УДК 517.9

С. А. Щоголев

ПРО РОЗВ'ЯЗКИ КВАЗІЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ З КОЛИВНОЮ МАТРИЦЕЮ КОЕФІЦІЄНТІВ ЛІНІЙНОЇ ЧАСТИНИ

S. A. Shchogolev. *On solution of the quasilinear differential systems with oscillating matrix of coefficients of the linear parts*, Matematychni Studii, **27** (2007) 77–84.

For quasilinear almost triangle differential systems whose coefficients are represented by trigonometric series with slowly varying coefficients and frequencies, conditions of existence of partial solutions of analogous structure are obtained.

С. А. Щёголев. *О решениях квазилинейных дифференциальных систем с осциллирующей матрицей коэффициентов линейной части* // Математичні Студії. – 2007. – Т.27, №1. – С.77–84.

Для квазилинейной дифференциальной системы почти треугольного вида, коэффициенты которой представимы в виде тригонометрических рядов с медленно меняющимися коэффициентами и частотой, получены условия существования частного решения аналогичной структуры.

1. Опис проблеми. Добре відома в теорії диференціальних рівнянь і теорії коливань задача дослідження періодичних розв'язків квазілінійних диференціальних систем [7,8]. Разом з цим строга періодичність коефіцієнтів системи та її розв'язків є деякою ідеалізацією. У реальних фізичних системах амплітуди та частоти коливань доволі часто є змінними величинами – у певному сенсі повільно змінними функціями від часу. У зв'язку з цим виникає задача дослідити системи, коефіцієнти яких зображувані тригонометричними рядами Фур'є з повільно змінними коефіцієнтами та частотами і отримати умови існування у таких систем частинних розв'язків такої ж структури.

2. Аналіз останніх досліджень та публікацій. У цілій низці робіт [1-3, 9,10] вивчалися лінійні та квазілінійні системи з повільно змінними параметрами. Зокрема досліджувалися інтегральні многовиди таких систем з періодичними та квазіперіодичними коефіцієнтами, а також асимптотичні розвинення розв'язків. У статтях О.В.Костіна і автора [4-6] досліджувалася можливість знаходження розв'язків не у вигляді асимптотичних, а у вигляді абсолютно та рівномірно збіжних рядів Фур'є з повільно змінними коефіцієнтами та частотою. Цілком зрозуміло при цьому, що навіть два-три члени асимптотичного розбіжного ряду можуть давати краще наближення, ніж десятки, а те й сотні членів збіжного ряду. Зрештою, в обчислювальній математиці ця ситуація є добре відомою (див., наприклад, так звані ряди Зундмана [11]). Разом з цим у теоретичному відношенні задача знаходження розв'язків саме у вигляді збіжних рядів є

2000 *Mathematics Subject Classification:* 34A30.

також досить важливою, і тому відповідна постановка задачі є виправданою. У статтях [4,5] припускалося, що елементи матриці лінійної частини системи є повільно змінними функціями. У даній статті розглядається системи з коливною матрицею коефіцієнтів лінійної частини, причому коливні доданки не припускаються малими порівняно з повільно змінними.

3. Постановка задачі. Введемо наступні означення. Домовимось писати, що *функція* $f(t,\varepsilon)$ *належить до класу* S_m^+ $(m \in N \cup \{0\})$, якщо виконані наступні умови:

1) $f\colon G \to \mathbb{C}$, де $G = \{t, \varepsilon : t \in [t_0, +\infty), \varepsilon \in [0, \varepsilon_0], t_0, \varepsilon_0 \in R^+\}$,
2) $f \in C^m[t_0, +\infty)$ по t,
3) $d^k f/dt^k = \varepsilon^k f_k^*(t,\varepsilon), \quad \sup\limits_G |f_k^*| < +\infty \ (0 \le k \le m)$.

Прикладами функцій з класу S_m^+ можуть бути обмежені разом зі своїми похідними до m-го порядку включно функції, які залежать від повільного часу $\tau = \varepsilon t$. Таким чином означення 1 це узагальнене означення класу повільно змінних функцій, що використовується у низці відомих робіт [1,9].

