УДК 517.95

І. Баранська

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

I. Barans'ka. *Inverse problem with free boundary for a parabolic equation*, Matematychni Studii, **27** (2007) 85–94.

We establish conditions for the existence and uniqueness of a solution of inverse problem for a parabolic equation with unknown time dependent leading coefficient in a domain with free boundary in the case of integral conditions.

И. Баранская. *Обратная задача со свободной границей для параболического уравнения* // Математичні Студії. – 2007. – Т.27, №1. – С.85–94.

Установлены условия существования и единственности решения обратной задачи определения неизвестного старшего коэффициента, зависящего от времени, в параболическом уравнении в области со свободной границей и интегральными условиями.

У задачах з вільною межею невідомими є як розв'язок диференціального рівняння, так і межа області. Прикладом задачі з вільною межею є задача Стефана, в якій для знаходження невідомої межі задається додаткова умова у вигляді закону збереження енергії. В обернених задачах також задають додаткові умови для знаходження невідомих параметрів. Поєднавши в одній задачі визначення невідомої межі та невідомого коефіцієнта параболічного рівняння, можна розглядати її як обернену задачу з двома невідомими параметрами. У статті [1] встановлено умови існування та єдиності розв'язку оберненої задачі з вільною межею для рівняння теплопровідності, де одна з умов перевизначення - інтегральна. У статті [2] автор досліджував пряму задачу теплопровідності з інтегральними умовами. У даній статті розглянуто обернену задачу з вільною межею для параболічного рівняння з інтегральними умовами перевизначення. На відміну від задачі Стефана, додаткові умови задаються у вигляді середньоінтегральної температури за товщиною шару та у вигляді температурного моменту. До задачі застосовується методика дослідження обернених задач з [3].

В області $\Omega_T = \{(x,t) : 0 < x < h(t)\,,\, 0 < t < T < \infty\}$ з невідомою межею $x = h(t)$ розглянемо обернену задачу визначення невідомого коефіцієнта $a(t)$ рівняння

$$u_t = a(t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t) \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in [0, h(0)], \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u(0,t) = \mu_1(t), \qquad u(h(t),t) = \mu_2(t), \qquad t \in [0,T] \tag{3}$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 35K15.

та умовами перевизначення

$$\int_0^{h(t)} u(x,t)\,dx = \mu_3(t), \qquad t \in [0,T], \tag{4}$$

$$\int_0^{h(t)} xu(x,t)\,dx = \mu_4(t), \qquad t \in [0,T]. \tag{5}$$

Нехай $Q_T = \{(y,t) : 0 < y < 1\,, 0 < t < T\}$. Задачу (1)-(5) за допомогою заміни $y = \dfrac{x}{h(t)}$, $t = t$ зведемо до оберненої задачі з фіксованою межею відносно невідомих $(a(t),\, h(t),\, v(y,t) = u(yh(t),t))$:

$$v_t = \frac{a(t)}{h^2(t)} v_{yy} + \frac{b(yh(t),t) + yh'(t)}{h(t)} v_y + c(yh(t),t)v + f(yh(t),t), \qquad (y,t) \in Q_T, \tag{6}$$

$$v(y,0) = \varphi(h(0)y), \qquad y \in [0,1], \tag{7}$$

$$v(0,t) = \mu_1(t), \qquad v(1,t) = \mu_2(t), \qquad t \in [0,T], \tag{8}$$

$$h(t) \int_0^1 v(y,t)\,dy = \mu_3(t), \qquad t \in [0,T], \tag{9}$$

$$h^2(t) \int_0^1 yv(y,t)\,dy = \mu_4(t), \qquad t \in [0,T]. \tag{10}$$

Розв'язком задачі (6)-(10) називатимемо трійку функцій $(a(t),\, h(t),\, v(y,t)) \in C[0,T] \times C^1[0,T] \times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$, $h(t) > 0$, $a(t) > 0$, $t \in [0,T]$, які задовольняють умови (6)-(10).

