УДК 517.956.2+517.956.4

С. Д. Івасишен

ПРО РОЗВИТОК ІДЕЙ Я. Б. ЛОПАТИНСЬКОГО В ТЕОРІЇ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

S. D. Ivasyshen. *On development of ideas of Ya.B.Lopatynsky in the theory of parabolic equations*, Matematychni Studii, **27** (2007) 70–76.

A brief review is presented of results of Ya.B.Lopatynsky in the theory of elliptic systems as well as results of other authors in the theory of parabolic systems in which ideas of Ya.B.Lopatynsky were mostly developed.

С. Д. Ивасишен. *О развитии идей Я.Б.Лопатинского в теории параболических уравнений* // Математичні Студії. – 2007. – Т.27, №1. – С.70–76.

Приведен краткий обзор работ Я.Б.Лопатинского по теории эллиптических систем и работ других авторов по теории параболических систем, в которых идеи Я.Б.Лопатинского получили наибольшее развитие.

Я.Б.Лопатинський став всесвітньо відомим математиком у першу чергу завдяки його фундаментальним результатам в теорії еліптичних систем рівнянь із частинними похідними та крайових задач для таких систем. Ці результати він одержав у Львівський період свого життя (1946 – 1963 pp.). Праці Ярослава Борисовича з теорії еліптичних систем багато в чому визначили напрям розвитку цієї галузі математики, а закладені в них ідеї мали благотворний вплив на розвиток теорії параболічних систем рівнянь.

У цій статті робиться короткий огляд праць як самого Я.Б.Лопатинського, так і праць з теорії параболічних систем рівнянь, в яких ідеї Ярослава Борисовича отримали найбільший розвиток.

1. Праці Я.Б.Лопатинського, що стосуються фундаментальних матриць розв'язків (ФМР) еліптичних систем. У працях [1 – 5] побудовані та досліджені ФМР і нормальні ФМР загальних еліптичних систем. Ці результати застосовані Ярославом Борисовичем до дослідження можливих ізольованих особливостей розв'язків еліптичних систем. Доведено, що розв'язок еліптичної системи в околі ізольованої особливої точки виражається через похідні ФМР. Результати Я.Б.Лопатинського, які стосуються нормальних ФМР, були використані далі для доведення того, що будь-який узагальнений розв'язок еліптичної системи насправді є класичним розв'язком.

2. Праці Я.Б.Лопатинського, присвячені крайовим задачам для загальних еліптичних систем. У працях [6, 7] уперше в світовій літературі знайдено умову узгодження коефіцієнтів системи рівнянь з коефіцієнтами крайових умов, достатню для

2000 *Mathematics Subject Classification:* 35A08, 35J55, 35K50.

звідності крайової задачі загального вигляду до регулярних інтегральних рівнянь. Цю умову називають тепер *умовою Лопатинського.* У вказаних працях Я.Б.Лопатинський описав метод зведення крайової задачі в обмеженій опуклій області до системи регулярних інтегральних рівнянь за допомогою побудованих і досліджених ним потенціалів. Раніше схожий метод застосувала З.Я.Шапіро [8] для систем зі сталими коефіцієнтами у тривимірній області. Тому зазначену умову називають ще умовою Шапіро-Лопатинського.

Пізніше Я.Б. Лопатинський за допомогою розроблених ним методів досліджував задачу Діріхле для системи еліптичних рівнянь другого порядку, вивчивши розв'язність задачі, неперервну залежність розв'язків від правих частин, коефіцієнтів системи та області їх задання, властивості гладкості розв'язків аж до межі області.

У подальшому розвитку теорії еліптичних рівнянь і систем рівнянь центральним постало питання нетеровості відповідної крайової задачі. З крайовою задачею природним способом пов'язується деякий оператор у підхожих банахових просторах. Оператор називається *нетеровим*, якщо його ядро скінченновимірне, образ замкнений і має скінченну корозмірність. Доведено, що для того, щоб крайова задача для еліптичної системи була нетеровою, необхідно й досить, щоб виконувалась умова Лопатинського. Наступні дослідження виявили, що умова Лопатинського є також необхідною і достатньою для нетеровості крайової задачі для еліптичних псевдодиференціальних рівнянь.

