УДК 517.53

А. І. Бандура, О. Б. Скасків

ЦІЛІ ФУНКЦІЇ ОБМЕЖЕНОГО L-ІНДЕКСУ ЗА НАПРЯМКОМ

A. I. Bandura, O. B. Skaskiv. *Entire function of bounded L-index in direction*, Matematychni Studii, **27** (2007) 30–52.

A new class of entire functions of bounded L-index in direction is introduced. We obtained necessary and sufficient conditions of boundedness of L-index, relationship with a class of entire functions of bounded $\mathbf{L}$-index in sense of Bordulyak-Sheremeta's definition, sufficient conditions of boundedness of L-index in direction for entire solutions of some systems of partial differential equations, and sufficient conditions of boundedness of index for entire functions with "plane" zeros.

А. И. Бандура, О. Б. Скаскив. *Целые функции ограниченного L-индекса по направлению* // Математичні Студії. – 2007. – Т.27, №1. – С.30–52.

Рассматривается класс целых функций ограниченного L-индекса по направлению. Получены необходимые и достаточные условия принадлежности целых функций этому классу, связи с классом целых функций ограниченного $\mathbf{L}$-индекса в смысле определения Бордуляк-Шереметы, достаточные условия ограниченности L-индекса по направлению целых решений некоторых систем уравнений в частных производных, а также достаточные условия ограниченности индекса для целых функций с "плоскими" нулями.

1^0. **Вступ.** Методи дослідження властивостей цілих функцій $F(z)$ від декількох комплексних змінних $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ можна умовно розділити на декілька груп. Одна з них відштовхується від тих властивостей, які можна отримати з властивостей цілих функцій від однієї змінної, розглядаючи дану цілу функцію F, як цілу функцію за кожною змінною окремо. Серед інших методів можна виділити ті методи, що виникають при дослідженні так званих "зрізок" функції, тобто цілих функцій від однієї змінної $g(\tau) = F(a + b\tau), \tau \in \mathbb{C}$, які є звуженнями цілої функції F на довільні комплексні прямі $\{z = a + b\tau : \tau \in \mathbb{C}\}$, $a, b \in \mathbb{C}^n$. У статтях [1] – [4], в яких переноситься поняття цілої функції обмеженого l-індексу від однієї змінної на клас цілих функцій від декількох змінних, реалізується перший підхід. На цьому шляху отримано ряд аналогів теорем, що описують властивості цілих функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу, отримано критерії належності цілих функцій від декількох змінних до класу цілих функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу, встановлено обмеженість $\mathbf{L}$-індексу цілих розв'язків деяких систем лінійних диференційних рівнянь.

Разом з тим, спроби дослідити обмеженість $\mathbf{L}$-індексу деяких важливих класів цілих функцій (наприклад, канонічних добутків з "плоскими" нулями [5]) наштовхуються на технічні труднощі. При цьому вказаний підхід добре пристосований до дослідження, наприклад, цілих функцій вигляду $F(z) = f_1(z_1)f_2(z_2)\cdots f_n(z_n)$, $F(z) = f(z_1 + z_2 + \cdots + z_n)$ і т.п. У зв'язку з цим виникає природна *проблема* — розглянути і дослідити

2000 *Mathematics Subject Classification:* 30D20, 32A15, 32W50.

поняття цілої функції обмеженого L-індексу від декількох змінних, відштовхуючись від описаного вище другого підходу. Завдяки цьому негайно приходимо до поняття цілої функції обмеженого L-індексу за напрямками. У цій статті, досліджуючи властивості цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямками, отримуємо критерії належності цілих функцій до цих класів, на основі цього встановлюємо їхні зв'язки з класами цілих функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу, введеного в [1] – [4] за допомогою першого підходу, та нові умови належності цілих функцій до класу функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу. На основі цих тверджень встановлюємо достатні умови обмеженості індексу канонічних добутків з "плоскими" нулями та достатні умови обмеженості L-індексу за напрямком цілих розв'язків деяких систем рівнянь в частинних похідних.

2^0**. Основні поняття і позначення.** Вживатимемо наступні стандартні позначення: $\mathbf{K}! = k_1!k_2!\cdots k_n!$ для $\mathbf{K} = (k_1,\dots,k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$. Якщо $\mathbf{a} = (a_1,\dots,\ a_n) \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{b} = (b_1,\dots,b_n) \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{z} = (z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^n$, то використовуватимемо такі скорочені записи:

$$\mathbf{a}^{\mathbf{b}} = a_1^{b_1}a_2^{b_2}\dots a_n^{b_n},\ \ \|\mathbf{z}\| = z_1 + z_2 + \dots + z_n,\ \ |\mathbf{z}| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2}.$$

Для $\eta > 0$, $z \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{b} = (b_1,\dots,b_n) \in \mathbb{C}^n\setminus\{0\}$ і додатної неперервної функції $L:\ \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ визначимо

$$\lambda_1^{\mathbf{b}}(z,t_0,\eta) = \inf\left\{\frac{L(z+t\mathbf{b})}{L(z+t_0\mathbf{b})} : |t-t_0| \le \frac{\eta}{L(z+t_0\mathbf{b})}\right\},$$

$\lambda_1^{\mathbf{b}}(z,\eta) = \inf\{\lambda_1^{\mathbf{b}}(z,t_0,\eta) : t_0 \in \mathbb{C}\}$, $\lambda_1^{\mathbf{b}}(\eta) = \inf\{\lambda_1^{\mathbf{b}}(z,\eta) : z \in \mathbb{C}^n\}$, а також

$$\lambda_2^{\mathbf{b}}(z,t_0,\eta) = \sup\left\{\frac{L(z+t\mathbf{b})}{L(z+t_0\mathbf{b})} : |t-t_0| \le \frac{\eta}{L(z+t_0\mathbf{b})}\right\},$$

$\lambda_2^{\mathbf{b}}(z,\eta) = \sup\{\lambda_2^{\mathbf{b}}(z,t_0,\eta) : t_0 \in \mathbb{C}\}$, $\lambda_2^{\mathbf{b}}(\eta) = \sup\{\lambda_2^{\mathbf{b}}(z,\eta) : z \in \mathbb{C}^n\}$.

Клас функцій L, які для всіх $\eta \ge 0$ задовольняють умову $0 < \lambda_1^{\mathbf{b}}(\eta) \le \lambda_2^{\mathbf{b}}(\eta) < +\infty$ позначатимемо через $Q_{\mathbf{b}}^n$.

Цілу функцію $F(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, називатимемо цілою функцією *обмеженого L-індексу за напрямком* $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$, якщо існує $m_0 \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $m \in \mathbb{Z}_+$ та кожного $z \in \mathbb{C}^n$ виконується нерівність:

$$\frac{1}{m!L^m(z)}\left|\frac{\partial^m F(z)}{\partial\mathbf{b}^m}\right| \le \max\left\{\frac{1}{k!L^k(z)}\left|\frac{\partial^k F(z)}{\partial\mathbf{b}^k}\right| : 0 \le k \le m_0\right\}, \tag{1}$$

де

$$\frac{\partial^0 F(z)}{\partial\mathbf{b}^0} = F(z), \frac{\partial F(z)}{\partial\mathbf{b}} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F(z)}{\partial z_j} b_j = \langle \mathbf{grad}\ F, \overline{\mathbf{b}}\rangle, \frac{\partial^k F(z)}{\partial\mathbf{b}^k} = \frac{\partial}{\partial\mathbf{b}}\Big(\frac{\partial^{k-1}F(z)}{\partial\mathbf{b}^{k-1}}\Big), k \ge 2.$$

Найменше серед таких чисел $m_0 = m_0(\mathbf{b})$ число $N_{\mathbf{b}}(F,L) = m_0$ назвемо *L-індексом за напрямком* $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ *цілої функції* $F(z)$.

У випадку $n = 1$ наше означення перетворюється в означення цілої функції обмеженого L–індексу від однієї змінної (див.[6, 7]); у випадку $n = 1$ і $L(z) \equiv 1$ отримаємо означення цілої функції обмеженого індексу, введене Б. Лепсоном ([8]).

У випадку $\mathbf{b} = (0,\dots,0,\underbrace{1}_{j\text{–те місце}},\dots,0)$ отримаємо означення цілої функції F *рівномірно обмеженого L–індексу* за змінною z_j.

