УДК 512.552.12

Б. В. Забавський, О. М. Романів

НЕКОМУТАТИВНІ n-ЕЛЕМЕНТАРНІ КІЛЬЦЯ

B. V. Zabavskyi, O. M. Romaniv. *Noncommutative n-elementary rings*, Matematychni Studii, **27** (2007) 95–99.

In this paper it is proved that any right Bezout ring of stable range n is an $(n+1)$-elementary ring. It is shown, that over any right Hermite ring any unimodular row of length 3 is complemented to an elementary matrix.

Б. В. Забавский, О. М. Романив. *Некоммутативные n-элементарные кольца* // Математичні Студії. – 2007. – Т.27, №1. – С.95–99.

Доказано, что правое кольцо Безу стабильного ранга n является $(n+1)$-элементарным кольцом. В качестве следствия получено, что над правым кольцом Эрмита каждая унимодулярная строка длины 3 дополняется к матрице, принадлежащей группе элементарных матриц.

Стабільний ранг кільця є одним із найважливіших інваріантів K-теорії. На даний час його роль особливо зросла і для теорій кілець та модулів, особливо теорії діагональної редукції матриць [1]-[3]. Так, наприклад, над регулярними кільцями стабільного рангу 1 (тобто одинично регулярними кільцями) довільна матриця еквівалентна діагональній матриці [4]. У той же час, виявилося, що існують цілі класи регулярних кілець (наприклад, клас сеперативних регулярних кілець), над якими лише квадратні матриці еквівалентні діагональній [1]. Зауважимо, що цей факт властивий також напівланцюговим кільцям [5]. Більше того, існують кільця, над якими лише матриці певних розмірів еквівалентні діагональній [6],[7].

У той же час, завдяки властивостям стабільного рангу виявилося, що у задачах діагональної редукції матриць над кільцями велику роль відіграють елементарні перетворення [3]. У роботах [9],[10] вивчаються кільця, над якими діагональна редукція рядка (1×2) здійснюється лише елементарними матрицями. Кількість елементарних матриць виражає у цих кільцях норму заданого квазіалгоритму [9]. Виникає питання описання кілець, над якими елементарними перетвореннями діагоналізуються рядки довжини n, і у той же час існує рядок довжини $n-1$, який не діагоналізується елементарними перетвореннями. Так, наприклад, над кільцем $\mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2+1)$ існують рядки довжини 2, які не діагоналізуються елементарними перетвореннями [9], і у той же час (як буде показано у даній роботі) така діагоназлізація можлива для всіх рядків довжини 3.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 13F07, 13G05, 16W60.

Все це дозволило авторам виділити в окремий клас такі кільця, які отримали назву (за аналогією з [9]) n-елементарні кільця, тобто кільця, над якими рядок довжини n діагоналізується елементарними перетвореннями і існують рядки довжини $n-1$, для яких діагоналізація елементарними перетвореннями неможлива. Далі в роботі показано тісний зв'язок поняття n-елементарного кільця і поняття стабільного рангу кільця.

Під R розумітимемо асоціативне кільце з $1 \neq 0$. Через $GL_n(R)$ позначимо групу всіх зворотніх матриць порядку n, а через $GE_n(R)$ — групу всіх елементарних матриць порядку n над кільцем R.

Правим (лівим) кільцем Безу ([12]) називається кільце, в якому довільний скінченно породжений правий (лівий) ідеал є головним. *Кільце Безу* — це кільце, яке є правим і лівим кільцем Безу.

Рядок $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ елементів кільця R назвемо *унімодулярним рядком*, якщо

$$a_1R + a_2R + \cdots + a_nR = R.$$

Якщо для будь-якого унімодулярного рядка $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ елементів кільця R існують такі елементи $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1} \in R$, що рядок $(a_1 + a_nb_1, \ldots, a_{n-1} + a_nb_{n-1})$ є унімодулярним рядком, то кільце R називається *кільцем стабільного рангу n*. Поняття кільця стабільного рангу є ліво-право симетричним ([13]).

Потрібно зауважити, що якщо число n є стабільним рангом кільця R, то умови подібні до тих, що визначають стабільний ранг, виконуються для довільного натурального числа, більшого за n. Отже, означення стабільного рангу передбачає, що стабільний ранг кільця R визначається як найменше натуральне число з наведеною вище властивістю.