Домовимось писати, що *функція* $f\left(t, \varepsilon, \theta(t,\varepsilon)\right)$ *належить до класу* B_m^+, якщо ця функція зображувана у вигляді:

$$f\left(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t,\varepsilon)\exp\left(in\theta(t,\varepsilon)\right), \tag{1}$$

де

1) $f_n \in S_m^+, \quad d^k f_n/dt^k = \varepsilon^k f_{nk}(t,\varepsilon) \quad (n \in \mathbb{Z}, 0 \le k \le m)$
2)
$$\|f\|_{B_m^+} \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{m}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sup_G |f_{nk}| < +\infty, \tag{2}$$
3) $\theta(t,\varepsilon) = \int_0^t \varphi(\tau,\varepsilon)d\tau, \quad \varphi\colon G \to \mathbb{R}^+, \quad \varphi \in S_m^+, \quad \inf\limits_G \varphi > 0$

Зокрема, при $\varepsilon = 0$: $\varphi = \mathrm{const}$, $\theta = \varphi t$, f_n — сталі, і функції класу B_m^+ перетворюються на $2\pi/\varphi$-періодичні функції змінної t

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\varphi t}.$$

При цьому $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n| < +\infty$.

Функції класу S_m^+, очевидно, є частинним випадком функцій класу B_m^+ при $f_n \equiv 0$ $\forall n \ne 0$.

Клас B_m^+ утворює лінійний простір, який перетворюється на повний нормований простір введенням норми (2). Сформулюємо деякі властивості цієї норми. Нехай $u, v \in B_m^+$. Тоді

1) $\|uv\|_{B_m^+} \le (2^{m+1} - 1)\,\|u\|_{B_m^+}\|v\|_{B_m^+}$.
2) $\exp(u) \in B_m^+$, причому

$$\|\exp(u)\|_{B_m^+} \le 1 + \frac{1}{2^{m+1}-1}\left(\exp\left(\left(2^{m+1}-1\right)\|u\|_{B_m^+}\right) - 1\right)$$

Маємо ланцюжок включень $B_0^+ \supset B_1^+ \supset \cdots \supset B_{m-1}^+ \supset B_m^+$.

Розглядається система диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{k=1}^{j} p_{jk}(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))x_k + f_j(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) + \mu X_j(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon),x_1,\ldots,x_M), \quad j\in\{1,\ldots,M\}, \tag{3}$$

де $p_{jk}, f_j \in B^+_m$, $(j\in\{1,\ldots,M\},\ \ k\le j)$, $\mathrm{colon}(x_1,\ldots,x_M)\in D\subset \mathbb{C}^M$, де $\mathbb{C}^M$ — $M-$ вимірний комплексний простір. Функції $X_j (j\in\{1,\ldots,M\})$, у загальному випадку нелінійні, належать до класу B^+_m відносно t,ε,θ і неперервні по $x_1,\ldots,x_M$ в D. Крім того потрібна умова: якщо $x_1,\ldots,x_M\in B^+_m$, то $X_j(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon),x_1,\ldots,x_M)\in B^+_m(j\in\{1,\ldots,M\})$. Зокрема, ця умова виконана, якщо X_j є поліномами відносно $x_1,\ldots,x_n$; μ — дійсний додатний параметр.

Досліджується питання про існування у системи (3) частинних розв'язків класу B^+_m. При $m=1$ відповідний результат отримано у статті [6]. Припускатимемо, що $m\ge 1$.

4. Метод розв'язання задачі та формулювання результатів. Вивчення системи (3) почнемо з розгляду лінійного неоднорідного рівняння 1-го порядку вигляду

$$\frac{dx}{dt} = \lambda(t,\varepsilon)x + u(t,\varepsilon,\theta), \tag{4}$$

де $u\in B^+_m$, $\quad \lambda\in S^+_m$.

Лема 1. *Нехай коефіцієнт $\lambda(t,\varepsilon)$ в рівнянні (4) такий, що $\inf\limits_G|\mathrm{Re}\,\lambda| = \gamma > 0$. Тоді існує частинний розв'язок $x(t,\varepsilon,\theta)$ рівняння (4), який належить до класу B^+_m, причому $\exists\ \ A_0\in R^+$ таке, що*

$$\|x\|_{B^+_m} \le \frac{A_0}{\gamma}\|u\|_{B^+_m}$$

Якщо $\inf\limits_G \mathrm{Re}\,\lambda = \gamma > 0$, то цей розв'язок єдиний.

