde{n}(r) \in \mathbb{Z}_+$, що для всіх $z^0 \in \mathbb{C}^n$ таких, що функція $F(z^0 + t\mathbf{b})$ відмінна від тотожного нуля, та для всіх $t_0 \in \mathbb{C}$*

$$n\big(r/L(z^0 + t^0\mathbf{b}), z^0, t_0, \frac{1}{F}\big) \le \widetilde{n}(r), \tag{5}$$

де $n\big(r, z^0, t_0, 1/F\big) = \sum_{|a_k^0 - t_0| \le r/\sqrt{n}} 1$ – *нормована лічильна функція послідовності нулів a_k^0 функції $F(z^0 + t\mathbf{b})$ як функції від $t \in \mathbb{C}$, тобто $F(z^0 + a_k^0\mathbf{b}) = 0$.*

Доведемо, що ця умова теореми 10 не виконується. Позначимо $a_k = \pi/4 + \pi k$, $k \in \mathbb{N}$, $z^0 = (z_1^0, z_2^0)$, $z_2^0 = 1 + z_1^0 - a_k^2$, $t_0 = a_k^2 - z_1^0$. Нулі функції $F(z^0 + t\mathbf{b})$ знаходимо з рівняння

$$(z_1^0 + t)(z_2^0 + t) = t^2 + (z_1^0 + z_2^0)t + z_1^0 z_2^0 = (\pi/2 + \pi l)^2, l \in \mathbb{Z}.$$

Розглянемо корені $a_l^0 = \dfrac{-(z_1^0 + z_2^0) + \sqrt{(z_1^0 - z_2^0)^2 + (\pi + 2\pi l)^2}}{2}$. Умова потрапляння нулів a_l^0 в $r = r_1/\sqrt{2}$–окіл точки t_0 має вигляд $r > \left|a_k^2 - z_1^0 - \frac{-(1+2z_1^0-a_k^2)+\sqrt{(a_k^2-1)^2+(\pi+2\pi l)^2}}{2}\right| \iff 2r > \left|a_k^2 + 1 - \sqrt{(a_k^2-1)^2 + (\pi+2\pi l)^2}\right| \iff a_k^2 + 1 - 2r < \sqrt{(a_k^2-1)^2 + (\pi+2\pi l)^2} < a_k^2 + 1 + 2r$.

Звідси, $a_k^4 + 1 + 4r^2 + 2a_k^2 - 4r - 4ra_k^2 < a_k^4 - 2a_k^2 + 1 + (\pi + 2\pi l)^2 < a_k^4 + 1 + 4r^2 + 2a_k^2 + 4r + 4r(\pi/4 + \pi k)^2 \iff 4r^2 + 4a_k^2 - 4r - 4ra_k^2 < (\pi + 2\pi l)^2 < 4r^2 + 4a_k^2 + 4r + 4ra_k^2$.
Тобто, $l \in \big(\dfrac{2\sqrt{r^2 + a_k^2 - r - ra_k^2} - \pi}{2\pi}; \dfrac{2\sqrt{r^2 + a_k^2 + r + ra_k^2} - \pi}{2\pi}\big) \equiv (A_k; B_k)$ для $r \in (0; 1)$.
Але $B_k - A_k = \dfrac{2r + 2ra_k^2}{\pi(\sqrt{r^2 + r + a_k^2 + ra_k^2} + \sqrt{r^2 + a_k^2 - ra_k^2 - r})} \longrightarrow +\infty, \text{при } k \longrightarrow +\infty.$

Тому, для $r < \sqrt{2}$ маємо $n\big(r, z^0, t_0, 1/F\big) \to +\infty$ $(k \to +\infty)$, де z^0, t_0 – визначені вище. На основі сказаного вище, функція $\cos\sqrt{z_1 z_2}$ — необмеженого індексу за напрямком $(1, 1)$.

2. Обмеженість L-індексу цілої функції $f(z_1 \cdot z_2)$. У зв'язку з побудованим прикладом виникає запитання, у якому випадку ціла функція $F(z_1, z_2) = f(z_1 \cdot z_2)$ є функцією обмеженого L-індексу, якщо $f(t)$, $t \in \mathbb{C}$, — ціла функція обмеженого l-індексу ? Спершу доведемо допоміжне твердження.