Кільце R називається *правим n-елементарним кільцем*, якщо для довільного рядка $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ елементів кільця R існує така матриця $P \in GE_n(R)$, що

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot P = (d, 0, \ldots, 0) \tag{1}$$

для деякого $d \in R$.

Кільце R називається *лівим n-елементарним кільцем*, якщо для довільного стовпчика довжини n елементів кільця R існує така матриця $Q \in GE_n(R)$, що

$$Q \cdot (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T = (d, 0, \ldots, 0)^T$$

для деякого $d \in R$, де через A^T тут і надалі позначаємо матрицю транспоновану до матриці A.

Кільце R називається *n-елементарним кільцем*, якщо воно є лівим і правим n-елементарним кільцем.

Якщо для довільного рядка $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ елементів кільця R існує така унімодулярна матриця $S \in GL_n(R)$, що для деякого $d \in R$ виконується (1) з $P = S$, то кільце R називається *правим n-ермітовим кільцем*([3]). Подібно можна означити поняття *лівого n-ермітового кільця* та *n-ермітового кільця.* Праве (ліве) 2-ермітове кільце, зазвичай, називають *правим (лівим) ермітовим.*

Оскільки добуток елементарних матриць є унімодулярною матрицею, довільне праве (ліве) n-елементарне кільце є правим (лівим) n-ермітовим кільцем. Прикладом ермітового кільця, яке не є елементарним, може послужити кільце $\mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)$ ([9]).

Твердження 1. *Стабільний ранг правого (лівого) n-елементарного кільця не перевищує n.*

Доведення. Оскільки праве (ліве) n-елементарне кільце є правим (лівим) n-ермітовим кільцем, а стабільний ранг правого (лівого) n-ермітового кільця не перевищує n ([3]), то й стабільний ранг правого (лівого) n-елементарного кільця не перевищує n. $\square$

Теорема 1. *Якщо R — праве (ліве) кільце Безу стабільного рангу n, то воно є $(n+1)$-елементарним кільцем.*

Доведення. Нехай спочатку $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$ — унімодулярний рядок кільця R, тобто $a_1R + \dots + a_{n+1}R = R$. Оскільки стабільний ранг кільця R дорівнює n, то існують такі елементи $v_1, \dots, v_n \in R$, що $(a_1 + a_{n+1}v_1)R + \dots + (a_n + a_{n+1}v_n)R = R$, або $(a_1 + a_{n+1}v_1)u_1 + \dots + (a_n + a_{n+1}v_n)u_n = 1$ для деяких $u_1, \dots, u_n \in R$. Нехай

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n & 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & u_1(1-a_{n+1}) \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & u_2(1-a_{n+1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & u_n(1-a_{n+1}) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_1, P_2 \in GE_{n+1}(R).$$

Тоді $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1})P_1P_2 = (a_1 + a_{n+1}v_1, \cdots, a_n + a_{n+1}v_n, 1)$, а тому існує така матриця $P_3 \in GE_{n+1}(R)$, що $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1})P_1P_2P_3 = (1, 0, \dots, 0)$. Отже, ми отримали матрицю $P = P_1P_2P_3 \in GE_{n+1}(R)$ таку, що

$$(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \cdot P = (1, 0, \dots, 0).$$

Тепер розглянемо випадок довільного рядка довжини $(n+1)$ елементів $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ кільця R. Оскільки кільце R є правим кільцем Безу, то для цих елементів існує такий елемент $d \in R$, що $a_1R + \dots + a_{n+1}R = dR$. Звідси $a_1u_1 + \dots + a_{n+1}u_{n+1} = d$ та $a_1 = da_1^0$, $\dots, a_{n+1} = da_{n+1}^0$ для деяких елементів $u_1, \dots, u_{n+1}, a_1^0, \dots, a_{n+1}^0 \in R$. З цих співвідношень випливає, що $d(a_1^0u_1 + \dots + a_{n+1}^0u_{n+1} - 1) = 0$. Звідси $a_1^0R + \dots + a_{n+1}^0R + cR = R$ для деякого елемента $c \in R$ такого, що $dc = 0$. Оскільки стабільний ранг R дорівнює n, то $(a_1^0 + cv_1)R + \dots + (a_{n+1}^0 + cv_{n+1})R = R$ для деяких елементів $v_1, \dots, v_{n+1}$ кільця R.