Доведення. Шукатимемо розв'язок рівняння (4) у вигляді

$$x(t,\varepsilon,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n(t,\varepsilon)\exp(in\theta(t,\varepsilon)). \tag{5}$$

Підставляючи вираз (5) у рівняння (4), і, порівнюючи коефіцієнти при $\exp(in\theta)$, отримаємо систему диференціальних рівнянь відносно коефіцієнтів x_n

$$\frac{dx_n}{dt} = \sigma_n(t,\varepsilon)x_n + u_n(t,\varepsilon), \quad n\in Z, \tag{6}$$

де вжито позначення $u_n(t,\varepsilon) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t,\varepsilon,\theta)\exp(-in\theta)d\theta$, $\sigma_n(t,\varepsilon) = \lambda(t,\varepsilon) - in\varphi(t,\varepsilon)$.

Дослідимо окремо два випадки.

1. $\mathrm{Re}\,\lambda(t,\varepsilon)\le -\gamma < 0$. Розглянемо наступний розв'язок рівняння (6)

$$x_n(t,\varepsilon) = \exp\Big(\int_{t_0}^{t}\sigma_n(\xi,\varepsilon)d\xi\Big)\Big(c_n + \int_{t_0}^{t} u_n(\tau,\varepsilon)\exp\Big(-\int_{t_0}^{\tau}\sigma_n(\xi,\varepsilon)d\xi\Big)d\tau\Big), \tag{7}$$

де $c_n = -\frac{1}{\sigma_n(t_0,\varepsilon)}\Big(\sum_{k=0}^{m-1} L^k_n\big(u_n(t,\varepsilon)\big)\Big)\Big|_{t=t_0}$. Тут вжито позначення

$L_n^0(u(t,\varepsilon) = u(t,\varepsilon)$, $L_n^1(u(t,\varepsilon) = \frac{d}{dt}\Big(\frac{u(t,\varepsilon)}{\sigma_n(t,\varepsilon)}\Big)$, $L_n^k(u(t,\varepsilon)) = L_n^1\big(L_n^{k-1}(u(t,\varepsilon))\big)$.

Застосовуючи в (7) $m-$кратне інтегрування частинами, запишемо функцію x_n у вигляді $x_n(t,\varepsilon) = -\frac{1}{\sigma_n(t,\varepsilon)}\sum_{k=0}^{m-1} L_n^k(u_n(t,\varepsilon)) + \exp\big(\int_{t_0}^t \sigma_n(\xi,\varepsilon)d\xi\big)\int_{t_0}^t L_n^m(u_n(\tau,\varepsilon))\times$ $\times\exp\big(-\int_{t_0}^\tau \sigma_n(\xi,\varepsilon)d\xi\big)d\tau$. Звідси послідовно отримуємо $L_n^s\Big(\frac{dx_n}{dt}\Big) = -\sum\limits_{k=s+1}^{m-1} L_n^k(u_n(t,\varepsilon))+$ $+\sigma_n(t,\varepsilon)\exp\Big(\int\limits_{t_0}^t \sigma_n(\xi,\varepsilon)d\xi\Big)\int_{t_0}^t L_n^m(u_n(\tau,\varepsilon))\exp\Big(-\int\limits_{t_0}^\tau \sigma_n(\xi,\varepsilon)d\xi\Big)d\tau \quad (s\in\{0,\dots,m-1\})$. Тут у випадку $s=m-1$ вважаємо, що сума дорівнює нулю.

З урахуванням того, що $\operatorname{Re}\sigma_n = \operatorname{Re}\lambda \le -\gamma < 0$, використовуючи відомі оцінки інтегралів [12], з цих співвідношень отримуємо потрібне.

2. $\operatorname{Re}\lambda(t,\varepsilon) \ge \gamma > 0$. Тепер розглянемо такий розв'язок рівняння (6)

$x_n^*(t,\varepsilon) = -\exp\Big(\int_{t_0}^t \sigma_n(\xi,\varepsilon)d\xi\Big)\int_t^{+\infty} u_n(\tau,\varepsilon)\exp\Big(-\int_{t_0}^\tau \sigma_n(\xi,\varepsilon)d\xi\Big)d\tau.$

Подібно до попереднього отримуємо $L_n^s\Big(\frac{dx_n^*}{dt}\Big) = -\sum\limits_{k=s+1}^{m-1} L_n^k(u_n(t,\varepsilon))-$ $-\sigma_n(t,\varepsilon)\exp\Big(\int\limits_{t_0}^t \sigma_n(\xi,\varepsilon)d\xi\Big)\int_t^{+\infty} L_n^m(u_n(\tau,\varepsilon))\exp\Big(-\int\limits_{t_0}^\tau \sigma_n(\xi,\varepsilon)d\xi\Big)d\tau \ \ (s\in\{0,\dots,m-1\})$, де й тут у випадку $s=m-1$ вважаємо, що сума дорівнює нулю. З врахуванням умови $\operatorname{Re}\sigma_n = \operatorname{Re}\lambda \ge \gamma > 0$ і використанням оцінок [12] отримуємо потрібне.