Сформулюємо умову Лопатинського у тому вигляді, який вона має у працях [6, 7]. Розглядається крайова задача в обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ з межею S

$$A(x, \partial_x)u(x) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$\lim_{x \to y} B(x, \partial_x)u(x) = f(y), \quad y \in S, \tag{2}$$

де $A(x, \partial_x)$ – квадратна матриця порядку N, елементами якої є лінійні диференціальні вирази порядку m; $B(x, \partial_x)$ – матриця розміру $(Nm/2) \times N$, елементами k-го рядка якої є лінійні диференціальні вирази порядку $m_k < m$. Припускається, що система (1) еліптична.

Нехай A_0 і B_0 – головні за порядком диференціювання частини диференціальних виразів A і B відповідно, $\nu(y)$ – одиничний вектор внутрішньої нормалі до S у точці y, I – одинична матриця порядку N.

Умова Лопатинського: $(\forall y \in S)\ \ (\forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \ \xi \perp \nu(y))$:

$$rank \int\limits_{+} B_0(y, \xi + \lambda\nu(y))A_0^{-1}(y, \xi + \lambda\nu(y))(I, \ldots, \lambda^{m-1}I)d\lambda = Nm/2 \tag{3}$$

($\int\limits_{+}$ означає інтегрування у верхній λ-площині по простому замкненому контуру, який охоплює λ-корені рівняння

$$\det A_0(y, \xi + \lambda\nu(y)) = 0), \tag{4}$$

при цьому можна вибрати такі стовпчики цієї матриці, що відповідний мінор порядку $Nm/2$ не дорівнює нулеві для всіх y і ξ.

Пізніше було доведено, що умову (3) можна подати у такому вигляді.

Алгебраїчна умова Лопатинського: $(\forall y \in S)$ $(\forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \xi \perp \nu(y))$: рядки матриці $B_0(y, \xi + \lambda\nu(y))\widehat{A}_0(y, \xi + \lambda\nu(y))$, як λ-многочлени, лінійно незалежні за модулем λ-многочлена

$$\prod_{s=1}^{Nm/2} (\lambda - \lambda_s^+(y, \xi)), \tag{5}$$

де $\widehat{A}_0$ – матриця, взаємна до матриці A_0, $\lambda_s^+(y, \xi)$ – λ-корені рівняння (4) з додатною уявною частиною.

3. Праці Я.Б.Лопатинського з теорії інтегральних рівнянь. Праці [9 – 11] стосуються інтегральних рівнянь – як регулярних, з аналітичним ядром, так і сингулярних, які відповідають крайовій задачі для еліптичної системи в плоскій області, межа якої має кутові точки. Я.Б.Лопатинський одним з перших почав у загальній постановці досліджувати такі задачі. Він майстерно використав результати щойно створеної теорії нетерових операторів, показавши, що в деякому спеціально підібраному функційному просторі система інтегральних рівнянь, яка відповідає крайовій задачі з кутовими точками, породжує нетеровий оператор. При цьому він вказав формули для обчислення індексу такого оператора, а також формулу для радіуса Фредгольма, яку раніше іншими методами знайшов Радон.

4. Побудова і дослідження ФМР параболічних рівнянь. Результати Я.Б. Лопатинського, що стосуються ФМР еліптичних систем, стимулювали дослідження ФМР параболічних систем в першу чергу С.Д.Ейдельмана та його учнів. З 1950 р. Самуїл Давидович, який тоді працював у Чернівецькому університеті, почав регулярно спілкуватися з Я.Б.Лопатинським. С.Д.Ейдельман неодноразово згадував, що чудові праці Ярослава Борисовича та його розповіді стали для нього джерелом роздумів над різними проблемами теорії рівнянь із частинними похідними. Я.Б.Лопатинський був опонентом на захисті кандидатської дисертації С.Д.Ейдельмана в 1953 р. у Львівському університеті. Уже в цій дисертації містились перші результати побудови, дослідження і застосування ФМР параболічних систем. У пізніших працях С.Д.Ейдельмана та його учнів проведене всебічне дослідження ФМР параболічних систем, знайдені різноманітні важливі застосування цих результатів (див. [12 – 15]). Зокрема, нормальні ФМР С.Д.Ейдельман застосував до дослідження поведінки розв'язків параболічних систем в околі ізольованої особливої точки. Ці результати аналогічні до відповідних результатів Я.Б.Лопатинського і були безпосередньо стимульовані ним.

5. Параболічні крайові задачі. Найзначніший вплив дослідження Я.Б. Лопатинського мали на побудову теорії параболічних крайових задач.

Загальними крайовими задачами для параболічних за Петровським систем першого порядку за часовою змінною t вперше почав займатися Т.Я. Загорський, який починаючи з 1956 р. опублікував ряд праць і монографію [16].