Для додатної неперервної функціії $l(z)$, $z\in\mathbb{C}$ та $z_0\in\mathbb{C}$, $\eta>0$ позначимо $\lambda_1(z_0,\eta)\equiv\lambda_1^{\mathbf{b}}(0,z_0,\eta)$ та $\lambda_2(z_0,\eta)\equiv\lambda_2^{\mathbf{b}}(0,z_0,\eta)$у випадку $z=0$, $\mathbf{b}=1$, $n=1$, $L\equiv l$, а також $\lambda_1(\eta)=\inf\{\lambda_1(z_0,\eta): z_0\in\mathbb{C}\}$, $\lambda_2(\eta)=\sup\{\lambda_2(z_0,\eta): z_0\in\mathbb{C}\}$.

Через Q позначаємо клас додатних неперервних функцій $l(z), z\in\mathbb{C}$, які задовольняють умову: $0<\lambda_1(\eta)\le\lambda_2(\eta)<+\infty$ для всіх $\eta\ge 0$. Якщо $l_j\in Q$ для всіх $j\in\{1,2,\dots,n\}$, то записуємо це так: $\mathbf{L}(z)=(l_1(z_1),\dots,l_n(z_n))\in\mathbf{Q}^n$.

Наступне означення *цілої функції обмеженого* $\mathbf{L}$*–індексу* запропоноване в [1]. Нехай $l_j(z_j)=l_j(|z_j|)$, $z_j\in\mathbb{C}$, $j\in\{1,2,\dots,n\}$, — додатні неперервні функції. Ціла функція $F(z)$, $z\in\mathbb{C}^n$, називається *функцією обмеженого* $\mathbf{L}$*-індексу,* якщо існує число $m\in\mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $z\in\mathbb{C}^n$ та $J\in\mathbb{Z}_+^n$

$$\frac{|F^{(J)}(z)|}{J!\mathbf{L}^J(z)}\le\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)}:\ K\in\mathbb{Z}_+^n,\ \|K\|\le m\right\},\tag{2}$$

де $F^{(J)}(z)=\frac{\partial^{\|J\|}F}{(\partial z_1)^{j_1}(\partial z_2)^{j_2}\cdots(\partial z_n)^{j_n}}$, $J=(j_1,j_2,\dots,j_n)$. Якщо $l_j(z_j)\equiv 1, j\in\{1,2,\dots,n\}$, то ціла функція називається *функцією обмеженого індексу.*

2^0. **Елементарні властивості L-індексу за напрямком та класу $Q^n_{\mathbf{b}}$.** Часто використовуватимемо властивості класів $Q^n_{\mathbf{b}}$, що містяться у наступній лемі.

Лема 1. *1. Якщо $L\in Q^n_{\mathbf{b}}$, то $L\in Q^n_{\theta\mathbf{b}}$ для кожного $\theta\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$.*

2. Якщо $L\in Q^n_{\mathbf{b}_1}$ і $L\in Q^n_{\mathbf{b}_2}$, то $L\in Q^n_{\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2}$ для будь-яких $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2\in\mathbb{C}^n$.

Доведення. Доведемо спочатку, що $(\forall\theta\in\mathbb{C}\backslash\{0\}): L\in Q^n_{\theta\mathbf{b}}$. Справді, за означенням

$$\lambda_1^{\theta\mathbf{b}}(z,t_0,\eta)=\inf\left\{\frac{L(z+t\theta\mathbf{b})}{L(z+t_0\theta\mathbf{b})}: |t-t_0|\le\frac{\eta}{L(z+t_0\theta\mathbf{b})}\right\}=$$
$$=\inf\left\{\frac{L(z+(t\theta)\mathbf{b})}{L(z+(t_0\theta)\mathbf{b})}: |\theta t-\theta t_0|\le\frac{|\theta|\eta}{L(z+(t_0\theta)\mathbf{b})}\right\}=\lambda_1^{\mathbf{b}}(z,\theta t_0,|\theta|\eta).$$

Тоді $\lambda_1^{\theta\mathbf{b}}(\eta)=\inf\{\lambda_1^{\theta\mathbf{b}}(z,\eta): z\in\mathbb{C}^n\}=\inf\{\inf\{\lambda_1^{\theta\mathbf{b}}(z,t_0,\eta): t_0\in\mathbb{C}\}: z\in\mathbb{C}^n\}=$
$=\inf\{\inf\{\lambda_1^{\mathbf{b}}(z,\theta t_0,|\theta|\eta): t_0\in\mathbb{C}\}: z\in\mathbb{C}^n\}=\inf\{\lambda_1^{\mathbf{b}}(z,|\theta|\eta): z\in\mathbb{C}^n\}=\lambda_1^{\mathbf{b}}(|\theta|\eta)>0,$

оскільки $L\in Q^n_{\mathbf{b}}$. Подібно доводимо, що $\lambda_2^{\theta\mathbf{b}}(\eta)=\lambda_2^{\mathbf{b}}(|\theta|\eta)<+\infty$. Отже, $L\in Q^n_{\theta\mathbf{b}}$.

Залишилося довести другу частину леми 1. Враховуючи, що

$$\lambda_1^{\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2}(z,t_0,\eta)=\inf\left\{\frac{L(z+t(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2))}{L(z+t_0(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2))}: |t-t_0|\le\frac{\eta}{L(z+t_0(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2))}\right\}\ge$$

$$\ge\inf\left\{\inf\left\{\frac{L(z+t_1\mathbf{b}_1+t_2\mathbf{b}_2)}{L(z+t_0\mathbf{b}_1+t_0\mathbf{b}_2)}: |t_1-t_0|\le\frac{\eta}{L(z+t_0(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2))}\right\}: |t_2-t_0|\le\right.$$
$$\left.\le\frac{\eta}{L(z+t_0(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2))}\right\}=$$

$$=\inf\left\{\frac{L(z+t^*\mathbf{b}_1+t_2\mathbf{b}_2)}{L(z+t_0\mathbf{b}_1+t_0\mathbf{b}_2)}: |t_2-t_0|\le\frac{\eta}{L(z+t_0(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2))}\right\}=\frac{L(z+t^*\mathbf{b}_1+t^{**}\mathbf{b}_2)}{L(z+t_0(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2))},$$

маємо

$$\lambda_1^{\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2}(z,\eta)=\inf\{\lambda_1^{\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2}(z,t_0,\eta):t_0\in\mathbb{C}\}\ge\inf\left\{\frac{L(z+t^*\mathbf{b}_1+t^{**}\mathbf{b}_2)}{L(z+t_0(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2))}:t_0\in\mathbb{C}\right\}\ge$$

$$\ge\inf\left\{\frac{L(z+t^*\mathbf{b}_1+t^{**}\mathbf{b}_2)}{L(z+t^*\mathbf{b}_1+t_0\mathbf{b}_2)}:t_0\in\mathbb{C}\right\}\inf\left\{\frac{L(z+t^*\mathbf{b}_1+t_0\mathbf{b}_2)}{L(z+t_0\mathbf{b}_1+t_0\mathbf{b}_2)}:t_0\in\mathbb{C}\right\}.$$

Звідси $\lambda_1^{\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2}(\eta)=\inf\limits_{t_0\in\mathbb{C}}\inf\limits_{z\in\mathbb{C}^n}\frac{L(z+t^*\mathbf{b}_1+t^{**}\mathbf{b}_2)}{L(z+t_0(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2))}\ge\lambda_1^{\mathbf{b}_2}(\eta)\lambda_1^{\mathbf{b}_1}(\eta)>0$. Подібно доводиться, що $\lambda_2^{\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2}(\eta)<+\infty$ для всіх $\eta\ge0$. Отже, $L\in Q^n_{\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2}$. □

Доведемо тепер декілька лем, які містять елементарні властивості цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком.