Доведемо тепер єдиність розв'язку з класу B_m^+. Справді, якщо припустити, що рівняння (4) має принаймні два розв'язки $x(t,\varepsilon,,\theta), \widetilde{x}(t,\varepsilon,\theta)$ з класу B_m^+, то тоді функція $y = x - \widetilde{x}$ задовольняє однорідне рівняння $\frac{dy}{dt} = \lambda(t,\varepsilon)y$, загальний розв'язок якого має вигляд $y = c\cdot\exp\big(\int_{t_0}^t \lambda(\tau,\varepsilon)d\tau\big)$. А тоді при $c\ne 0$ функція y є необмеженою при $t\to+\infty$, що суперечить тому, що $y\in B_m^+$. Отже у випадку $\operatorname{Re}\lambda \ge \gamma > 0$ розв'язок з класу B_m^+ рівняння (4) єдиний. Лему 1 доведено. □

Розглянемо тепер лінійне неоднорідне рівняння з коливним коефіцієнтом

$$\frac{dx}{dt} = p(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))x + f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)), \tag{8}$$

де $p = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k(t,\varepsilon)\exp(ik\theta(t,\varepsilon)) \in B_m^+$, $f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(t,\varepsilon)\exp(ik\theta(t,\varepsilon)) \in B_m^+$.

Введемо послідовні диференціальні оператори

$$D^0(u(t,\varepsilon)) = u(t,\varepsilon), \quad D^1(u(t,\varepsilon)) = \frac{d}{dt}\left(\frac{u(t,\varepsilon)}{\varphi(t,\varepsilon)}\right), \quad D^l(u(t,\varepsilon)) = D^1(D^{l-1}(u(t,\varepsilon)))$$

$(l\in\{2,3,\dots,m+1\})$.

Лема 2. *Нехай рівняння (8) задовольняє умови:*

1) *функція $\widetilde{p}(t,\varepsilon,\theta) = 1p(t,\varepsilon,\theta) - p_0(t,\varepsilon)$ з класу B_{m+1}^+, функція $\varphi(t,\varepsilon)\in S_{m+1}^+$,*
2) *$\inf\limits_G |\operatorname{Re}p_0(t,\varepsilon)| = \gamma_0 > 0$,*
3) *функції $D^{m+1}(\operatorname{Re}p_k(t,\varepsilon))$, $\ D^{m+1}(\operatorname{Im}p_k(t,\varepsilon))\ \ (k\ne 0)$зберігають знак в області G.*

Тоді рівняння (8) має частинний розв'язок $x(t,\varepsilon,\theta)\in B_m^+$, причому $\exists A_1\in R^+$ таке, що $\|x\|_{B_m^+} \le A_1\|f\|_{B_m^+}$. У випадку $\inf\limits_G \operatorname{Re}p_0(t,\varepsilon) = \gamma > 0$ цей розв'язок єдиний.

Доведення. Дослідимо спочатку випадок, коли $\operatorname{Re} p_0(t,\varepsilon) \le -\gamma < 0$. Розглянемо наступний розв'язок рівняння (8)
$x(t,\varepsilon,\theta) = \exp\Big(\int_{t_0}^t p(\xi,\varepsilon,\theta(\xi,\varepsilon))d\xi\Big)\Big(c + \int_{t_0}^t f(\tau,\varepsilon,\theta(\tau,\varepsilon))\exp\Big(-\int_{t_0}^\tau p(\xi,\varepsilon,\theta(\xi,\varepsilon))d\xi\Big)d\tau\Big)$,
де сталу c наведемо пізніше. Запишемо цей розв'язок у вигляді
$x(t,\varepsilon,\theta) = \exp\big(\int_{t_0}^t p_0(\xi,\varepsilon)d\xi\big)\exp\big(\int_{t_0}^t \sum_{k\neq 0} p_k(\xi,\varepsilon)\exp(ik\theta(\xi,\varepsilon))d\xi\big)\times$
$\times\big(c + \int_{t_0}^t f(\tau,\varepsilon,\theta(\tau,\varepsilon))\exp\big(-\int_{t_0}^\tau \sum_{k\neq 0} p_k(\xi,\varepsilon)\exp(ik\theta(\xi,\varepsilon))d\xi\big)\exp\big(-\int_{t_0}^t p_0(\xi,\varepsilon)d\xi\big)d\tau\big)$.
Встановимо справедливість співвідношення