Теорема. *Нехай виконуються умови:*
1) $\mu_i \in C^1[0,T]$, $\mu_i(t) > 0$, $i \in \{1,\ldots,4\}$, $\mu_4'(t) > 0$, $\mu_1(t) - \mu_2(t) \geq 0$, $b(0,t)\mu_1(t) + \mu_3'(t) \leq 0$, $t \in [0,T]$;
2) $\varphi \in C^2[0,h_0]$, $\varphi(x) > 0$, $\varphi'(x) > 0$, $x \in [0,h_0]$, *де* $h_0 = h(0) > 0$ *є розв'язком рівняння* $\int_0^{h(0)} \varphi(x)\,dx = \mu_3(0)$;
3) b, c, $f \in C^{1,0}\big([0,H_1] \times [0,T]\big)$, $f(x,t) \geq 0$, $b(x,t) \geq 0, c(x,t) - b_x(x,t) \geq 0$, $(x,t) \in [0,H_1] \times [0,T]$, *де* $H_1 = \max\limits_{[0,T]} \mu_3(t)\big(\min(\min\limits_{[0,h_0]} \varphi(x),\, \min\limits_{[0,T]} \mu_1(t),\, \min\limits_{[0,T]} \mu_2(t))\big)^{-1}$;
4) $\varphi(0) = \mu_1(0)$, $\varphi(h(0)) = \mu_2(0)$, $h^2(0)\int_0^1 y\,\varphi(h(0)y)\,dy = \mu_4(0)$.
Тоді існує таке число t_0, $0 < t_0 \leq T$, *що при* $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq t \leq t_0$ *існує єдиний розв'язок задачі (6)-(10).*

Доведення. З умов (2), (4) та припущень теореми випливає, що існує єдине $h_0 = h(0) > 0$, яке задовольняє рівняння $\int_0^{h(0)} \varphi(x)\,dx = \mu_3(0)$. За принципом максимуму ([4]) для розв'язку задачі (6)-(8) у випадку довільних функцій $a(t) \in C[0,T]$, $h(t) \in C^1[0,T]$, $a(t) > 0$, $h(t) > 0$ справджується оцінка

$$v(y,t) \geq M_0 > 0, \qquad (y,t) \in \overline{Q}_T, \tag{11}$$

де $M_0 = \min(\min\limits_{[0,h_0]} \varphi(x),\, \min\limits_{[0,T]} \mu_1(t),\, \min\limits_{[0,T]} \mu_2(t))$.

Умову (9) для $t \in [0,T]$ подамо у вигляді

$$h(t) = \mu_3(t) / \int\limits_0^1 v(y,t)\,dy\,, \tag{12}$$

Тоді з (11) та умов теореми випливає оцінка

$$h(t) \le H_1 \equiv \frac{1}{M_0}\max\{\mu_3(\tau):\ \tau \in [0,T]\} < \infty, \qquad t \in [0,T]. \tag{13}$$

Зведемо задачу (6)-(10) до системи рівнянь. Задача (6)-(8) еквівалентна до рівняння

$$v(y,t) = v_0(y,t) + \int\limits_0^t \int\limits_0^1 G_1(y,t,\xi,\tau)\Big[\frac{b(\xi h(\tau),\tau) + \xi h'(\tau)}{h(\tau)} v_\xi(\xi,\tau) + c(\xi h(\tau),\tau) v(\xi,\tau)\Big]\,d\xi\,d\tau, \tag{14}$$

де

$$v_0(y,t) = \int\limits_0^1 G_1(y,t,\xi,0)\varphi(\xi h_0)\,d\xi + \int\limits_0^t G_{1\xi}(y,t,0,\tau)\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}\mu_1(\tau)\,d\tau -$$

$$- \int\limits_0^t G_{1\xi}(y,t,1,\tau)\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}\mu_2(\tau)\,d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_0^1 G_1(y,t,\xi,\tau) f(\xi h(\tau),\tau)\,d\xi\,d\tau, \qquad (y,t) \in \overline{Q}_T. \tag{15}$$

Функція Гріна першої ($k = 1$) та другої ($k = 2$) крайових задач для рівняння

$$v_t = \frac{a(t)}{h^2(t)} v_{yy} + f(y\,h(t),t) \tag{16}$$

має вигляд

$$G_k(y,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\exp\left(-\frac{(y-\xi+2n)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right) + \right.$$

$$\left. +(-1)^k \exp\left(-\frac{(y+\xi+2n)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)\right), \quad k \in \{1,2\}, \quad \theta(t) = \int_0^t \frac{a(\tau)}{h^2(\tau)} d\tau.$$

Диференціюючи (14) та (15) за y для $(y,t) \in \overline{Q}_T$ отримуємо

$$v_y(y,t) = v_{0y}(y,t) + \int\limits_0^t \int\limits_0^1 G_{1y}(y,t,\xi,\tau)\Big[\frac{b(\xi h(\tau),\tau) + \xi h'(\tau)}{h(\tau)} v_\xi(\xi,\tau) + c(\xi h(\tau),\tau) v(\xi,\tau)\Big] d\xi d\tau, \tag{17}$$

$$v_{0y}(y,t) = h_0 \int\limits_0^1 G_2(y,t,\xi,0)\varphi'(h_0\xi)d\xi - \int\limits_0^t G_2(y,t,0,\tau)\mu_1'(\tau)d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t G_2(y,t,1,\tau)\mu_2'(\tau)d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_0^1 G_{1y}(y,t,\xi,\tau) f(\xi h(\tau),\tau) d\xi d\tau. \tag{18}$$