Лема 2. *Якщо $F(z)$ — ціла функція обмеженого L-індексу $N_{\mathbf{b}}(F,L)$ за напрямком $\mathbf{b}\in\mathbb{C}^n$, то для кожного $z^0\in\mathbb{C}^n$ ціла функція $g_{z^0}(t)=F(z^0+t\mathbf{b})$, $t\in\mathbb{C}$, — обмеженого l_{z^0}-індексу і $N(g_{z^0},l_{z^0})\le N_{\mathbf{b}}(F,L)$, де $l_{z^0}(t)=L(z^0+t\mathbf{b})$.*

Доведення. Нехай $z^0\in\mathbb{C}^n$ — фіксоване і $g(t)\equiv g_{z^0}(t)$, $l(t)\equiv l_{z^0}(t)$. Оскільки для всіх $p\in\mathbb{N}$

$$g^{(p)}(t)=\frac{\partial^pF(z^0+t\mathbf{b})}{\partial\mathbf{b}^p},\tag{3}$$

то за означенням обмеженості L-індексу за напрямком $\mathbf{b}\in\mathbb{C}^n$ для всіх $t\in\mathbb{C}$ і $p\in\mathbb{Z}_+$ отримуємо

$$\frac{|g^{(p)}(t)|}{p!l^p(t)}=\frac{1}{p!L^p(z^0+t\mathbf{b})}\left|\frac{\partial^pF(z^0+t\mathbf{b})}{\partial\mathbf{b}^p}\right|\le\max\left\{\frac{1}{k!L^k(z^0+t\mathbf{b})}\left|\frac{\partial^kF(z^0+t\mathbf{b})}{\partial\mathbf{b}^k}\right|:\right.$$

$$\left.0\le k\le N_{\mathbf{b}}(F,L)\right\}=\max\left\{\frac{|g^{(k)}(t)|}{k!l^k(t)}:0\le k\le N_{\mathbf{b}}(F,L)\right\}.$$

Звідси, одержуємо, що $g(t)$ - обмеженого l-індексу та $N(g,l)\le N_{\mathbf{b}}(F,L)$. Лему доведено. □

Із рівності (3) випливає, що правильне наступне твердження.

Лема 3. *Якщо $F(z)$ — ціла функція обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}\in\mathbb{C}^n$, то $N_{\mathbf{b}}(F,L)=\max\{N(g_{z^0},l_{z^0}):z^0\in\mathbb{C}^n\}$, де $g_{z^0}(t)=F(z^0+t\mathbf{b})$, $l_{z^0}(t)=L(z^0+t\mathbf{b})$, $t\in\mathbb{C}$, $N(g_{z^0},l_{z^0})$ — l_{z^0}-індекс функції $g_{z^0}(t)$.*

Легко зрозуміти також, що досить вимагати лише, щоб максимум брався по такій підмножині A точок $z^0\in\mathbb{C}^n$, що $\{z^0+t\mathbf{b}:t\in\mathbb{C},z^0\in A\}=\mathbb{C}^n$. Тобто є вірним наступне твердження.

Лема 4. *Якщо $F(z)$ — ціла функція обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}\in\mathbb{C}^n$ і j_0 таке, що $b_{j_0}\ne0$, то $N_{\mathbf{b}}(F,L)=\max\{N(g_{z^0},l_{z^0}):z^0\in\mathbb{C}^n,z^0_{j_0}=0\}$, а якщо при цьому $\|\mathbf{b}\|\ne0$, то $N_{\mathbf{b}}(F,L)=\max\{N(g_{z^0},l_{z^0}):z^0\in\mathbb{C}^n,\|z^0\|=0\}$, де $\|z^0\|=\sum_{j=1}^nz^0_j$.*

Доведення. Досить довести, що для кожного $z \in \mathbb{C}^n$ існують $z^0 \in \mathbb{C}^n$ і $t \in \mathbb{C}$ такі, що $z = z^0 + t\mathbf{b}$ і $z^0_{j_0} = 0$. Для цього візьмемо $t = z_{j_0}/b_{j_0}$, $z^0_j = z_j - t\mathbf{b}_j$, $1 \le j \le n$. Зрозуміло, що при такому виборі $z^0_{j_0} = 0$.

Щодо другої частини твердження,то,як і вище, достатньо довести, що для кожного $z \in \mathbb{C}^n$ існують $z^0 \in \mathbb{C}^n$ і $t \in \mathbb{C}$ такі, що $z = z^0 + t\mathbf{b}$ і $\|z^0\| = \sum_{j=1}^n z^0_j = 0$. Виберемо $t = \frac{1}{\|\mathbf{b}\|}\sum_{j=1}^n z_j$, де $z = (z_1, \ldots, z_p)$, а також $z^0_j = z_j - t\mathbf{b}_j$, $1 \le j \le n$. Тоді виконуватиметься наступна рівність $\|z^0\| = \sum_{j=1}^n (z_j - tb_j) = \sum_{j=1}^n z_j - \|\mathbf{b}\| t = pt - pt = 0$. Лему доведено. □

Зауважимо, що для даного $z \in \mathbb{C}^n$ вибір $z^0 \in \mathbb{C}^n$ і $t \in \mathbb{C}$ таких, що $\|z^0\| = 0$ і $z = z^0 + t\mathbf{b}$, є однозначним.

У зв'язку з лемою 4 виникає природне *запитання:* за яких мінімальних вимог на множину A справджуватиметься рівність $N_{\mathbf{b}}(F, L) = \max\{N(g_{z^0}, l_{z^0}) : z^0 \in A\}$, де $l_{z^0}(t) \equiv L(z^0 + t\mathbf{b})$.
З лем 2 – 4 безпосередньо отримуємо наступне твердження.

Теорема 1. *Ціла функція $F(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$ є функцією обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ тоді і тільки тоді, коли існує стала $M > 0$ така, що для всіх $z^0 \in \mathbb{C}^n$ функція $g_{z^0}(t) = F(z^0 + t\mathbf{b})$ є обмеженого l_{z^0}-індексу $N(g_{z^0}, l_{z^0}) \le M < +\infty$, як функція від $t \in \mathbb{C}$ ($l_{z^0}(t) \equiv L(z^0 + t\mathbf{b})$). При цьому $N_{\mathbf{b}}(F, L) = \max\{N(g_{z^0}, l_{z^0}) : z^0 \in \mathbb{C}^n\}$.*

Доведення. Необхідність випливає із леми 2.
Доведемо достатність. Оскільки, $N(g_{z^0}, l_{z^0}) \le M$, то існує $\max\{N(g_{z^0}, l_{z^0}) : z^0 \in \mathbb{C}^n\}$. Позначимо його через $N_{\mathbf{b}}(F, L) = \max\{N(g_{z^0}, l_{z^0}) : z^0 \in \mathbb{C}^n\} < \infty$. Припустимо, що $N_{\mathbf{b}}(F)$ не є L-індексом за напрямком $\mathbf{b}$ функції $F(z)$. Це означає, що існують $n^* > N_{\mathbf{b}}(F, L)$ і $z^* \in \mathbb{C}^n$ такі, що виконується нерівність

$$\frac{1}{n^*! L^{n^*}(z^*)} \frac{\left|\partial^{n^*} F(z^*)\right|}{\partial \mathbf{b}^{n^*}} > \max\Big\{\frac{1}{k! L^k(z^*)} \frac{\left|\partial^k F(z^*)\right|}{\partial \mathbf{b}^k}, 0 \le k \le N_{\mathbf{b}}(F, L)\Big\}. \tag{4}$$

Позаяк для $g_{z^0}(t) = F(z^0 + t\mathbf{b})$ виконується $g^{(p)}_{z^0}(t) = \frac{\partial^p F(z^0 + t\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}^p}$, то (4) можна переписати у вигляді

$$\frac{\left|g^{(n^*)}_{z^*}(0)\right|}{n^*! l^{n^*}_{z^*}(0)} > \max\Big\{\frac{|g^{(k)}_{z^*}(0)|}{k! l^k_{z^*}(0)} : 0 \le k \le N_{\mathbf{b}}(F, L)\Big\},$$

що неможливо (суперечить обмеженості усіх l_{z^0}-індексів $N(g_{z_0}, l_{z^0})$ сталою $N_{\mathbf{b}}(F)$). Тому $N_{\mathbf{b}}(F)$ — L-індекс за напрямком $\mathbf{b}$ функції $F(z)$. Теорему доведено. □

Із леми 4 випливає, що у теоремі 1 достатньо вимагати виконання умови:
існує $M < +\infty$ таке, що для кожного $z^0 \in \mathbb{C}^n$ такого, що $\|z^0\| = \sum_{j=1}^n z^0_j = 0$, справджується нерівність

$$N(g_{z^0}, l_{z^0}) \le M.$$

3^0. **Критерії обмеженості L-індексу за напрямком, пов'язані із поведінкою функції F.** Наступна теорема є аналогом теореми 1.1 з [7], встановленої для цілих функцій обмеженого l-індексу від однієї змінної.