$$\int_{t_0}^{t} p_k(\xi,\varepsilon)\exp(ik\theta(\xi,\varepsilon)d\xi = a_k(t,\varepsilon)\exp(ik\theta(t,\varepsilon)) - a_k(t_0,\varepsilon), \tag{9}$$

де $a_k(t,\varepsilon) \in S_m^+ \quad (k \in Z, \quad k \neq 0)$. Справді, знову використовуючи $m-$кратне інтегрування частинами, несkладно довести, що у рівності (9)

$$a_k(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varphi(t,\varepsilon)}\sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{(-1)^\nu D^\nu(p_k(t,\varepsilon))}{(ik)^{\nu+1}} + \frac{(-1)^m}{(ik)^m}\exp(-ik\theta(t,\varepsilon)\int_{t_0}^{t} D^m(p_k(\xi,\varepsilon))\exp(ik\theta(\xi,\varepsilon)d\xi.$$

Звідси послідовно отримуємо

$$D^l\Big(\frac{da_k(t,\varepsilon)}{dt}\Big) = \sum_{\nu=l+1}^{m-1}\frac{(-1)^{\nu-l-1}}{(ik)^{\nu-l}}D^\nu(p_k(t,\varepsilon)) +$$

$$+\frac{(-1)^{m-l-1}}{(ik)^{m-l-1}}\varphi(t,\varepsilon)\exp(-ik\theta(t,\varepsilon))\int_{t_0}^{t} D_m(p_k(\xi,\varepsilon))\exp(ik\theta(\xi,\varepsilon))d\xi \quad (l \in \{0,\ldots,m-1\}).$$

За лінійністю оператора D^m можемо записати $\int_{t_0}^t D^m(p_k(\xi,\varepsilon))\exp(ik\theta(\xi,\varepsilon))d\xi =$
$\int_{t_0}^t D^m(\alpha_k(\xi,\varepsilon))\exp(ik\theta(\xi,\varepsilon))d\xi + i\int_{t_0}^t D^m(\beta_k(\xi,\varepsilon))\exp(ik\theta(\xi,\varepsilon))d\xi$, де $\alpha_k = \operatorname{Re} p_k(t,\varepsilon)$, $\beta_k = \operatorname{Im} p_k(t,\varepsilon)$. Розглянемо $\Big|\int_{t_0}^t D^m(\alpha_k(\xi,\varepsilon))\exp(ik\theta(\xi,\varepsilon))d\xi\Big| = \Big|\frac{D^m(\alpha_k(t,\varepsilon))}{ik\varphi(t,\varepsilon)}\exp(ik\theta(t,\varepsilon)) -$
$\frac{D^m(\alpha_k(t_0,\varepsilon))}{ik\varphi(t_0,\varepsilon)} - \frac{1}{ik}\int_{t_0}^t D^{m+1}(\alpha_k(\xi,\varepsilon))\exp(ik\theta(\xi,\varepsilon))d\xi\Big|$. За умовою умови леми $D^{m+1}(\alpha_k)$ зберігає знак в G. Тому $\Big|\int_{t_0}^t D^{m+1}(\alpha_k(\xi,\varepsilon))\exp(ik\theta(\xi,\varepsilon))d\xi\Big| \le \int_{t_0}^t \Big|D^{m+1}(\alpha_k(\xi,\varepsilon))\Big|d\xi =$
$\Big|\int_{t_0}^t D^{m+1}(\alpha_k(\xi,\varepsilon))d\xi\Big| = \Big|\frac{D^m(\alpha_k(t,\varepsilon))}{\varphi(t,\varepsilon)} - \frac{D^m(\alpha_k(t_0,\varepsilon))}{\varphi(t_0,\varepsilon)}\Big|$. З цих виразів випливає, що
$\int_{t_0}^t D^m(\alpha_k(\xi,\varepsilon))\exp(ik\theta(\xi,\varepsilon))d\xi = \varepsilon^m r_{km}(t,\varepsilon)$, де $\sum_{k=-\infty}^\infty \sup\limits_G\Big|r_{km}(t,\varepsilon)\Big| < +\infty$. Подібна оцінка правильна і для інтеграла $\int_{t_0}^t D^m(\beta_k(\xi,\varepsilon))\exp(ik\theta(\xi,\varepsilon))d\xi$. Звідси випливає співвідношення (9). А з нього випливає, що розв'язок $x(t,\varepsilon,\theta)$ можна записати у вигляді