Оцінимо перший доданок з рівності (18)

$$h_0 \int_0^1 G_2(y,t,\xi,0)\varphi'(h_0\xi)\,d\xi \ge h_0 \min_{[0,1]} \varphi'(h_0 y) \equiv M_2 > 0\,,\ (y,t)\in \overline{Q}_T\,. \tag{19}$$

Оскільки решта доданків в (17) та (18) при $t=0$ дорівнюють нулю, то можна зробити висновок про існування деякого числа t_0, $0<t_0\le T$, такого, що при $(y,t)\in \overline{Q}_{t_0} \equiv [0,1]\times[0,t_0]$ справджується нерівність

$$\Big|-\int_0^t G_2(y,t,0,\tau)\mu_1'(\tau)d\tau + \int_0^t G_2(y,t,1,\tau)\mu_2'(\tau)d\tau + \int_0^t\int_0^1 G_{1y}(y,t,\xi,\tau)f(\xi h(\tau),\tau)d\xi\,d\tau +$$

$$+\int_0^t\int_0^1 G_{1y}(y,t,\xi,\tau)\Big[\frac{b(\xi h(\tau),\tau)+\xi h'(\tau)}{h(\tau)}v_\xi(\xi,\tau)+c(\xi h(\tau),\tau)v(\xi,\tau)\Big]d\xi d\tau\Big| \le \frac{M_2}{2}. \tag{20}$$

Тоді з (17) та (18), враховуючи (19) та (20), одержимо

$$v_y(y,t)\ge \frac{1}{2}M_2>0\,,\qquad (y,t)\in\overline{Q}_{t_0}\,. \tag{21}$$

Диференціюючи (9), (10) по t та використовуючи рівняння (6) і крайові умови (8), одержимо для $t\in[0,t_0]$ такі рівності

$$p(t)=\frac{1}{\mu_2(t)}\big[\mu_3'(t)-b(h(t),t)\mu_2(t)+b(0,t)\mu_1(t)-h(t)\int_0^1 f(yh(t),t)\,dy-$$

$$-h(t)\int_0^1\big(c(yh(t),t)-b_\eta(\eta,t)|_{\eta=yh(t)}\big)\,v(y,t)\,dy-\frac{a(t)}{h(t)}\,(w(1,t)-w(0,t))\,\big], \tag{22}$$

$$a(t)=\frac{1}{w(0,t)-\mu_2(t)+\mu_1(t)}\big[\mu_4'(t)-h(t)\,(b(0,t)\mu_1(t)+\mu_3'(t))+$$

$$+h^2(t)\int_0^1(1-y)f(yh(t),t)\,dy+h^2(t)\int_0^1(1-y)\,\big(c(yh(t),t)-b_\eta(\eta,t)|_{\eta=yh(t)}\big)\times$$

$$\times v(y,t)\,dy+h(t)\int_0^1 b(yh(t),t)v(y,t)\,dy\,\big], \tag{23}$$

де позначено $w(y,t)\equiv v_y(y,t)$, $p(t)\equiv h'(t)$. На проміжку $[0,t_0]$ розглядатимемо рівняння (12). З умов теореми та оцінок (11), (13), (21) з (23) випливає, що $a(t)>0$, $t\in[0,t_0]$. Рівняння (14) та (17) для $(y,t)\in\overline{Q}_{t_0}$ подамо у вигляді

$$v(y,t)=v_0(y,t)+\int_0^t\int_0^1 G_1(y,t,\xi,\tau)\Big[\frac{b(\xi h(\tau),\tau)+\xi p(\tau)}{h(\tau)}w(\xi,\tau)+c(\xi h(\tau),\tau)v(\xi,\tau)\Big]\,d\xi\,d\tau, \tag{24}$$

$$w(y,t) = v_{0y}(y,t) + \int_0^t \int_0^1 G_{1y}(y,t,\xi,\tau)\Big[\frac{b(\xi h(\tau),\tau)+\xi p(\tau)}{h(\tau)} w(\xi,\tau) + c(\xi h(\tau),\tau) v(\xi,\tau)\Big]\, d\xi\, d\tau, \tag{25}$$