За доведеним вище, для унімодулярного рядка $(a_1^0 + cv_1, \dots, a_{n+1}^0 + cv_{n+1})$ існує така матриця $P \in GE_{n+1}(R)$, що $(a_1^0 + cv_1, \dots, a_{n+1}^0 + cv_{n+1}) \cdot P = (1, 0, \dots, 0)$. Домноживши останню рівність зліва на елемент d, отримаємо $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \cdot P = (d, 0, \dots, 0)$, що й потрібно було довести. Отже, кільце R є правим $(n+1)$-елементарним кільцем.

Оскільки поняття стабільного рангу є ліво-право симетричним, то даний результат подібно доводиться для випадку лівого кільця Безу. $\square$

З доведення теореми 1 бачимо, що якщо стабільний ранг кільця R дорівнює n, то для довільного рядка довжини m, де $m \geq n+1$, існує така матриця $P \in GE_m(R)$, що

$$(a_1, a_2, \dots, a_m)P = (d, 0, \dots, 0), \tag{2}$$

тобто, правильне таке твердження.

Наслідок 1. *Нехай R — праве (ліве) кільце Безу скінченного стабільного рангу n. Тоді для довільних елементів $a_1, \dots, a_m$, де $m \geq n+1$, існує така матрця $P \in GE_m(R)$, що (2) виконується для деякого елемента $d \in R$.*

Більше цього, вірним є таке твердження.

Наслідок 2. *Нехай R — кільце Безу стабільного рангу n. Тоді довільний правий (лівий) унімодулярний рядок (стовпчик) довжини $m \geq n+1$ можна доповнити до матриц з групи $GE_m(R)$.*

Оскільки стабільний ранг кільця Ерміта не перевищує 2 ([3]), то отримаємо такі твердження.

Наслідок 3. *Над кільцем Ерміта довільнй правий (лівий) унімодулярний рядок (стовпчик) довжини ≥ 3 доповнюється до матриці, яка належить до групи, породженої елементарними матрицями відповідного порядку.*

Наслідок 4. *Над кільцем Ерміта довільнй унімодулярний рядок (стовпчик) доповнюється до унімодулярної матриці.*

Теорема 2. *Якщо кільце R є лівим n-елементарним кільцем і правим Безу, то R є правим n-елементарним кільцем.*

Доведення. Нехай $Ra_1 + Ra_2 + \cdots + Ra_n = R$ для елементів $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$. Тоді за умовою теореми існує матриця $P \in GE_n(R)$ така, що $P \cdot (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T = (1, 0, \ldots, 0)^T$. Очевидно, що

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)^T = P^{-1}(1, 0, \ldots, 0)^T, \tag{3}$$

де $P^{-1} \in GE_n(R)$. Нехай $P^{-1} = (p_{ij})$. Тоді з матричної рівності (3) випливає, що $a_1 = p_{11},\ a_2 = p_{21},\ \ldots,\ a_n = p_{n1}$. Звідси отримуємо, що довільний унімодулярний стовпчик довжини n над кільцем R доповнюється до деякої матриці з групи $GE_n(R)$.

Встановимо подібне твердження для рядків. Якщо $a_1R + \cdots + a_nR = R$, то $a_1u_1 + \cdots + a_nu_n = 1$ для деяких $u_1, \ldots, u_n \in R$. Оскільки $Ru_1 + \cdots + Ru_n = R$, то, за доведеним вище, існує $(n \times n)$-матриця вигляду

$$Q = \begin{pmatrix} u_1 & \\ \vdots & * \\ u_n & \end{pmatrix} \in GE_n(R).$$

Очевидно, що $(a_1, \ldots, a_n) \cdot Q = (1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$ для деяких елементів $b_2, \ldots, b_n \in R$. Якщо ж

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -b_2 & -b_3 & \cdots & -b_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

то $P \in GE_n(R)$ і $(a_1, \ldots, a_n)QP = (1, 0, \ldots, 0)$. Звідси випливає, що $(a_1, \ldots, a_n)$ є першим рядком матриці $P^{-1}Q^{-1} \in GE_n(R)$.