$$x(t,\varepsilon,\theta) = \exp\Big(\int_{t_0}^{t} p_0(\xi,\varepsilon)d\xi\Big)u(t,\varepsilon,\theta)v(t_0,\varepsilon,0)\times$$

$$\times\Big(c + \int_{t_0}^{t} f(\tau,\varepsilon,\theta(\tau,\varepsilon))v(\tau,\varepsilon,\theta(\tau,\varepsilon))u(t_0,\varepsilon,0)\exp\Big(-\int_{t_0}^{\tau} p_0(\xi,\varepsilon)d\xi\Big)d\tau\Big),$$

де функції $u = \exp a(t,\varepsilon,\theta)$, $\quad v = \exp(-a(t,\varepsilon,\theta))$, $\quad a = \sum_{k\neq 0} a_k(t,\varepsilon)\exp(ik\theta(t,\varepsilon)$ з класу B_m^+. Позначимо $g(t,\varepsilon,\theta) = f(t,\varepsilon,\theta)v(t,\varepsilon,\theta)u(t_0,\varepsilon,0) \in B_m^+$ і розглянемо функцію

$y(t,\varepsilon,\theta) = \exp\Big(\int_{t_0}^t p_0(\xi,\varepsilon)d\xi\Big)\Big(c + \int_{t_0}^t g(\tau,\varepsilon,\theta(\tau,\varepsilon))\exp\Big(-\int_{t_0}^\tau p_0(\xi,\varepsilon)d\xi\Big)d\tau\Big).$

З леми 1 випливає, що при $c = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{p_0(t_0,\varepsilon)-in\varphi(t_0,\varepsilon)}\Big(\sum_{k=0}^{m-1} L_n^k(g_n(t,\varepsilon))\Big|_{t=t_0}\Big)$, де $g_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t,\varepsilon,\theta)\exp(-in\theta)d\theta$, функція $y(t,\varepsilon,\theta) \in B_m^+$, отже $x(t,\varepsilon,\theta) \in B_m^+$.

Подібно розглядається випадок, коли $\operatorname{Re} p_0(t,\varepsilon) \geq \gamma > 0$. Тоді беремо розв'язок $x(t,\varepsilon,\theta) = -\exp\Big(\int_{t_0}^t p(\xi,\varepsilon,\theta(\xi,\varepsilon))d\xi\Big)\int_t^{+\infty} f(\tau,\varepsilon,\theta(\tau,\varepsilon))\exp\Big(-\int_{t_0}^\tau p(\xi,\varepsilon,\theta(\xi,\varepsilon))d\xi\Big)d\tau.$

Єдиність доводиться так, як і у лемі 1. Лему 2 доведено. □

Розглянемо тепер лінійну неоднорідну систему, яка відповідає системі (3)

$$\frac{dx_{j0}}{dt} = \sum_{k=1}^{j} p_{jk}(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))x_{k0} + f_j(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)), \quad j \in \{1,\dots,M\}. \tag{10}$$

Теорема 1. *Нехай система (10) задовольняє умови:*

1) $p_{jk}(t,\varepsilon,\theta), f_j \in B_m^+$,
2) $p_{jj} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_{jj,n}(t,\varepsilon)\exp(in\theta(t,\varepsilon))$, *причому* $p_{jj,0} \in S_m^+$, $\quad p_{jj} - p_{jj,0} \in B_{m+1}^+$, $\quad \varphi \in S_{m+1}^+$,
3) $\inf\limits_G |\operatorname{Re} p_{jj,0}(t,\varepsilon)| \geq \gamma_0 > 0$,
4) *функції* $D^{m+1}(\operatorname{Re} p_{jj,k}(t,\varepsilon))$, $\quad D^{m+1}(\operatorname{Im} p_{jj,k}(t,\varepsilon))$ $\quad (k \in Z\backslash\{0\})$ *зберігають знак в області* G $\quad (j \in \{1,\dots,M\})$.