Отже, задачу (6)-(10) зведено до системи рівнянь (12),(22)-(25). Якщо функції $(a(t),$ $h(t),\ v(y,t)) \in C[0,t_0] \times C^1[0,t_0] \times C^{2,1}(\overline{Q}_{t_0})$, $h(t) > 0$, $a(t) > 0$, $t \in [0,t_0]$ є розв'язком задачі (6)-(10) з $T = t_0$, то функції $(a(t),\ h(t),\ p(t) \equiv h'(t),\ v(y,t),\ w(y,t) \equiv v_y(y,t)) \in (C[0,t_0])^3 \times (C(\overline{Q}_{t_0}))^2$, $h(t) > 0$, $a(t) > 0$, $t \in [0,t_0]$ є розв'язком системи рівнянь (12),(22)-(25). Правильним є і обернене твердження. Нехай $(a(t),\ h(t),\ p(t),\ v(y,t),\ w(y,t)) \in (C[0,t_0])^3 \times (C(\overline{Q}_{t_0}))^2$, $h(t) > 0$, $a(t) > 0$, $t \in [0,t_0]$ є розв'язком системи рівнянь (12),(22)-(25). Доведемо, що функції $(a(t),\ h(t),\ v(y,t))$ є розв'язком задачі (6)-(10).

Оскільки функція $v_0(y,t)$ є розв'язком задачі (16), (7), (8), то $v_0(y,t) \in C^{2,1}(\overline{Q}_{t_0})$. Продиференціювавши (24) по y, отримаємо, що $w(y,t) \equiv v_y(y,t)$. На підставі (24) робимо висновок, що $v(y,t) \in C^{2,1}(\overline{Q}_{t_0})$ є розв'язком рівняння

$$v_t = \frac{a(t)}{h^2(t)} v_{yy} + \frac{b(yh(t),t) + yp(t)}{h(t)} v_y + c(yh(t),t)v + f(yh(t),t), \qquad (y,t) \in Q_{t_0} \tag{26}$$

і задовольняє умови (7), (8). З того, що $v(y,t) \in C^{2,1}(\overline{Q}_{t_0})$ і $\mu_3(t) \in C^1[0,T]$, з (12) випливає, що $h(t) \in C^1[0,T]$. Продиференціюємо (12) по t

$$h'(t) \int_0^1 v(y,t)\, dy + h(t) \int_0^1 v_t(y,t)\, dy = \mu_3'(t).$$

Оскільки $v(y,t)$ є розв'язком рівняння (26), то $h'(t) = \frac{1}{\mu_2(t)}\big[\mu_3'(t) - b(h(t),t)\mu_2(t) +$ $b(0,t)\mu_1(t) - h(t)\int_0^1 f(yh(t),t)\, dy - h(t)\int_0^1 \big(c(yh(t),t) - b_\eta(\eta,t)|_{\eta=yh(t)}\big)\, v(y,t)\, dy -$

$$-\frac{a(t)}{h(t)} v_y(1,t) + \frac{a(t)}{h(t)} v_y(0,t) + \frac{\mu_3(t)}{h(t)}\left(p(t) - h'(t)\right)\big].$$

Віднімемо останню рівність від рівняння (22)

$$p(t) - h'(t) = \frac{\mu_3(t)}{\mu_2(t)h(t)}(p(t) - h'(t)).$$

Враховуючи (21) та те, що

$$\mu_2(t) - \frac{\mu_3(t)}{h(t)} = v(1,t) - \int_0^1 v(y,t)\, dy = \int_0^1 y v_y(y,t)\, dy \geq \frac{1}{2} M_2 \int_0^1 y\, dy = \frac{1}{4} M_2 > 0,$$

отримаємо $p(t) \equiv h'(t)$. Виконання умов (9), (10) випливає з (12) та (22), (23). Отже, задача (6)-(10) еквівалентна до системи рівнянь (12),(22)-(25).

Для доведення існування розв'язку системи рівнянь (12),(22)-(25) застосуємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора [5]. За принципом максимуму для розв'язку задачі (6)-(8) при довільних $(a(t),\ h(t)) \in C[0,T] \times C^1[0,T]$, $a(t) > 0$, $0 < h(t) \leq H_1$ справджується оцінка

$$v(y,t) \leq M_1 < \infty, \qquad (y,t) \in \overline{Q}_T, \tag{27}$$

де стала $M_1 > 0$ визначається відомими величинами.