Лема 1. *Якщо $l(t) \in Q$, $t \in \mathbb{C}$, то $(|z| + |t| + 1)l(tz) \in Q^2_{\mathbf{b}}$ $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{C}^2$, де $t, z \in \mathbb{C}$, та $(|z| + 1)l(tz) \in Q^2_{\mathbf{b}}$ при $b = (1, 0)$, $(|t| + 1)l(tz) \in Q^2_{\mathbf{b}}$ при $b = (0, 1)$.*

Доведення. Доведемо це твердження для напрямку $\mathbf{b}_1 = (1, 0)$, тобто по змінній t. Для напрямку $\mathbf{b}_2 = (0, 1)$ доводиться подібно, а щодо решти напрямків, то відповідне твердження одержуємо застосовуючи до напрямків $\mathbf{b}_1$ та $\mathbf{b}_2$ лему 1 та теорему 3 з [1].

Потрібно довести, що $\forall\eta > 0$

$$\inf_{(t,z)\in\mathbb{C}^2}\inf_{t^0\in\mathbb{C}}\inf_{t'}\left\{\frac{l((t+t')z)}{l((t+t^0)z)} : |t'-t^0| \le \frac{\eta}{(|z|+1)l((t+t^0)z)}\right\} > 0 \tag{6}$$

Зрозуміло, що

$$\inf_{t'}\left\{\frac{l((t+t')z)}{l((t+t^0)z)} : |t'-t^0| \le \frac{\eta}{(|z|+1)l((t+t^0)z)}\right\} =$$
$$= \inf_{t'}\left\{\frac{l((t+t')z)}{l((t+t^0)z)} : |(t+t')z-(t+t^0)z| \le \frac{|z|\eta}{(|z|+1)l((t+t^0)z)}\right\} \ge$$
$$\ge \inf_{t'}\left\{\frac{l((t+t')z)}{l((t+t^0)z)} : |(t+t')z-(t+t^0)z| \le \frac{\eta}{l((t+t^0)z)}\right\}$$

Припустимо, що вираз у (6) дорівнює нулю. Це означає, що $\exists(t_n)$, (z_n), (t_n^0), що

$$\inf_{t'}\left\{\frac{l((t_n+t')z_n)}{l((t_n+t_n^0)z_n)} : |(t_n+t')z_n-(t_n+t_n^0)z_n| \le \frac{\eta}{l((t_n+t_n^0)z_n)}\right\} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Позначивши $u_n(t') = (t_n+t')z_n$, та $v_n(t^0) = (t_n+t_n^0$, отримуємо

$$\inf_{t'}\left\{\frac{l(u_n(t'))}{l(v_n(t^0))} : |u_n(t')-v_n(t_0)| \le \frac{\eta}{l(v_n(t^0))}\right\} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Але

$$\inf_{t'}\left\{\frac{l(u_n(t'))}{l(v_n(t^0))} : |u_n(t')-v_n(t_0)| \le \frac{\eta}{l(v_n(t^0))}\right\} \ge$$
$$\ge \inf_{u}\left\{\frac{l(u)}{l(v_n(t^0))} : |u-v_n(t_0)| \le \frac{\eta}{l(v_n(t^0))}\right\}$$

А, отже,

$$\inf_{v\in\mathbb{C}}\inf_{u}\left\{\frac{l(u)}{l(v)} : |u-v| \le \frac{\eta}{l(v)}\right\} = 0,$$

що суперечить тому, що за умовою теореми $l \in Q$. Отже, нерівність (6) правильна. Подібно доводиться відповідна нерівність для $\sup$. Звідси, одержуємо висновок, що $(|z|+1)l(tz) \in Q^n_{\mathbf{b}}$ для $\mathbf{b} = (1,0)$. $\square$

Сформулюємо основний результат цього пункту.