Тоді система (10) має частинний розв'язок $x_{j0}(t,\varepsilon,\theta) \in B_m^+$ $\qquad (j \in \{1,\dots,M\})$, *причому* $\exists A \in \mathbb{R}^+$ *таке, що*

$$\sum_{j=1}^{M} \|x_{j0}\|_{B_m^+} \leq A\sum_{j=1}^{M} \|f_j\|_{B_m^+}. \tag{11}$$

Якщо існує таке k, що $\operatorname{Re} p_{kk}(t,\varepsilon) \geq \gamma > 0$, то такий ров'язок єдиний.

Доведення. Розглянемо послідовно (зверху вниз) рівняння системи (10). Перше з них має вигляд $\frac{dx_{10}}{dt} = p_{11}(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))x_{10} + f_1(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))$. За умовами теореми, це рівняння задовольняє всі умови леми 2, за якою воно має частинний розв'язок $\widetilde{x}_{10}(t,\varepsilon,\theta) \in B_m^+$. Підставимо цей розв'язок у друге рівняння системи (10)

$$\frac{dx_{20}}{dt} = p_{22}(t,\varepsilon,\theta)x_{20} + p_{21}(t,\varepsilon,\theta)\widetilde{x}_{10}(t,\varepsilon,\theta) + f_2(t,\varepsilon,\theta). \tag{12}$$

Знову бачимо, що виконуються всі умови леми 2, отже й рівняння (12) має частинний розв'язок з класу B_m^+. Продовжуючи міркувати так далі, прийдемо до останнього рівняння $\frac{dx_{M0}}{dt} = p_{MM}(t,\varepsilon,\theta)x_{M0} + \sum_{k=1}^{M-1} p_{Mk}(t,\varepsilon,\theta)\widetilde{x}_{k0}(t,\varepsilon,\theta) + f_M(t,\varepsilon,\theta)$, яке також задовольняє умови леми 2, отже має частинний розв'язок $\widetilde{x}_{M0}(t,\varepsilon,\theta)$ з класу B_m^+. Теорему доведено. □

Повернемось тепер безпосередньо до системи (3). Введемо область

$$\Omega = \Big\{x_j \in B_m^+ : \sum_{j=1}^{M} \|x_j - \widetilde{x}_{j0}\|_{B_m^+} \leq h, \quad h > 0\Big\}.$$

Теорема 2. *Нехай система (3) задовольняє умови:*

1) *при* $\mu = 0$ *виконані всі умови теореми 1,*
2) $(\exists\, L(h) \in \mathbb{R}^+)$ *таке, що* $(\forall\ (x_1, \ldots, x_M), (y_1, \ldots, y_M) \in \Omega$ *виконується*

$$\sum_{j=1}^{M} \|X_j(t,\varepsilon,\theta,x_1,\ldots,x_M) - X_j(t,\varepsilon,\theta,y_1,\ldots,y_M)\|_{B_m^+} \leq L(h) \sum_{j=1}^{M} \|x_j - y_j\|_{B_m^+}.$$

Тоді $\exists\, \mu_0 \in \mathrm{R}_+$ *таке, що* $\forall \mu \in [0;\mu_0[$ *система (3) має частинний розв'язок* $x_j(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ $(j \in \{1,\ldots,M\})$ *з класу* B_m^+.

Доведення. Розв'язок системи (3) з класу B_m^+ шукатимемо методом послідовних наближень, обираючи за початкове $x_{j0}(t,\varepsilon,\theta)$ $\ (j \in \{1,\ldots,M\})$, а наступні визначивши як розв'язки з класу B_m^+ лінійних неоднорідних систем

$$\frac{dx_{j\nu}}{dt} = \sum_{k=1}^{j} p_{jk}(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))x_{k\nu} + f_j(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) + \mu X_j(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon),x_{1,\nu-1},\ldots,x_{M,\nu-1}),$$

$$j \in \{1,\ldots,M\}, \quad \nu \in \{1,2\},\ldots \tag{14}$$

За теоремою 1 – всі вони існують.

Доведемо, що для достатньо малих значень параметра μ всі наближення залишаються всередині області Ω. Для $\widetilde{x}_{j0}(j \in \{1,\ldots,M\})$ це очевидно. Припустимо, що $x_{j\nu} \in \Omega(j \in \{1,\ldots,M\})$. Позначимо $H(h) = \sup\limits_{x_1,\ldots,x_M \in \Omega} \sum_{j=1}^{M} \|X_j(t,\varepsilon,\theta,x_1,\ldots,x_M)\|_{B_m^+}$.