Теорема 2. *Нехай $L \in Q^n_{\mathbf{b}}$. Ціла функція $F(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, є цілою функцією обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ тоді і тільки тоді, коли для кожного $\eta > 0$ існують*

$n_0 = n_0(\eta) \in \mathbb{Z}_+$ та $P_1 = P_1(\eta) \geq 1$ такі, що для кожного $t_0 \in \mathbb{C}$ та кожного $z \in \mathbb{C}^n$ існує $k_0 = k_0(t_0, z) \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq k_0 \leq n_0$, таке, що виконується нерівність

$$\max\left\{\left|\frac{\partial^{k_0} F(z+t\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}^{k_0}}\right| : |t - t_0| \leq \frac{\eta}{L(z+t_0\mathbf{b})}\right\} \leq P_1 \left|\frac{\partial^{k_0} F(z+t_0\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}^{k_0}}\right| \tag{5}$$

Доведення. Для доведення необхідності скористаємось схемою доведення необхідності із теореми 1.1 з [7], частковий варіант якої сформулюємо у вигляді наступної леми.

Лема 5. *Нехай $l \in Q$. Ціла функція $f(z), z \in \mathbb{C}$, є функцією обмеженого l-індексу тоді і тільки тоді, коли для кожного $\eta > 0$ існують числа $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ та $P_0 \geq 1$ такі, що для кожного $z_0 \in \mathbb{C}$ існує $k_0 = k_0(z_0) \in \mathbb{Z}_+$ таке, що $0 \leq k_0 \leq n_0$ і виконується нерівність*

$$\max\left\{|f^{(k_0)}(z)| : |z - z_0| \leq \frac{\eta}{l(z_0)}\right\} \leq P_0 |f^{(k_0)}(z_0)|. \tag{6}$$

Якщо тепер безпосередньо застосувати лему 5 до функції $f_z(t) = F(z + t\mathbf{b})$, як функції від t, то отримаємо, що нерівність(6) справджуватиметься з $n_0 = n_0(z, \eta) = N(f_z, l_z) = N_z$ та

$$P_0 = P_0(z, \eta) = (2(\lambda_2^{\mathbf{b}}(z, \eta))^{N_z}(\lambda_1^{\mathbf{b}}(z, \eta))^{-N_z})^{[2\eta(N_z+1)]+1}(\lambda_2^{\mathbf{b}}(z, \eta))^{N_z}$$

для кожного фіксованого $z \in \mathbb{C}^n$.

Аналіз доведення необхідності ([7], с.8–12) у лемі 5 показує, що там можна вибрати $n_0(\eta) = N_{\mathbf{b}}(F, L) \geq N(f_z, l_z)$ замість $n_0(z, \eta) = N(f_z, l_z)$ та

$$P_0(\eta) = (2(\lambda_2^{\mathbf{b}}(\eta))^N(\lambda_1^{\mathbf{b}}(\eta))^{-N[2\eta(N_{\mathbf{b}}(F)+1)]+1}\lambda_2^{\mathbf{b}}(\eta)$$

замість $P_0(z, \eta)$, де $[a]$ — ціла частина числа a. Отже, вибираючи $n_0(\eta) = N_{\mathbf{b}}(F, L) \geq N(f_z, l_z)$ замість $n_0(z, \eta) = N(f_z, l_z)$ та $P_0(\eta) = (2(\lambda_2^{\mathbf{b}}(\eta))^N(\lambda_1^{\mathbf{b}}(\eta))^{-N[2\eta(N_{\mathbf{b}}(F)+1)]+1}\lambda_2^{\mathbf{b}}(\eta)$ замість $P_0(z, \eta)$, отримаємо нерівність (5), але при цьому $n_0(\eta)$ та $P_1 = P_0(\eta)$ не залежатимуть від z, тобто необхідність умов теореми 2 доведено.

Достатність. Знову, як і вище, з (5) за лемою 5 випливає, що $f_z(t) = F(z + t\mathbf{b})$ — обмеженого l_z-індексу. Під час доведення згаданої леми отримується така оцінка індексу $N(f_z, l_z) \leq n_0 + j_0$, де j_0 таке, що $P_1 \leq \eta^{j_0}$. Отже, n_0 та j_0 у нашому випадку не залежать від z, тому $N(f_z, l_z) \leq M$ для всіх $z \in \mathbb{C}^n$. Тоді за теоремою 1, функція $F(z)$ — обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$. Теорему доведено. ☐

Нехай $L^*(z)$ — додатна неперервна функція у $\mathbb{C}^n$. Запис $L \asymp L^*$ означатиме, що для деяких $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}_+$, $0 < \theta_1 \leq \theta_2 < +\infty$ і всіх $z \in \mathbb{C}^n$ справджується нерівність $\theta_1 L(z) \leq L^*(z) \leq \theta_2 L(z)$.

Теорема 3. *Нехай $L, L^* \in Q_{\mathbf{b}}^n$, $L \asymp L^*$. Для того, щоб ціла функція $F(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, мала обмежений L^*–індекс за напрямком $\mathbf{b}$ необхідно і досить, щоб вона мала обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b}$.*

Доведення. Не важко перевірити, що якщо $L \in Q_{\mathbf{b}}^n$ і $L \asymp L^*$, то й $L^* \in Q_{\mathbf{b}}^n$. Нехай $N_{\mathbf{b}}(F, L^*) < +\infty$. Тоді за теоремою 2 для кожного $\eta^* > 0$ існують $n_0(\eta) \in \mathbb{Z}_+$ та $P_1(\eta) \geq 1$

такі, що для кожних $z \in \mathbb{C}^n$ та $t_0 \in \mathbb{C}$ і деякого k_0, $0 \le k_0 \le n_0$, виконується нерівність (5) з L^* та η^* замість L і η. Тому при $\eta * = \theta_2 \eta$

$$P_1 \left| \frac{\partial^{k_0} F(z+t_0\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}^{k_0}} \right| \ge \max \left\{ \left| \frac{\partial^{k_0} F(z+t\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}^{k_0}} \right| : |t-t_0| \le \frac{\eta^*}{L^*(z+t_0\mathbf{b})} \right\} \ge$$
$$\ge \max \left\{ \left| \frac{\partial^{k_0} F(z+t\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}^{k_0}} \right| : \ |t-t_0| \le \frac{\eta}{L(z+t_0\mathbf{b})} \right\}.$$

Тобто за теоремою 2, з огляду на довільність η^* (а, отже, й η), функція $F(z)$ має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b}$. Обернене твердження одержимо заміною L на L^*. □

Теорема 4. *Нехай $L \in Q^n_{\mathbf{b}}$, $m \in \mathbb{C}, m \neq 0$. Ціла функція $F(z), z \in \mathbb{C}^n$, є функцією обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ тоді і тільки тоді, коли $F(z)$ є обмеженого L-індексу за напрямком $m\mathbf{b}$.*

Доведення. Нехай $F(z)$ — ціла функція обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$. За теоремою 2, $(\forall \eta > 0)$ $(\exists n_0(\eta) \in \mathbb{Z}_+)$ $(\exists P_1(\eta) \ge 1)$ $(\forall t_0 \in \mathbb{C})$ $(\forall z \in \mathbb{C}^n)$ $(\exists k_0 = k_0(t_0, z) \in \mathbb{Z}_+$, $0 \le k_0 \le n_0)$, що виконується нерівність

$$\max \left\{ \left| \frac{\partial^{k_0} F(z+t\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}^{k_0}} \right| : |t-t_0| \le \frac{\eta}{L(z+t_0\mathbf{b})} \right\} \le P_1 \left| \frac{\partial^{k_0} F(z+t_0\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}^{k_0}} \right|. \tag{7}$$

Оскільки $\frac{\partial^k F}{\partial (m\mathbf{b})^k} = (m)^k \frac{\partial^k F}{\partial \mathbf{b}^k}$, то остання нерівність (7) рівносильна до нерівності

$$\max \left\{ |m|^{k_0} \left| \frac{\partial^{k_0} F(z+t\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}^{k_0}} \right| : |t-t_0| \le \frac{\eta}{L(z+t_0\mathbf{b})} \right\} \le P_1 |m|^{k_0} \left| \frac{\partial^{k_0} F(z+t_0\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}^{k_0}} \right|$$