Теорема 2. *Якщо $f(t)$ — ціла функція обмеженого l-індексу і $N(f,l) = \widetilde{N}$, $t \in \mathbb{C}$, $l \in Q$, то $F(t,z) \equiv f(tz)$ — ціла функція обмеженого $L_1(t,z) \equiv (|z|+1)l(tz)$-індексу за напрямком $\mathbf{b}_1 = (1,0)$ і $N_{\mathbf{b}}(F,L_1) = \widetilde{N}$, обмеженого $L_2(t,z) = (|t|+1)l(tz)$-індексу за напрямком $\mathbf{b}_2 = (0,1)$ і $N_{\mathbf{b}_2}(F,L_2) = \widetilde{N}$ та обмеженого $(|t|+|z|+1)l(tz)$-індексу за довільним $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^2$.*

Доведення. Враховуючи твердження теорем 3 та 11 з [1], нам достатньо довести обмеженість за напрямком $(1,0)$. Згідно означення обмеженості l-індексу для функції $f(\tau)$ справджується нерівність: $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall\tau \in \mathbb{C}$

$$\frac{|f^{(n)}(\tau)|}{l^n(\tau)n!} \le \max\left\{\frac{|f^{(k)}(\tau)|}{l^{(k)}(\tau)k!} : 0 \le k \le \widetilde{N}\right\}.$$

Зокрема, якщо ми позначимо $g_z(t) = f(tz)$ і врахуємо, що $g_z^{(n)}(t) = \frac{\partial^n f(tz)}{\partial t^n} = z^n f^{(n)}(tz)$, то отримаємо такий ланцюжок нерівностей

$$\begin{gathered}
\left|\frac{\partial^n f(tz)}{\partial t^n}\right| \frac{1}{L_1^n(t,z)n!} = \frac{|z^n|}{(|z|+1)^n} \frac{|f^{(n)}(tz)|}{n! l^n(tz)} \leq \\
\leq \frac{|z|^n}{(|z|+1)^n} \max\left\{\frac{|z|^k |f^{(k)}(tz)|}{k! |z|^k l^k(tz)} : 0 \leq k \leq \widetilde{N}\right\} = \\
= \frac{|z|^n}{(|z|+1)^n} \max\left\{\left|\frac{\partial^k f(tz)}{\partial t^k}\right| \frac{1}{k! L_1^k(tz)} \frac{(|z|+1)^k}{|z|^k} : 0 \leq k \leq \widetilde{N}\right\} \leq \\
\leq \frac{|z|^n}{(|z|+1)^n} \max\left\{\left|\frac{\partial^k f(tz)}{\partial t^k}\right| \frac{1}{k! L_1^k(tz)} : 0 \leq k \leq \widetilde{N}\right\} \times \\
\times \max\left\{\frac{(|z|+1)^k}{|z|^k} : 0 \leq k \leq \widetilde{N}\right\} \leq \left(\frac{|z|}{|z|+1}\right)^{n-\widetilde{N}} \times \\
\times \max\left\{\left|\frac{\partial^k f(tz)}{\partial t^k}\right| \frac{1}{k! L_1^k(tz)} : 0 \leq k \leq \widetilde{N}\right\} < \\
< \max\left\{\left|\frac{\partial^k f(tz)}{\partial t^k}\right| \frac{1}{k! L_1^k(tz)} : 0 \leq k \leq \widetilde{N}\right\} \text{ при } n > \widetilde{N}.
\end{gathered}$$

Отже, при $n > \widetilde{N}$ справджується нерівність

$$\left|\frac{\partial^n f(tz)}{\partial t^n}\right| \frac{1}{L_1^n(t,z)n!} \leq \max\left\{\left|\frac{\partial^k f(tz)}{\partial t^k}\right| \frac{1}{k! L_1^k(tz)} : 0 \leq k \leq \widetilde{N}\right\}.$$

Зрозуміло, що ця нерівність виконуватиметься й для $n \leq \widetilde{N}$. Звідси випливає, що $f(tz)$ — обмеженого L_1-індексу за напрямком $(1,0)$. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Бандура А.І., Скасків О.Б.*Цілі функції обмеженого L - індексу за напрямком*// Математичні Студії. – 2007. – Т.27,№1. – С.30–52.
2. Fricke G. H., Shah S. M. *On bounded value distribution and bounded index*// J. of Nonlinear Anal.: Theory, Meth. and Appl. – 1978. – V.2, №4. – P.423–435.

Львівський національний університет імені Івана Франка
механіко-математичний факультет
matstud@franko.lviv.ua

Надійшло 30.09.2006