Тоді з (12) отримаємо
$$h(t) \geq H_0 > 0\,, \qquad t \in [0,T]\,, \tag{28}$$
де $H_0 = \dfrac{1}{M_1} \min\limits_{[0,T]} \mu_3(t)$. З (23) знаходимо
$$a(t) \leq A_1 < \infty\,, \qquad t \in [0,t_0]\,. \tag{29}$$
Позначимо $W(t) = \max\limits_{y\in[0,1]} |w(y,t)|$ і оцінимо $p(t)$ згідно з (22), враховуючи (27)
$$|p(t)| \leq C_1 + C_2 \frac{a(t)}{h(t)} W(t)\,, \qquad t \in [0,t_0]\,. \tag{30}$$
Використовуючи нерівності ([3])
$$G_2(y,t,\xi,\tau) \leq C_3 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\right),\ \int\limits_0^1 |G_{1y}(y,t,\xi,\tau)|\,d\xi \leq C_4 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\right), \tag{31}$$
з рівняння (25) приходимо до інтегральної нерівності
$$W(t) \leq C_5 + C_6 \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} + C_7 \int\limits_0^t \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\right) \frac{1}{h(\tau)} W(\tau)d\tau +$$
$$+ C_8 \int\limits_0^t \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\right) \frac{|p(\tau)|}{h(\tau)} W(\tau)d\tau. \tag{32}$$
Тоді, з урахуванням (30), отримаємо
$$W(t) \leq C_5 + C_9 \int\limits_0^t \left(1 + \frac{1}{h(\tau)} W(\tau) + \frac{a(\tau)}{h^2(\tau)} W^2(\tau)\right) \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}. \tag{33}$$
Перетворимо дану нерівність подібно до наведеного в [3]. Позначимо через $W_1(t) = W(t) + 1$. Тоді нерівність (33) набуває вигляду
$$W_1(t) \leq C_{11} + C_{12} \int\limits_0^t \frac{a(\tau) W_1^2(\tau) d\tau}{h^2(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\,. \tag{34}$$
Піднесемо обидві частини нерівності (34) до квадрату та застосуємо при цьому нерівності Коші, Коші-Буняковського та рівність
$$\int\limits_\sigma^t \frac{a(\tau)d\tau}{h^2(\tau)\sqrt{(\theta(t)-\theta(\tau))(\theta(\tau)-\theta(\sigma))}} = \pi\,.$$
З урахуванням (28), (29) отримаємо
$$\int\limits_0^t \frac{a(\tau) W_1^2(\tau) d\tau}{h^2(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \leq C_{13} + C_{14} \int\limits_0^t W_1^4(\sigma) d\sigma.$$

Тоді нерівність (34) набуває вигляду

$$W_1(t) \le C_{15} + C_{16} \int\limits_0^t W_1^4(\sigma)d\sigma. \tag{35}$$

Позначивши $r(t) = C_{15} + C_{16} \int\limits_0^t W_1^4(\sigma)d\sigma$, з (35) отримаємо $r'(t) \le C_{16} r^4(t)$. Відокремлюючи змінні та інтегруючи це співвідношення, отримуємо оцінку

$$r(t) \le \frac{C_{15}}{\sqrt[3]{1 - 3C_{15}^3 C_{16} t}}. \tag{36}$$

Якщо на t_1, $0 < t_1 \le T$ накласти умову

$$1 - 3C_{15}^3 C_{16} t_1 > 0, \tag{37}$$

то з (35) і (36) отримаємо оцінки

$$r(t) \le C_{17}, \quad |w(y,t)| \le W(t) \le M_3 < \infty, \qquad (y,t) \in \overline{Q}_{t_1}. \tag{38}$$

З (23) і (30), використовуючи (38), приходимо до оцінок

$$|p(t)| \le M_4 < \infty, \qquad t \in [0, t_1], \tag{39}$$

$$a(t) \ge A_0 > 0, \qquad t \in [0, t_1]. \tag{40}$$

Отже, встановлено оцінки розв'язків системи рівнянь (12),(22)-(25).

Визначимо число t_0, $0 < t_0 \le T$ при якому виконується нерівність (20). Врахувавши оцінки (11), (13), (27), (28), (29), (38)-(40), одержимо

$$\Big| - \int\limits_0^t G_2(y,t,0,\tau)\mu_1'(\tau)\,d\tau + \int\limits_0^t G_2(y,t,1,\tau)\mu_2'(\tau)\,d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_0^1 G_{1y}(y,t,\xi,\tau) f(\xi h(\tau),\tau)\,d\xi\,d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^1 G_{1y}(y,t,\xi,\tau) \Big[\frac{b(\xi h(\tau),\tau) + \xi h'(\tau)}{h(\tau)} v_\xi(\xi,\tau) + c(\xi h(\tau),\tau) v(\xi,\tau) \Big]\,d\xi\,d\tau \Big| \le$$

$$\le \Big[C_{18} \big(\max_{[0,T]} |\mu_1'(t)| + \max_{[0,T]} |\mu_2'(t)| \big) + C_{19} \big(\max_{[0,H_1]\times[0,T]} |b(x,t)| \frac{M_3}{H_0} +$$

$$+ \max_{[0,H_1]\times[0,T]} |c(x,t)|\, M_1 + \max_{[0,H_1]\times[0,T]} f(x,t) + \frac{M_3 M_4}{H_0} \big) \Big] \big(t + \frac{2H_1\sqrt{t}}{\sqrt{A_0}} \big).$$

Звідси встановлюємо обмеження на число t_0, $0 < t_0 \le T$, при якому виконується нерівність (20).