або

$$\max \left\{ \left| \frac{\partial^{k_0} F(z+\frac{t}{m}m\mathbf{b})}{\partial (m\mathbf{b})^{k_0}} \right| : \left| \frac{t-t_0}{m} \right| \le \frac{\eta}{|m| L(z+\frac{t_0}{m}m\mathbf{b})} \right\} \le P_1 \left| \frac{\partial^{k_0} F(z+\frac{t_0}{m}m\mathbf{b})}{\partial (m\mathbf{b})^{k_0}} \right|.$$

Перепозначаючи $t^* = \frac{t}{m}, t_0^* = \frac{t_0}{m}$, $\eta^* = \frac{\eta}{|m|}$, отримуємо

$$\max \left\{ \left| \frac{\partial^{k_0} F(z+t^* m\mathbf{b})}{\partial (m\mathbf{b})^{k_0}} \right| : |t^*-t_0^*| \le \frac{\eta^*}{L(z+t_0^* m\mathbf{b})} \right\} \le P_1 \left| \frac{\partial^{k_0} F(z+t_0\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}^{k_0}} \right|.$$

Тобто за теоремою 2 з огляду на довільність η (а, отже, й η^*) функція $F(z)$ — обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$. Подібно доводиться обернене твердження. Теорему доведено. □

Теорема 4 вказує на природність терміну *обмеженість L–індексу за напрямком,* позаяк властивість обмеженості L-індексу за напрямком цілої функції не залежить від довжини вектора, а лише від самого напрямку. Хоча, при цьому величини індексів $N_{\mathbf{b}}(F, L)$ при зміні модуля вектора $\mathbf{b}$ можуть не бути навіть рівномірно обмеженими. На це вказує такий елементарний *приклад.* Розглянемо цілу функцію $F(z_1, z_2) = \exp(z_1+z_2)$, вектор $\mathbf{b} = (1, 0)$, і $L(z) \equiv 1$. Для $k \in \mathbb{N}$ отримуємо $N_{k\mathbf{b}}(F) = k-1$, позаяк $\frac{\partial^p F}{\partial (m\mathbf{b})} = m^p \exp(z_1+z_2)$ і $\frac{1}{m!} \left| \frac{\partial^m F}{\partial (m\mathbf{b})^m} \right| = \frac{m^{m-1}}{(m-1)!} |\exp(z_1+z_2)| \ge \frac{1}{p!} \left| \frac{\partial^p F}{\partial (m\mathbf{b})^p} \right|$ для $p \ge m \ge 1$. Отже, $N_{k\mathbf{b}}(F) \to +\infty$ $(k \to +\infty)$.

Оскільки у теоремі 4 $m \in \mathbb{C}$, то із обмеженості L-індексу функції за одним напрямком $\mathbf{b}$ випливає обмеженість L-індексу за напрямками, які одержуються із $\mathbf{b}$ поворотом кожної компоненти напрямку на один і той самий кут. Тобто маємо напрямок $\mathbf{b}^0 = (b_1^0, \dots, z_n^0) \in \mathbb{C}^n$, $|\mathbf{b}| = 1$, $k \in \mathbb{C}$, $|k| = 1$, тоді інші напрямки — $(kb_1^0, \dots, kb_n^0)$ —це, по суті, точки на одиничній сфері. Оскільки, ці точки одержуються, як $\mathbf{b} = k\mathbf{b}^0$, то $k = \frac{b_1}{b_1^0} = \frac{b_2}{b_2^0} = \ldots = \frac{b_n}{b_n^0}$.

Із отриманих співвідношень випливає, що множину напрямків $(kb_1^0, \dots, kb_n^0)$ можна розглядати як множину точок, отриманих внаслідок перетину одиничної n-вимірної сфери $|z| = 1$ у $\mathbb{C}^n$, кістяка полікруга $\{z : |z_j| = |b_j^0|, j = 1, 2, \dots, n\}$ та аналітичної прямої $\frac{z_1}{b_1^0} = \ldots = \frac{z_n}{b_n^0}$, яка проходить через початок координат, при чому $|\mathbf{b}^0| = |(b_1^0, \dots, b_n^0)| = 1$.

Виникає природне **запитання**: *яку найменшу множину напрямків слід узяти для того, щоб можна було описати L-індекс за усіма напрямками?*

Часткову відповідь на це запитання дає така теорема.

Теорема 5. *Ціла функція $F(z), z \in \mathbb{C}^n$ буде функцією обмеженого L-індексу за кожним напрямком у $\mathbb{C}^n$ тоді і тільки тоді, коли вона буде функцією обмеженого L-індексу за кожним напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n, |\mathbf{b}| = 1$, таким, що сума аргументів усіх компонент кожного $\mathbf{b}$ кратна 2π, тобто $\sum_{j=1}^n \arg(b_j) = 2\pi m$, де $m \in \mathbb{Z}$.*

Доведення. **Необхідність** — очевидна.

Достатність. По суті, згідно теореми 4 і наведених вище міркувань слід довести, що для кожного $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n, |z| = 1$, існують $k \in \mathbb{C}$, $|k| = 1$, та $\mathbf{b}^0 \in \mathbb{C}^n, |\mathbf{b}^0| = 1$, що $\mathbf{b} = k\mathbf{b}^\mathbf{0}$ і $\sum_{j=1}^n \arg(b_j^0) = 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Нехай $\mathbf{b} = (r_1 e^{i\varphi_1}, \dots, r_n e^{i\varphi_n}), k = e^{i\varphi^*}, \mathbf{b}^0 = (r_1^0 e^{i\varphi_1^0}, \dots, r_n^0 e^{i\varphi_n^0})$. Тоді візьмемо $r_j^0 = r_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, $\varphi^* = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \varphi_j$, а $\varphi_j^0 = \varphi_j - \varphi^*$. Звідси отримуємо, що $\sum_{j=1}^n \varphi_j^0 = \sum_{j=1}^n \varphi_j - \sum_{j=1}^n \varphi^* = 0$, при цьому $\mathbf{b} = k\mathbf{b}^0$. Враховуючи, що $|\mathbf{b}| = 1$, отримуємо $|\mathbf{b}^0| = \sum_{j=1}^n (r_1^0)^2 = \sum_{j=1}^n (r_1)^2 = 1$. Теорему доведено. □

4^0. **Оцінка максимуму модуля на більшому колі через максимум модуля на меншому колі та через мінімум модуля.** Перейдемо тепер до детальнішого вивчення поведінки цілої функції обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$. За допомогою теореми 2 доведемо такий критерій обмеженості L-індексу.

Теорема 6. *Нехай $L \in Q_\mathbf{b}^n$. Ціла у $\mathbb{C}^n$ функція $F(z)$ є функцією обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ тоді і тільки тоді, коли для довільних r_1 і r_2 таких, що $0 < r_1 < r_2 < +\infty$, існує число $P_1 = P_1(r_1, r_2) \geq 1$ таке, що для всіх $z^0 \in \mathbb{C}^n$ і $t_0 \in \mathbb{C}$ виконується*

$$\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t-t_0| = \frac{r_2}{L(z^0+t_0\mathbf{b})}\right\} \leq P_1 \max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : \ |t-t_0| = \frac{r_1}{L(z_0+t_0\mathbf{b})}\right\}. \tag{8}$$

Доведення. **Необхідність.** Нехай $N_\mathbf{b}(F, L) < +\infty$. Припустимо від супротивного, що існують числа r_1 і $r_2, 0 < r_1 < r_2 < +\infty$, такі, що для кожного $P_* \geq 1$ існують $z^* = z^*(P_*) \in \mathbb{C}^n$ і $t^* = t^*(P^*) \in \mathbb{C}$, що виконується нерівність

$$\max\left\{|F(z^*+t\mathbf{b})| : |t-t^*| = \frac{r_2}{L(z^*+t^*\mathbf{b})}\right\} > P_* \max\left\{|F(z^*+t\mathbf{b})| : \ |t-t^*| = \frac{r_1}{L(z^*+t^*\mathbf{b})}\right\}. \tag{9}$$

За теоремою 2 існують $n_0 = n_0(r_2) \in \mathbb{Z}_+$ та $P_0 = P_0(r_2) \geq 1$ такі, що для всіх $z^* \in \mathbb{C}^n$ і $t^* \in \mathbb{C}$ та деякого $k_0 = k_0(t^*, z^*) \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq k_0 \leq n_0$, виконується

$$\max\left\{\left|\frac{\partial^{k_0} F(z^* + t\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}^{k_0}}\right| : |t - t^*| = \frac{r_2}{L(z^* + t^*\mathbf{b})}\right\} \leq P_0\left|\frac{\partial^{k_0} F(z^* + t^*\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}^{k_0}}\right| \tag{10}$$

Зауважимо, що для $k_0 = 0$ доведення необхідності очевидне, позаяк із (10) випливає, що $\max\big\{|F(z^*+t\mathbf{b})| : |t-t^*| = r_2/L(z^* + t^*\mathbf{b})\big\} \leq P_0|F(z^*+t^*\mathbf{b})| \leq P_0 \max\big\{|F(z^*+t\mathbf{b})| : |t - t^*| = r_1/L(z^* + t^*\mathbf{b})\big\}$.