У цих працях крайові задачі розглядаються в опуклих обмежених областях. Припускається, що порядки крайових диференціальних виразів менші за порядок системи. Умову розв'язності, яку мають задовольняти крайові диференціальні вирази, береться у тій самій формі, в якій вона записана у Я.Б.Лопатинського. Як і в Я.Б.Лопатинського, для доведення розв'язності загальної крайової задачі використовується теорія потенціалу, яка узагальнює теорію теплових потенціалів. Розв'язок задачі виражається у вигляді суми потенціалів, густини яких визначаються із системи інтегральних рівнянь, а ядра будуються за допомогою ядер Пуассона, тобто ядер потенціалів, які дають точний розв'язок модельних крайових задач. Щоб дослідити систему інтегральних рівнянь, треба одержати точні оцінки ядер Пуассона. Як помітив В.О.Солонников [17], при одержанні таких оцінок у [16] допущені істотні помилки в міркуваннях.

Більш загальна теорія потенціалу будується у працях С.Д.Ейдельмана (1962 – 1963 рр.) і монографії [12], а також у замітках [18, 19]. У цих працях загальна схема цієї теорії така ж, що й в Т.Я.Загорського, але кінцеві результати загальніші, ніж у [16].

У праці [18] крайові задачі для параболічних за Петровським систем першого порядку за t досліджуються у неопуклих циліндричних областях, в нециліндричних областях та в необмежених областях частинного вигляду. При цього припускається, як і в [16], що порядки крайових умов менші за порядок системи.

У вказаних працях С.Д.Ейдельмана одержані сильніші, ніж у [16], оцінки ядер Пуассона модельних крайових задач. При цьому не накладається жодних обмежень на порядки крайових умов. Дослідження ядер Пуассона С.Д.Ейдельман проводить за допомогою цікавого методу, в основі якого лежить теорема Я.Б.Лопатинського про факторизацію поліноміальних матриць [20].

У праці М.С.Аграновича й М.Й.Вишика [21] розглянуті загальні еліптичні задачі, залежні від параметра. Найважливішим частинним випадком цих задач є задачі, які виникають при перетворенні Лапласа загальних крайових задач для параболічних за Петровським систем у циліндричних областях, коли в останніх коефіцієнти не залежать від t і початкові умови нульові. На крайові диференціальні вирази накладається так звана умова доповняльності, аналогічна до умови Лопатинського. Доводяться теореми про коректну розв'язність таких задач у відповідних просторах W_2^l для досить великих за модулем значень параметра. Ці теореми використовуються для доведення відповідних теорем про коректну розв'язність загальних крайових задач для параболічних за Петровським систем у випадку, коли жодних обмежень на порядки крайових умов не накладається і виконується відповідна умова доповняльності.

У праці В.О.Солонникова [17] означається досить широкий клас параболічних систем, так званих систем, параболічних за Солонниковим. Для таких систем розглядаються загальні крайові задачі, розв'язок яких повинен задовольняти певні початкові умови при $t = 0$ і крайові умови на бічній поверхні області. Початкові умови для систем Солонникова можуть не зводитися до задання окремих функцій або їх похідних за t при $t = 0$. У загальному випадку як початкові, так і крайові умови задаються у вигляді довільних диференціальних виразів, які повинні задовольняти певні алгебраїчні умови. Для крайових виразів ця алгебраїчна умова, яка називається, як і раніше, *умовою доповняльності*, записується так само, як для еліптичних систем у вигляді (5). Вирази, що задають початкові дані, також задовольняють умову, близьку за формою до умови доповняльності.

Отже, крайова задача в циліндричній області $Q_T := (0,T] \times \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, з бічною межею Γ_T має вигляд

$$A(t, x, \partial_t, \partial_x)u = f \quad \text{на} \quad Q_T, \tag{6}$$

$$B(t, x, \partial_t, \partial_x)u = g \quad \text{на} \quad \Gamma_T, \tag{7}$$

$$C(t, x, \partial_t, \partial_x)u\Big|_{t=0} = \varphi \quad \text{на} \quad \Omega. \tag{8}$$

Основним результатом праці [17] є доведення однозначної розв'язності задачі (6) – (8) у гельдерових класах функцій і для деякого вужчого класу систем також у класах $W^{2bs,s}_{p\,x\,t}(Q_T)$. Крім того, доводяться також точні за показниками норм оцінки розв'язків. Пізніше було доведено (див., наприклад, [22]), що для правильності таких оцінок умова доповняльності є необхідною. У праці [17] розглядаються також крайові задачі в нециліндричних областях.