Подамо систему рівнянь (12),(22)-(25) у вигляді рівняння $\omega = P\,\omega$, де $\omega = (a(t),\, h(t),\, p(t),\, v(y,t),\, w(y,t))$, а оператор P визначається правими частинами рівнянь (12),(22)-(25). Позначимо $N = \{(a(t),\, h(t),\, p(t),\, v(y,t),\, w(y,t)) \in (C[0,t_2])^3 \times (C(\overline{Q}_{t_2}))^2$: $A_0 \le a(t) \le A_1,\ H_0 \le h(t) \le H_1,\ |p(t)| \le M_4,\ M_0 \le v(y,t) \le M_1,\ \frac{1}{2}M_2 \le w(y,t) \le M_3\}$, де $t_2 = \min(t_0,\, t_1)$. З оцінок (11), (13), (27), (28), (29), (38)-(40) випливає, що оператор P відображає множину N в себе. Те, що оператор P є цілком неперервним, доведено в [3]. Отже, за теоремою Шаудера існує розв'язок системи рівнянь (12),(22)-(25), а, отже, і розв'язок задачі (6)-(10).

Доведемо єдиність розв'язку задачі (6)-(10). Нехай $(a_i(t),\, h_i(t),\, v_i(y,t))$, $i \in \{1,2\}$ — два розв'язки задачі. Введемо позначення $a_i(t)/h_i^2(t) = \widetilde{a}_i(t)$, $h_i'(t)/h_i(t) = q_i(t)$. Тоді різниці $a(t) = \widetilde{a}_1(t) - \widetilde{a}_2(t)$, $q(t) = q_1(t) - q_2(t)$, $v(y,t) = v_1(y,t) - v_2(y,t)$ задовольняють рівняння

$$v_t = \widetilde{a}_1(t)\, v_{yy} + \Big(y\, q_1(t) + \frac{b(y\, h_1(t), t)}{h_1(t)}\Big)\, v_y + c(yh_1(t),t)\, v + a(t)\, v_{2yy} + y\, q(t)\, v_{2y} +$$

$$+ b(y\, h_1(t), t)\big(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)}\big)\, v_{2y} + \frac{1}{h_2(t)}\big(b(y\, h_1(t), t) - b(y\, h_2(t), t)\big)\, v_{2y} +$$

$$+ \big(c(yh_1(t),t) - c(y\, h_2(t), t)\big)\, v_2 + f(y\, h_1(t), t) - f(y\, h_2(t), t), \qquad (y,t) \in Q_T \tag{41}$$

та умови

$$v(y,0) \,=\, 0, \qquad y \in [0,1], \tag{42}$$

$$v(0,t) \,=\, v(1,t) \,=\, 0, \qquad t \in [0,T], \tag{43}$$

$$\int\limits_0^1 v(y,t)\, dy \,=\, \mu_3(t)\Big(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)}\Big), \qquad t \in [0,T], \tag{44}$$

$$\int\limits_0^1 y v(y,t)\, dy \,=\, \mu_4(t)\Big(\frac{1}{h_1^2(t)} - \frac{1}{h_2^2(t)}\Big), \qquad t \in [0,T]. \tag{45}$$

Виразимо $h_i(t)$ через $q_i(t)$

$$h_i(t) = h_i(0) \exp\Big(\int\limits_0^t q_i(\tau)\, d\tau\Big),\ i \in \{1,2\}. \tag{46}$$

З умов теореми випливає $h_1(0) = h_2(0) = h_0$. Використовуючи рівність $e^x - e^y = = (x-y)\int_0^1 e^{y+\tau\,(x-y)}\, d\tau$, отримаємо

$$\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)} = -\frac{1}{h_0}\int\limits_0^t q(\tau)\, d\tau \int\limits_0^1 \exp\Big(-\int\limits_0^t (q_2(\tau) + \sigma q(\tau))\, d\tau\Big)\, d\sigma\,,$$

$$\frac{1}{h_1^2(t)} - \frac{1}{h_2^2(t)} = -\frac{2}{h_0^2}\int\limits_0^t q(\tau)\, d\tau \int\limits_0^1 \exp\Big(-2\int\limits_0^t (q_2(\tau) + \sigma q(\tau))\, d\tau\Big)\, d\sigma. \tag{47}$$