Вважаємо тепер, що $k_0 > 0$, і нехай

$$P_* = n_0!\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n_0}\left(P_0 + \frac{r_1}{r_2 - r_1}\right) + 1. \tag{11}$$

Припустимо, що $t_0 \in \mathbb{C}$ таке, що $|t_0 - t^*| = r_1/L(z^* + t^*\mathbf{b})$ і

$$\max\{|F(z^* + t\mathbf{b})| : |t - t^*| = r_1/L(z^* + t^*\mathbf{b})\} = |F(z^* + t_0\mathbf{b})| > 0,$$

а $t_{0j} \in \mathbb{C}$, $|t_{0j} - t^*| = r_2/L(z^* + t^*\mathbf{b})$, таке, що

$$\max\left\{\left|\tfrac{\partial^j F(z^*+t\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}^j}\right| : |t - t^*| = r_2/L(z^* + t^*\mathbf{b})\right\} = \left|\tfrac{\partial^j F(z^*+t_{0j}\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}^j}\right|, \ j \in \mathbb{Z}_+.$$

Зауважимо, що у випадку $|F(z^*+t_0\mathbf{b})| = 0$ за теоремою єдиності для всіх $t \in \mathbb{C}$ отримали б $F(z^* + t\mathbf{b}) = 0$, що суперечить нерівності (9). Тоді за нерівністю Коші

$$\frac{1}{j!}\left|\frac{\partial^j F(z^* + t^*\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}^j}\right| \leq \left(\frac{L(z^* + t^*\mathbf{b})}{r_1}\right)^j |F(z^* + t_0\mathbf{b})|, j \in \mathbb{Z}_+ \tag{12}$$

та

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^j F(z^* + t_{0j}\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}^j} - \frac{\partial^j F(z^* + t^*\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}^j}\right| = \left|\int_{t^*}^{t_{0j}} \frac{\partial^{j+1} F(z^* + t\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}^{j+1}}\,dt\right| \leq \\ \leq \left|\frac{\partial^{j+1} F(z^* + t_{0(j+1)}\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}^{j+1}}\right| \frac{r_2}{L(z^* + t^*\mathbf{b})}.\end{aligned} \tag{13}$$

Із (12) та (13) випливає, що

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^{j+1} F(z^* + t_{0(j+1)}\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}^{j+1}}\right| \geq \frac{L(z^* + t^*\mathbf{b})}{r_2}\left\{\left|\frac{\partial^j F(z^* + t_{0j}\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}^j}\right| - \left|\frac{\partial^j F(z^* + t^*\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}^j}\right|\right\} = \\ = \frac{L(z^* + t^*\mathbf{b})}{r_2}\left|\frac{\partial^j F(z^* + t_{0j}\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}^j}\right| - \frac{L(z^* + t^*\mathbf{b})}{r_2}\left|\frac{\partial^j F(z^* + t^*\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}^j}\right| \geq \\ \geq \frac{L(z^* + t^*\mathbf{b})}{r_2}\left|\frac{\partial^j F(z^* + t_{0j}\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}^j}\right| - \frac{j!L^{j+1}(z^* + t^*\mathbf{b})}{r_2(r_1)^j}|F(z^* + t_0\mathbf{b})|, j \in \mathbb{Z}_+.\end{aligned}$$

З останнього співвідношення для $k_0 \geq 1$ маємо

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^{k_0} F(z^* + t_{0k_0}\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}^{k_0}}\right| \geq \frac{L(z^* + t^*\mathbf{b})}{r_2}\left|\frac{\partial^{k_0-1} F(z^* + t_{0(k_0-1)}\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}^{k_0-1}}\right| - \\ - \frac{(k_0-1)!L^{k_0}(z^* + t^*\mathbf{b})}{r_2(r_1)^{k_0-1}}|F(z^* + t_0\mathbf{b})| \geq \ldots \geq \frac{L^{k_0}(z^* + t^*\mathbf{b})}{(r_2)^{k_0}}|F(z^* + t_{00}\mathbf{b})| - \\ - \left(\frac{0!}{(r_2)^{k_0}} + \frac{1!}{(r_2)^{k_0-1}r_1} + \ldots + \frac{(k_0-1)!}{r_2(r_1)^{k_0-1}}\right) L^{k_0}(z^* + t^*\mathbf{b}) \times \\ \times |F(z^* + t_0\mathbf{b})| = \frac{L^{k_0}(z^* + t^*\mathbf{b})}{(r_2)^{k_0}}|F(z^* + t_0\mathbf{b})|\left(\frac{|F(z^* + t_{00}\mathbf{b})|}{|F(z^* + t_0\mathbf{b})|} - \sum_{j=0}^{k_0-1} j!\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^j\right).\end{aligned} \tag{14}$$

Оскільки з (9) випливає, що $|F(z^*+t_{00}\mathbf{b})|/|F(z^*+t_0\mathbf{b})| > P_*$, то з огляду на нерівність

$$\sum_{j=0}^{k_0-1} j!\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^j \le k_0!\left(\frac{(r_2/r_1)^{k_0}-1}{r_2/r_1-1}\right) \le n_0!\frac{r_1}{r_2-r_1}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n_0},$$

скориставшись рівністю (11), отримуємо

$$\frac{|F(z^*+t_{00}\mathbf{b})|}{|F(z^*+t_0\mathbf{b})|} - \sum_{j=0}^{k_0-1} j!\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^j > P_* - n_0!\frac{r_1}{r_2-r_1}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n_0} = n_0!\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n_0} P_0 + 1.$$

З (14), враховуючи (10) та (12), випливає, що

$$\left|\frac{\partial^{k_0}F(z^*+t_{0k_0}\mathbf{b})}{\partial\mathbf{b}^{k_0}}\right| > \frac{L^{k_0}(z^*+t^*\mathbf{b})}{(r_2)^{k_0}}\left(P_* - n_0!\frac{r_1}{r_2-r_1}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n_0}\right)\left(\frac{r_1}{L(z^*+t^*\mathbf{b})}\right)^{k_0}\frac{1}{k_0!}\times$$
$$\times\left|\frac{\partial^{k_0}F(z^*+t^*\mathbf{b})}{\partial\mathbf{b}^{k_0}}\right| \ge \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n_0}\frac{1}{n_0!P_0}\left(P_* - n_0!\frac{r_1}{r_2-r_1}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n_0}\right)\left|\frac{\partial^{k_0}F(z^*+t_{0k_0}\mathbf{b})}{\partial\mathbf{b}^{k_0}}\right|.$$

Звідси, $P_* < n_0!\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n_0}\left(P_0 + \frac{r_1}{r_2-r_1}\right)$, що суперечить (11).

Достатність. У монографії [7] (теорема 1.2, с.13) встановлено наступний критерій обмеженості l-індексу для цілих функцій від однієї змінної.