6. Узагальнення параболічних крайових задач. Розглянемо два найпростіші узагальнення параболічних крайових задач.

1) Параболічні задачі спряження. Нехай Q_T – циліндрична або нециліндрична область у просторі $\mathbb{R}^{n+1}$ з бічною межею Γ_T^2. Припускається, що область Q_T розділена внутрішньою гіперповерхнею Γ_T^1 на дві неперетинні підобласті Q_T^1 і Q_T^2 та в них задані параболічні за Петровським системи, взагалі кажучи, різних порядків. Задача полягає у знаходженні розв'язків цих систем, які на Γ_T^1 задовольняють загальні умови спряження, на Γ_T^2 – загальні крайові умови і при $t = 0$ – звичайні початкові умови. Отже, задача має такий вигляд

$$A^\nu u^\nu = f^\nu, \quad \nu \in \{1,2\}, \quad \sum_{\nu=1}^{2} S^\nu u^\nu \Big|_{\Gamma_T^1} = g^1,$$

$$Bu^2\Big|_{\Gamma_T^2} = g^2, \quad C_0^\nu u^\nu\Big|_{t=0} = \varphi^\nu, \quad \nu \in \{1,2\}. \tag{9}$$

Частинним випадком задачі (9), очевидно, є крайова задача в області Q_T для параболічної за Петровським системи з коефіцієнтами, які мають розриви першого роду на гіперповерхні Γ_T^1, на якій задаються умови спряження.

Задача (9) називається *параболічною задачею спряження*, якщо диференціальний вираз B зв'язаний з диференціальним виразом A^2 звичайною умовою доповняльності, а диференціальні вирази S^1 і S^2 зв'язані з диференціальними виразами A^1 і A^2 аналогічною *умовою сумісного накривання.*

Задачами вигляду (9) займалося чимало математиків. Найзагальніші результати одержані в працях М.В.Житарашу, серед яких виділимо працю [23]. У них доведено, що при відповідних припущеннях про гладкість коефіцієнтів задачі та поверхонь Γ_T^1 і Γ_T^2 виконання умов доповняльності та сумісного накривання необхідне і достатнє, щоб задача (9) була коректно розв'язною у просторах Гельдера і Соболєва-Слободецького.

2) Нелокальні параболічні крайові задачі. У праці [24] вивчена нелокальна параболічна крайова задача такого типу. Зберігаються наведені вище припущення щодо структури області Q_T, але додатково припускається, що між поверхнями Γ_T^1 і Γ_T^2 встановлено дифеоморфізм спеціального типу. В підобластях Q_T^1 і Q_T^2 задаються загальні параболічні системи. Задача полягає в знаходженні розв'язків цих систем, які при $t = 0$ задовольняють звичайні початкові умови, а на Γ_T^2 – нелокальні крайові умови. Ці умови задаються лінійними диференціальними співвідношеннями, які зв'язують значення шуканих функцій та їх похідних у точках межі Γ_T^2 з їх значеннями на межі Γ_T^1. Основною алгебраїчною умовою в цій задачі є *умова нелокального сумісного накривання* або *нелокальна умова доповняльності.*

7. Матриці Гріна параболічних задач. Я.Б.Лопатинський заохочував і всебічно підтримував дослідження матриць Гріна крайових задач, тобто ядер інтегральних операторів, за допомогою яких зображаються розв'язки задач через їхні праві частини. Таку підтримку відчували, зокрема, С.Д.Ейдельман, автор цієї статті та їхні учні, які проводили дослідження матриць Гріна параболічних крайових задач, задач спряження і нелокальних задач (див., наприклад, [25 – 29]).