Розв'язок задачі (41)-(43) подамо у вигляді

$$v(y,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^1 G_1^*(y,t,\xi,\tau)\Big[a(\tau)\, v_{2\xi\xi}(\xi,\tau) + \xi\, q(\tau)\, v_{2\xi}(\xi,\tau) +$$

$$+ b(\xi\, h_1(\tau), \tau) v_{2\xi}(\xi,\tau)\left(\frac{1}{h_1(\tau)} - \frac{1}{h_2(\tau)}\right) + \frac{1}{h_2(\tau)}\, v_{2\xi}(\xi,\tau)\big(b(\xi\, h_1(\tau), \tau) - b(\xi\, h_2(\tau), \tau)\big) +$$

$$+ \big(c(\xi\, h_1(\tau), \tau) - c(\xi\, h_2(\tau), \tau)\big)\, v_2(\xi,\tau) + f(\xi\, h_1(\tau), \tau) - f(\xi\, h_2(\tau), \tau)\Big]\, d\xi\, d\tau, \tag{48}$$

де $G_1^*(y,t,\xi,\tau)$ — функція Гріна для рівняння

$$v_t = \widetilde{a}_1(t)\, v_{yy} + \Big(y\, q_1(t) + \frac{b(y\, h_1(t), t)}{h_1(t)}\Big)\, v_y + c(yh_1(t),t)\, v$$

з умовами (42), (43). Оскільки $(a_i(t),\, h_i(t),\, v_i(y,t)), i \in \{1,2\}$ є розв'язками задачі (6)-(10), то для $t \in [0,T]$ правильні, подібні до (22) та (23), рівності

$$a_i(t) = \frac{1}{w_i(0,t) - \mu_2(t) + \mu_1(t)} \Big[\mu_4'(t) - h_i(t) b(0,t)\mu_1(t) - h_i(t)\mu_3'(t) +$$

$$+ h_i^2(t) \int_0^1 (1-y) f(y h_i(t),t)\, dy + h_i^2(t) \int_0^1 (1-y) \big(c(y h_i(t),t) - b_\eta(\eta,t)|_{\eta = y h_i(t)} \big) v_i(y,t)\, dy +$$

$$+ h_i(t) \int_0^1 b(y h_i(t),t) v_i(y,t)\, dy \Big],$$

$$q_i(t) = \frac{1}{h_i(t)\mu_2(t)} \big[\mu_3'(t) - b(h_i(t),t)\mu_2(t) + b(0,t)\mu_1(t) - h_i(t) \int_0^1 f(y h_i(t),t)\, dy -$$

$$- h_i(t) \int_0^1 \big(c(y h_i(t),t) - b_\eta(\eta,t)|_{\eta = y h_i(t)} \big) v_i(y,t)\, dy - \frac{a_i(t)}{h_i(t)} w_i(1,t) + \frac{a_i(t)}{h_i(t)} w_i(0,t) \big],$$

де $w_i = v_{iy}$. Знайдемо звідси різниці $a(t)$ та $q(t)$. Функція $w_2(y,t) = v_{2y}(y,t)$, тоді з умов теореми отримаємо, що $w_2(0,t) > \frac{1}{2} M_2 > 0,\ t \in [0,t_0]$. З того, що $\mu_1(t) - \mu_2(t) \geq 0$, випливає $w_2(0,t) + \mu_1(t) - \mu_2(t) \neq 0$ при $t \in [0,t_0]$. Тоді

$$a(t) = \frac{1}{w_2(0,t) + \mu_1(t) - \mu_2(t)} \Big(\big(\frac{1}{h_1^2(t)} - \frac{1}{h_2^2(t)} \big) \mu_4'(t) - \big(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)} \big) (b(0,t)\mu_1(t) + \mu_3'(t))$$

$$+ \int_0^1 (1-y) \Big[c(y\, h_2(t),t) v(y,t) + \big(c(y\, h_1(t),t) - c(y\, h_2(t),t) \big) v_1(y,t) +$$

$$+ b(y\, h_1(t),t) v_{1y}(y,t) \big(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)} \big) + \frac{1}{h_2(t)} v_{1y}(y,t) \big(b(y\, h_1(t),t) - b(y\, h_2(t),t) \big) +$$

$$+ \frac{b(y\, h_2(t),t)}{h_2(t)} w(y,t) + f(y\, h_1(t),t) - f(y\, h_2(t),t) \Big] dy - \widetilde{a}_1(t)\, w(0,t) \Big), \qquad t \in [0,t_0], \quad (49)$$

$$q(t) = \frac{1}{\mu_2(t)} \Big(\big(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)} \big) \big(\mu_3'(t) - b(h_1(t),t)\mu_2(t) \big) + \frac{\mu_2(t)}{h_2(t)} (b(h_1(t),t) - b(h_2(t),t)) -$$