Оскільки R — праве кільце Безу, то $a_1R + \cdots + a_nR = dR$, $a_1 = da_1^0,\ \ldots,\ a_n = da_n^0$, $d = a_1u_1 + \cdots + a_nu_n$ для деяких елементів $a_1^0, \ldots, a_n^0, u_1, \ldots, u_n \in R$. Тоді $d(a_1^0u_1 + \cdots + a_n^0u_n) = 0$ та $a_1^0R + \cdots + a_n^0R + cR = R$ для деякого елемента $c \in R$ такого, що $dc = 0$. За твердженням 1 стабільний ранг R не перевищує n, а тому $(a_1^0 + cv_1)R + \cdots + (a_n^0 + cv_n)R = R$ для деяких елементів $v_1, \ldots, v_n$ кільця R. За доведеним вище ми можемо знайти матрицю вигляду

$$Q = \begin{pmatrix} a_1^0 + cv_1 & \ldots & a_n^0 + cv_n \\ & * & \end{pmatrix} \in GE_n(R).$$

Очевидно, що $(a_1, \dots, a_n) = (d, 0, \dots, 0) \cdot Q$, звідки $(a_1, \dots, a_n) \cdot Q^{-1} = (d, 0, \dots, 0)$. Отже, R є правим n-елементарним кільцем. □

Твердження 2. *Праве (ліве) n-елементарне кільце є правим (лівим) кільцем Безу.*

Доведення. Нехай R — праве n-елементарне кільце. Тоді для довільних елементів $a, b \in R$ існує така матриця $P \in GE_n(R)$, що $(a, b, 0, \dots, 0) \cdot P = (d, 0, \dots, 0)$ для деякого елемента $d \in R$. Нехай $P = (p_{ij})$. Тоді з останньої рівності випливає, що $ap_{11} + bp_{21} = d$. Звідси отримуємо, що

$$dR \subset aR + bR. \tag{4}$$

Тепер домножимо цю ж рівність зліва на обернену матрицю $P^{-1} \in GE_n(R)$. Отримаємо $(a, b, 0, \dots, 0) = (d, 0, \dots, 0)P^{-1}$. Якщо позначити $P^{-1} = (p^*_{ij})$, то отримаємо, що $a = dp^*_{11}, \quad b = dp^*_{12}$, а тому $aR \subset dR, \quad bR \subset dR$.

З (4), а також з останніх включень отримуємо, що $aR + bR = dR$. Отже, з довільності вибору елементів $a, b \in R$, випливає, що R — праве кільце Безу. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Ara P., Goodearl K., O'Meara K.C., Pardo E. *Diagonalization of matrices over regular rings* // Linear Algebra and Appl. – 1987. – V.265. – P.147-163.
2. Menal P., Moncasi J. *On regular rings with stable range 2* // J. Pure Appl. Algebra. –1982. – V.24. – P.25-40.
3. Zabavsky B.V. *Diagonalizability theorem for matrices over rings with finite stable range* // Alg. and Discr. Math. –2005. –№1. –151-165.
4. Henriksen M. *On a class of regular rings that are elementary divisor rings* // Arch. Math. – 1973. – V.24, №2. – P.133-141.
5. Levy L.S. *Sometimes only square matrices can be diagonalized* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1975. – V.52. – P.18-22.
6. Chen H. *Generalized stable exchange rings* // South Asian Bull. Math. – 2000. – V.24 – P.19-24.
7. Zabavsky B.V. *Diagonalization of matrices* // Математичні студії. –2005. – Т.23, №1. – С.3-10.
8. Zabavsky B.V. *Diagonalization of matrices over ring with finite stable rank* // Вісник Львівського університету. – 2003. – Вип.61. – С.206-210.
9. Bougaut B. *Anneaux Quasi-Euclidiens* // These de docteur troisieme cycle. – 1976. – V.67.
10. Cooke G.A. *A weakening of the euclidean property for integral domains and applications to algebraic number theory. I.* // J. fur die Reine and Angw. Math. –1976. – V.282. – P. 133-156.
11. Zabavsky B., Romaniv O. *Noncommutative rings with elementary reduction of matrices* // Вопросы алгебры (Гомель). – 1999. – Вып.14. – С.79-85.
12. Henriksen M. *Some remarks about elementary divisor rings* // Michigan Math. J. -1955/56. – V.3. – P.159-163.
13. Vaserstein L.N. *The stable rank of rings and dimensionality of topological spaces* // Functional Anal. Appl. – 1971. – V.5. – P.102-110.

Львівський національний університет імені Івана Франка
механіко-математичний факультет

Надійшло 19.11.2006