Оскільки

$$\frac{d(x_{j,\nu+1} - \widetilde{x}_{j0})}{dt} = \sum_{k=1}^{j} p_{jk}(t,\varepsilon,\theta)(x_{k,\nu+1} - \widetilde{x}_{k0}) + \mu X_j(t,\varepsilon,\theta,x_{1\nu},\ldots,,x_{M\nu}),\ j \in \{1,\ldots,M\},$$

то на підставі оцінки (11) маємо

$$\sum_{j=1}^{M} \|x_{j,\nu+1} - \widetilde{x}_{j0}\|_{B_m^+} \leq \mu A \sum_{j=1}^{M} \|X_j(t,\varepsilon,\theta,x_{1\nu},\ldots,x_{M\nu})\|_{B_m^+} \leq \mu A H(h).$$

Отже, при $\mu A H(h) \leq h_0 < h$ потрібне включення виконується. Доведемо тепер збіжність процесу (14) до розв'язку класу B_m^+ системи (3). Оскільки $\frac{d(x_{j,\nu+1}-x_{j\nu})}{dt} = \sum_{k=1}^{j} p_{jk}(t,\varepsilon,\theta)(x_{k,\nu+1} - x_{k\nu}) + \mu\big(X_j(t,\varepsilon,\theta,x_{1\nu},\ldots,x_{M\nu}) - X_j(t,\varepsilon,\theta,x_{1,\nu-1},\ldots,x_{M,\nu-1})\big)$, $j \in \{1,\ldots,M\}$, то знову ж таки на підставі (14) і за умовою 2 теореми маємо $\sum_{j=1}^{M} \|x_{j,\nu+1} - x_{j\nu}\|_{B_m^+} \leq \mu A \sum_{j=1}^{M} \|X_j(t,\varepsilon,\theta,x_{1/nu},\ldots,x_{M\nu}) - X_j(t,\varepsilon,\theta,x_{1,/nu-1},\ldots,$ $x_{M,\nu-1})\|_{B_m^+} \leq \mu A L(h) \sum_{j=1}^{M} \|x_{j\nu} - x_{j,\nu-1}\|_{B_m^+}$, звідки випливає, що за умови $\mu A L(h) < 1$ забезпечується необхідна збіжність. Очевидно, що нерівності $\mu A H(h) \leq h_0 < h$, $\mu A L(h) < 1$ одночасно виконуються для достатньо малих значень параметра μ.

□

ЛІТЕРАТУРА

1. Митропольский Ю.А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. – М.: Наука, 1964. – 432 с.
2. Самойленко А.М., Петришин Р.І. Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. – К.: ІМ НАНУ, 2004. – 474 с.
3. Самойленко А.М. *Инвариантные тороидальные многообразия систем с медленно меняющимися переменными* // Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. К., 1977. – С. 181–191.
4. Костин А.В., Щёголев С.А. *Об одном классе решений дифференциальной системы с медленно меняющимися параметрами* // Укр. матем. журн. – 1989. – Т.41, №1. – С. 101–103.
5. Костин А.В., Щёголев С.А. *О решениях квазилинейной дифференциальной системы второго порядка, представимых рядами Фурье, содержащими медленно меняющиеся параметры* // Укр. матем. журн. – 1998. – Т.50, №5. – С.654–664.
6. Щёголев С.А. *О решениях квазилинейной дифференциальной системы с периодическими коэффициентами* // Укр. матем. журн. – 1993. – Т.45, №8. – С. 1157–1161.
7. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. – М.: Гостехиздат, 1956. – 491 с.
8. Старжинский В.М. Прикладные методы нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1977. – 256 с.
9. Фещенко С.Ф., Шкиль Н.И., Николенко Л.Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. – К.: Наук. думка, 1966. – 251 с.
10. Меркин М.Р., Фридман В.М. *Проекционный метод решения задачи о вынужденных колебаниях в системах с медленно меняющимися коэффициентами* // Прикл. матем. и механ. – 1981. – Т.45, вып.1. – С.71–76.
11. Дубошин Г.Н.. Небесная механика. Аналитические и качественные методы . – М. Наука, 1964. – 560 с.
12. Костин А.В. Устойчивость и асимптотика квазилинейных неавтономных дифференциальных систем. – Одесса, 1984. – 94 с.

Одеський національний університет ім. І.І.Мечнікова
Інститут математики, економіки та механіки

Надійшло 15.12.2005