$$- \int_0^1 \Big[c(y\, h_2(t),t) v(y,t) + \big(c(y\, h_1(t),t) - c(y\, h_2(t),t) \big) v_1(y,t) +$$

$$+ b(y\, h_1(t),t) v_{1y}(y,t) \big(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)} \big) + \frac{1}{h_2(t)} v_{1y}(y,t) \big(b(y\, h_1(t),t) -$$

$$- b(y\, h_2(t),t) \big) + \frac{b(y\, h_2(t),t)}{h_2(t)} w(y,t) + f(y\, h_1(t),t) - f(y\, h_2(t),t) \Big] dy -$$

$$- \widetilde{a}_1(t)\, w_1(1,t) + \widetilde{a}_2(t)\, w_2(1,t) + \widetilde{a}_1(t)\, w_1(0,t) - \widetilde{a}_2(t)\, w_2(0,t) \Big), \qquad t \in [0,t_0], \qquad (50)$$

де $w(y,t)=v_y(y,t)$ визначимо за формулою

$$w(y,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G^*_{1y}(y,t,\xi,\tau)\Big[a(\tau)\,v_{2\xi\xi}(\xi,\tau)+\xi\,q(\tau)\,v_{2\xi}(\xi,\tau)+$$

$$+b(\xi\,h_1(\tau),\tau)v_{2\xi}(\xi,\tau)\left(\frac{1}{h_1(\tau)}-\frac{1}{h_2(\tau)}\right)+\frac{1}{h_2(\tau)}\,v_{2\xi}(\xi,\tau)\big(b(\xi\,h_1(\tau),\tau)-b(\xi\,h_2(\tau),\tau)\big)+$$

$$+\big(c(\xi\,h_1(\tau),\tau)-c(\xi\,h_2(\tau),\tau)\big)\,v_2(\xi,\tau)+f(\xi\,h_1(\tau),\tau)-f(\xi\,h_2(\tau),\tau)\Big]\,d\xi\,d\tau. \qquad (51)$$

За умов теореми правильні такі рівності

$$f(y\,h_1(t),t)-f(y\,h_2(t),t)=y(h_1(t)-h_2(t))\int\limits_0^1 f_x\big(y(h_2(t)+\sigma(h_1(t)-h_2(t)))\,,\,t\big)\,d\sigma\,,$$

$$b(y\,h_1(t),t)-b(y\,h_2(t),t)=y(h_1(t)-h_2(t))\int\limits_0^1 b_x\big(y(h_2(t)+\sigma(h_1(t)-h_2(t)))\,,\,t\big)\,d\sigma\,,$$

$$c(y\,h_1(t),t)-c(y\,h_2(t),t)=y(h_1(t)-h_2(t))\int\limits_0^1 c_x\big(y(h_2(t)+\sigma(h_1(t)-h_2(t)))\,,\,t\big)\,d\sigma\,,$$

$$h_1(t)-h_2(t)=h_0\int\limits_0^t q(\tau)\,d\tau\int\limits_0^1\exp\left(\int\limits_0^t(q_2(\tau)+\sigma q(\tau))\,d\tau\right)\,d\sigma\,,$$

$$\widetilde{a}_1(t)\,w_1(0,t)-\widetilde{a}_2(t)\,w_2(0,t)=\widetilde{a}_1(t)\,w(0,t)+a(t)\,w_2(0,t)\,,$$

$$\widetilde{a}_1(t)\,w_1(1,t)-\widetilde{a}_2(t)\,w_2(1,t)=\widetilde{a}_1(t)\,w(1,t)+a(t)\,w_2(1,t). \qquad (52)$$

Підставляючи (47), (48), (51) та (52) у (49), (50), одержимо однорідну систему інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду відносно $a(t)$, $q(t)$. З єдиності розв'язку таких систем випливає, що $a(t)\equiv 0$, $q(t)\equiv 0$. Тоді з (47), (48) та (52) випливає, що $h_1(t)=h_2(t)$, $v_1(y,t)=v_2(y,t)$. Теорему доведено. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Іванчов М.І. *Обернена задача з вільною межею для рівняння теплопровідності* // Укр. мат. журн. – 2003. – Т.55, №7. – С.901–910.
2. Вігак В. М. *Побудова розв'язку задачі теплопровідності з інтегральними умовами* // Доп. НАНУ. – 1994, №8. – С.57–60.
3. Ivanchov M. Inverse problems for equations of parabolic type. -VNTL Publishers, 2003.
4. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968.
5. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977.

Львівський національний університет імені Івана Франка
механіко-математичний факультет
diffeq@franko.lviv.ua

Надійшло 26.10.2004