Лема 6. *Нехай $l \in Q$. Ціла функція $f(z), z \in \mathbb{C}$, є функцією обмеженого l-індексу тоді і тільки тоді, коли для довільних чисел r_1 та r_2 таких, що $0 < r_1 < r_2 < +\infty$, існує $P_1(r_1,r_2) \ge 1$ таке, що для кожного $z_0 \in \mathbb{C}$ виконується нерівність*

$$\max\{|f(z)|:\ |z-z_0| = r_2/l(z_0)\} \le P_1(r_1,r_2)\max\{|f(z)|:\ |z-z_0| = r_1/l(z_0)\}.$$

За цією лемою ціла функція $g_{z^0}(t) = F(z^0+t\mathbf{b})$ — обмеженого $l_{z^0}(t) = L(z^0+t\mathbf{b})$-індексу як функція змінної $t \in \mathbb{C}$. Крім того, під час доведення згаданого твердження отримана така оцінка індексу $N(t_0, g_{z^0}, l_{z^0}) \le -\frac{\ln(1-r_1)}{\ln r_2} + \frac{\ln P_1(r_1,r_2)}{\ln r_2}$, причому це все доведено для однієї пари $0 < r_1 < r_2 < +\infty$, а під $N_{\mathbf{b}}(t_0, f, l)$ розуміється l-індекс функції f у точці t_0. Але P_1 не залежить у нас від z^0 і t_0, тому для всіх $z^0 \in \mathbb{C}^n$ та $t_0 \in \mathbb{C}$ маємо $N(t_0, g_{z^0}, l_{z^0}) \le M$, тобто $N(g_{z^0}, l_{z^0}) \le M$. А тоді за теоремою 1 $N_{\mathbf{b}}(F,L) \le M$ і F — обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$. □

Не складно помітити з доведення теореми 6, що правильна така теорема.

Теорема 7. *Нехай $L \in Q^n_{\mathbf{b}}$. Ціла в $\mathbb{C}^n$ функція $F(z)$ є функцією обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ тоді і тільки тоді, коли існують числа r_1 і r_2, $0 < r_1 < 1 < r_2 < +\infty$, та $P_1 \ge 1$ такі, що для всіх $z^0 \in \mathbb{C}^n$ та $t_0 \in \mathbb{C}$ справджується нерівність (8).*

Наведемо ще один критерій.

Теорема 8. *Нехай $L \in Q^n_{\mathbf{b}}$. Ціла функція $F(z), z \in \mathbb{C}^n$, є функцією обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ тоді і тільки тоді, коли існують $p \in \mathbb{Z}_+$ та $c > 0$, що для всіх $z \in \mathbb{C}^n$ виконується співвідношення*

$$\left|\frac{1}{L^{p+1}(z)}\frac{\partial^{p+1}F(z)}{\partial\mathbf{b}^{p+1}}\right| \le C\max\left\{\left|\frac{1}{L^k(z)}\frac{\partial^k F(z)}{\partial\mathbf{b}^k}\right|:\ 0 \le k \le p\right\} \tag{15}$$

Доведення. **Необхідність.** Якщо $N_{\mathbf{b}}(F,L)<+\infty$, то згідно означення обмеженості L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$ одержимо (15) із $p=N_{\mathbf{b}}(F,L)$ та $C=(N_{\mathbf{b}}(F,L)+1)!$, тобто необхідність нерівності (15) показано.

Достатність. Сформулюємо твердження,отримане для функцій обмеженого індексу від однієї змінної ще Хейманом і узагальнене згодом для l-індексу Шереметою і Кузиком ([7], теорема 1.6, с.21).

Лема 7. *Нехай $l\in Q$. Ціла функція $f(z), z\in\mathbb{C}$, є функцією обмеженого l-індексу тоді і тільки тоді, коли знайдуться $p\in\mathbb{Z}_+$ та $C>0$, що для всіх $z\in\mathbb{C}$*

$$\frac{|f^{(p+1)}(z)|}{l^{p+1}(z)}\leq C\max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{l^k(z)}:\ 0\leq k\leq p\right\}.$$

Застосувавши до функції $F(z^0+t\mathbf{b})$ цю лему, отримаємо, що $F(z^0+t\mathbf{b})$ — обмеженого l_{z^0}-індексу. При цьому у доведенні достатності згаданої теореми отримується нерівність $\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})|:\ |t-t_0|=2/L(z^0+t_0\mathbf{b})\right\}\leq p!4^p\exp{(3B)}\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})|:\ |t-t_0|=\right.$ $\left.=1/(2L(z^0+t_0\mathbf{b}))\right\}$, де $B=C(\lambda_2^{\mathbf{b}}(z^0,1))^{p+1}(\lambda_1^{\mathbf{b}}(z^0,1))^{-p}$. Взявши замість B, взагалі кажучи, більшу сталу $B=C(\lambda_2^{\mathbf{b}}(1))^{p+1}(\lambda_1^{\mathbf{b}}(1))^{-p}$, ми отримаємо, що $P_1=p!4^p\exp{(3B)}$ не залежить від z^0, тому за теоремою 7 $F(z)$ — обмеженого L-індексу за напрямком $b\in\mathbb{C}^n$. □

Наступна теорема дає оцінку максимуму модуля через мінімум модуля.

Теорема 9. *Нехай $L\in Q^n_{\mathbf{b}}$. Ціла функція $F(z)$ є функцією обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}\in\mathbb{C}^n$ тоді і тільки тоді, коли для кожного $R>0$ існують $P_2(R)\geq 1$ та $\eta(R)\in(0,R)$ такі, що для всіх $z^0\in\mathbb{C}^n$ і кожного $t_0\in\mathbb{C}$ та деякого $r=r(z^0,t_0)\in[\eta(R),R]$ вірна нерівність*

$$\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})|:|t-t_0|=\frac{r}{L(z^0+t_0\mathbf{b})}\right\}\leq P_2\min\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})|:\ |t-t_0|=\frac{r}{L(z^0+t_0\mathbf{b})}\right\}. \tag{16}$$

Доведення. **Необхідність.** У монографії ([7], теорема 1.4, с.17) є таке твердження.

Лема 8. *Нехай $l\in Q$. Ціла функція $f(z), z\in\mathbb{C}$, є функцією обмеженого l-індексу тоді і тільки тоді, коли для кожного $R>1$ існують числа $P_2(R)\geq 1$ та $\eta(R)\in(0,R)$ такі, що для всіх $z^0\in\mathbb{C}$ та деякого $r=r(z_0)\in[\eta(R),R]$ справджується нерівність*

$$\max\left\{|f(z)|:|z-z_0|=r/l(z_0)\right\}\leq P_2\min\left\{|f(z)|:|z-z_0|=r/l(z_0)\right\}.$$

Для кожного $z^0\in\mathbb{C}^n$, за лемою 8 для $g_{z^0}(t)=F(z^0+t\mathbf{b})$, $l_{z^0}(t)=L(z^0+t\mathbf{b})$ виконується (16), де $P_2(R)=\frac{16}{7}\frac{1}{R_N(r_N)^N}$, $\eta(R)=r_N=\frac{1}{8}R_N$, $N=N(g_{z^0},l_{z^0})$, $R_0=1$, $r_0=\frac{R}{8(R+1)}$, $R_j=\frac{R_{j-1}}{4N}(r_{j-1})^N$, $r_j=\frac{1}{8}R_j$, $j\in\{1,\ldots,N\}$.

Взявши замість $N(g_{z^0},l_{z^0})$ L-індекс за напрямком $\mathbf{b}\in\mathbb{C}^n$ $N_{\mathbf{b}}(F,L)\geq N(g_{z^0},l_{z^0})$, отримаємо шукану нерівність із $P_2^*(R)$ і $\eta^*(R)$, незалежними від z^0 (при такій заміні у нас $P_2^*(R)\geq P_2(R)$ і $\eta^*(R)\leq\eta(R)$).

Достатність. З огляду на теорему 7 досить довести, що існує число P_1 таке, що для всіх $z^0 \in \mathbb{C}^n$ та $t_0 \in \mathbb{C}$ виконується

$$\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t-t_0| = \frac{R+2}{2L(z^0+t_0\mathbf{b})}\right\} \le P_1 \max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t-t_0| = \frac{R}{4(R+1)L(z^0+t_0\mathbf{b})}\right\}. \quad (17)$$

Нехай $\widetilde{R} = R/(4(R+1))$. Тоді існують $P_2^* = P_2\big(\widetilde{R}\big)$ і $\eta = \eta\big(\widetilde{R}\big) \in \big(0, \widetilde{R}\big)$ такі, що для всіх $z^* \in \mathbb{C}^n$ і $t^* \in \mathbb{C}$ та деякого $r \in \big[\eta, \widetilde{R}\big]$ справджується

$$\max\big\{|F(z^*+t\mathbf{b})| : |t-t^*| = \frac{r}{L(z^0+t^*\mathbf{b})}\big\} \le P_2^* \min\big\{|F(z^*+t\mathbf{b})| : |t-t^*| = \frac{r}{L(z^0+t^*\mathbf{b})}\big\}. \quad (18)$$

Нехай $L^* = \max\left\{L(z^0+t\mathbf{b}) : |t-t_0| \le (R+1)/L(z^0+t_0\mathbf{b})\right\}$, $\rho_0 = R/(4(R+1)L(z^0+t_0\mathbf{b}))$, $\rho_k = \rho_0 + k\eta/L^*$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Звідси $\frac{\eta}{L^*} < \frac{R}{4(R+1)L(z^0+t_0\mathbf{b})} < \frac{R+1}{L(z^0+t_0\mathbf{b})} - \frac{R+2}{2L(z^0+t_0\mathbf{b})}$. Тому знайдеться $n^* \in \mathbb{N}$, незалежне від z^0 і t_0, таке, що $\rho_{p-1} < \frac{R+2}{2L(z^0+t_0\mathbf{b})} \le \rho_p \le \frac{R+1}{L(z^0+t_0\mathbf{b})}$ для деякого $p = p(z^0, t_0) \le n^*$, позаяк $L \in Q^n_{\mathbf{b}}$.