ЛІТЕРАТУРА

1. Лопатинский Я.Б. *Фундаментальная система решений системы линейных дифференциальных уравнений эллиптических типа* // Докл. АН СССР – 1950. – Т. 71, №3. – С. 433 – 436.
2. Лопатинский Я.Б. *Фундаментальная система решений эллиптической системы линейных дифференциальных уравнений* // Укр. мат. журн. – 1951. – Т. 3, №1. – С. 3 – 38.
3. Лопатинский Я.Б. *Фундаментальные решения системы дифференциальных уравнений эллиптического типа* // Укр. мат. журн. – 1951. – Т. 3, №3. – С. 290 – 316.
4. Лопатинский Я.Б. *Нормальные фундаментальные решения системы линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа* // Докл. АН СССР – 1951. – Т. 78, №5. – С. 865 – 867.
5. Лопатинский Я.Б. *Поведение решений линейной эллиптической системы в окрестности изолированной особой точки* // Докл. АН СССР – 1951. – Т. 79, №5. – С. 727 – 730.
6. Лопатинский Я.Б. *Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к системе регулярных интегральных уравнений* // Докл. АН УССР – 1952. – №5. – С. 381 – 388.
7. Лопатинский Я.Б. *Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям* // Укр. мат. журн. – 1953. – Т. 5, №2. – С. 123 – 151.
8. Шапиро З.Я. *Певая краевая задача для эллиптической системы дифференциальных уравнений* // Мат. сб. – 1951. – Т. 28, №1. – С. 55 – 78.
9. Лопатинский Я.Б. *Формулы Фредгольма для систем линейных интегральных уравнений* // Научн. зап. Львов. политехн. ин-та. Сер. физ.-мат. – 1956. – Т. 38, №2. – С. 8 – 12.
10. Лопатинский Я.Б. *Интегральные уравнения с аналитическим ядром* // Научн. зап. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. – 1957. – Т. 44, №8. – С. 200 – 203.
11. Лопатинский Я.Б. *Об одном типе сингулярных интегральных уравнений* // Теор. и прикл. мат. – Львов, 1963. – Вып. 2. – С. 53 – 57.
12. Эйдельман С.Д. Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 443 с.
13. Ивасишен С.Д., Эйдельман С.Д. $\overrightarrow{2b}$*-параболичесике системы* // Тр. семинара по функц. анализу. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1968. – Вып. 1. – С. 3 – 175.
14. Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel etc: Birkhäuser, 2005. – 390 p. – (Oper. Theory: Adv. and Appl. Vol. 152).
15. Івасишен С.Д. Самуїл Давидович Ейдельман. Життєвий шлях. Основні здобутки. – Чернівці: Рута, 2006. – 87 с.
16. Загорский Т.Я. Смешанные задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа. – Львов, 1961. – 115 с.
17. Солонников В.А. *О краевых задача для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида* // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР. – 1965. – Т. 83. – С. 3 – 163.
18. Эйдельман С.Д., Липко Б.Я. *О краевых задачах для параболических систем в областях общего вида* // Докл. АН СССР – 1963. – Т. 150, №1. – С. 58 – 61.
19. Липко Б.Я., Эйдельман С.Д. *К теории параболических потенциалов* // Докл. АН СССР – 1966. – Т. 166, №5. – С. 1050 – 1053.
20. Лопатинский Я.Б. *Разложение полиномиальной матрицы на множители* // Научн. зап. Львов. политехн. ин-та. Сер. физ.-мат. – 1956. – Т. 38, №2. – С. 3 – 7.
21. Агранович М.С., Вишик М.И. *Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида* // Успехи мат. наук. – 1964. – Т. 19, №3. – С. 53 – 161.

22. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.

23. Житарашу Н.В. *Шаудеровские оценки и разрешимость общих краевых задач для общих параболических систем с разрывными коэффициентами* // Докл. АН СССР – 1966. – Т. 169, №3. – С. 511 – 514.

24. Житарашу Н.В., Эйдельман С.Д. *Об одной нелокальной параболической граничной задаче* // Мат. исследования. – Кишинев, 1970. – Т. 5, №3. – С. 83 – 100.

25. Эйдельман С.Д., Ивасишен С.Д. *Исследование матрицы Грина однородной параболической граничной задачи* // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1970. – Т. 23. – С. 179 – 234.

26. Ивасишен С.Д. Матрицы Грина параболических граничных задач. – К.: Выща школа, 1990. – 200 с.

27. Дринь М.М., Ивасишен С.Д. *Матрица Грина общей граничной задачи для параболической по И.Г.Петровскому системы с разрывными коэффициентами* // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1984. – №11. – С. 7 – 10.

28. Дринь М.М., Ивасишен С.Д. Матрицы Грина параболических задач сопряжения / Черновиц. ун-т. – Черновцы, 1984. – 95 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 07.02.85, № 252Ук-85Деп.

29. Дубровская А.П. *Об операторах Грина нелокальной параболической граничной задачи* // Операторные методы в дифференциальных уравнениях. – Воронеж, 1979. – С. 40 – 45.

Національний технічний університет
України "Київський політехнічний інститут"

Надійшло 1.12.2006