Нехай $c_k = \{t \in \mathbb{C} : |t-t_0| = \rho_k\}$, $|F(z^0+t_k^{**}\mathbf{b})| = \max\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : t \in c_k\}$ і t_k^* - точка перетину відрізка $[t_0, t_k^{**}]$ із колом c_{k-1}. Тоді для кожного $r > \eta$ виконується нерівність $|t_k^{**} - t_k^*| = \eta/L^* \le r/L(z^0+t_k^*\mathbf{b})$. Отже, для деякого $r \in [\eta, R/(4(R+1))]$ справджується нерівність

$$|F(z^0+t_k^{**}\mathbf{b})| \le \max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t-t_k^*| = \frac{r}{L(z^0+t_k^*\mathbf{b})}\right\} \le$$
$$\le P_2^* \min\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t-t_k^*| = \frac{r}{L(z^0+t_k^*\mathbf{b})}\right\} \le P_2^* \max\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : t \in c_{k-1}\}.$$

Звідси

$$\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t-t_0| = \frac{R+2}{2L(z^0+t_0\mathbf{b})}\right\} \le \max\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : t \in c_p\} \le$$
$$\le P_2^* \max\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : t \in c_{p-1}\} \le \ldots \le (P_2^*)^p \max\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : t \in c_0\} \le$$
$$\le (P_2^*)^{n^*} \max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t-t_0| = \frac{R}{4(R+1)L(z^0+t_0\mathbf{b})}\right\}.$$

Отримали (17) з $P_1^* = (P_2^*)^{n^*}$. Теорему доведено. □

5^0. **Логарифмічна похідна і нулі.** Введемо наступні позначення. Для фіксованого $z^0 \in \mathbb{C}^n$ через a_k^0 позначимо нулі функції $F(z^0+t\mathbf{b})$ як функції від $t \in \mathbb{C}$, тобто $F(z^0+a_k^0\mathbf{b}) = 0$, а також позначимо

$$G_r^{\mathbf{b}}(F, z^0) = \bigcup_k \left\{z^0 + t\mathbf{b} : |t-a_k^0| \le \frac{r}{|\mathbf{b}|\sqrt{n}L(z^0+a_k^0\mathbf{b})}\right\}, \quad r > 0;$$

якщо ж $(\forall\, t \in \mathbb{C}) : F(z^0+t\mathbf{b}) \ne 0$, $z^0 \in \mathbb{C}^n$, то вважаємо, що $G_r^{\mathbf{b}}(F, z^0) = \varnothing$. Нехай

$$G_r^{\mathbf{b}}(F) = \bigcup_{z^0 \in \mathbb{C}^n} G_r^{\mathbf{b}}(F, z^0). \quad (19)$$

Зауважимо, що якщо $L(z)\equiv 1$, то $G_r^{\mathbf{b}}(F)\subset\{z\in\mathbb{C}^n: dist(z,\mathbb{Z}_F)<r\}$, де $\mathbb{Z}_F$ — нульова множина функції F. Через

$$n\big(r,z^0,t_0,1/F\big)=\sum_{|a_k^0-t_0|\le r/\sqrt{n}}1$$

позначимо нормовану лічильну функцію послідовності нулів a_k^0.

Теорема 10. *Нехай $F(z)$ — ціла у $\mathbb{C}^n$ функція, $L\in Q_{\mathbf{b}}^n$ і $\mathbb{C}^n\backslash G_r^{\mathbf{b}}(F)\neq\varnothing$. $F(z)$ — функція обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}\in\mathbb{C}^n$ тоді і тільки тоді, коли виконуються такі дві умови:*

1. *Для будь-якого $r>0$ існує $P=P(r)>0$ таке, що для всіх $z\in\mathbb{C}^n\backslash G_r^{\mathbf{b}}(F)$*

$$\Big|\frac{1}{F(z)}\frac{\partial F(z)}{\partial\mathbf{b}}\Big|\le PL(z);\tag{20}$$

2. *Для будь-якого $r>0$ існує $\widetilde{n}(r)\in\mathbb{Z}_+$, що для всіх $z^0\in\mathbb{C}^n$ таких, що функція $F(z^0+t\mathbf{b})$ відмінна від тотожного нуля, та для всіх $t_0\in\mathbb{C}$*

$$n\big(r/L(z^0+t^0\mathbf{b}),z^0,t_0,\frac{1}{F}\big)\le\widetilde{n}(r).\tag{21}$$

Доведення. **Необхідність.** Спочатку доведемо, що якщо $F(z)$ — обмеженого L-індексу за напрямком, то для кожного $\widetilde{z}^0=z^0+t_0\mathbf{b}\in\mathbb{C}^n\backslash G_r^{\mathbf{b}}(F)$ $(r>0)$ та кожного $\widetilde{a}^k=z^0+a_k^0\mathbf{b}$ виконується нерівність

$$|\widetilde{z}^0-\widetilde{a}_k|>\frac{r}{2L(\widetilde{z}^0)\lambda_2^{\mathbf{b}}(\widetilde{z}^0,r/(|\mathbf{b}|\sqrt{n}))}.\tag{22}$$

Від супротивного, нехай існують $\widetilde{z}^0=z^0+t_0\mathbf{b}\in\mathbb{C}^n\backslash G_r^{\mathbf{b}}(F)$ та $\widetilde{a}^k=z^0+a_k^0\mathbf{b}$, такі, що $|\widetilde{z}^0-\widetilde{a}_k|\le\frac{r}{2L(\widetilde{z}^0)\lambda_2^{\mathbf{b}}(\widetilde{z}^0,r/(\sqrt{n}|\mathbf{b}|))}$. Тоді згідно означення $\lambda_2^{\mathbf{b}}$ отримуємо наступну оцінку $L(\widetilde{a}^k)\le\lambda_2^{\mathbf{b}}(\widetilde{z}^0,r/(|b|\sqrt{n}))L(\widetilde{z}^0)$, а тому $|\widetilde{z}^0-\widetilde{a}^k|=|\mathbf{b}|\sqrt{n}|t_0-a_k^0|\le\frac{r}{2L(\widetilde{a}^k)}$, тобто $|t_0-a_k^0|\le\frac{r}{2\sqrt{n}|\mathbf{b}|L(\widetilde{a}^k)}$ — суперечить тому, що $\widetilde{z}^0\in\mathbb{C}^n\backslash G_r^{\mathbf{b}}(F)$. По суті, у (22) замість $\lambda_2^{\mathbf{b}}(\widetilde{z}^0,r/(|\mathbf{b}|\sqrt{n}))$ можна взяти $\lambda_2^{\mathbf{b}}(r/(|\mathbf{b}|\sqrt{n}))$.

Виберемо у теоремі 9 $R=\frac{r}{2|\mathbf{b}|\sqrt{n}\lambda_2^{\mathbf{b}}(r/(|\mathbf{b}|\sqrt{n}))}$. Тоді існують $P_2\ge 1$ і $\eta\in(0,R)$ такі, що для кожного $\widetilde{z^0}=z^0+t^*\mathbf{b}\in\mathbb{C}^n$ та деякого $r_*\in[\eta,R]$ виконується (16) із r^* замість r. Тому за нерівністю Коші

$$\Big|\frac{\partial F(z^0+t^*\mathbf{b})}{\partial\mathbf{b}}\Big|\le\frac{L(z^0+t^*\mathbf{b})}{r^*}\max\Big\{|F(z^0+t\mathbf{b}):|t-t^*|=\frac{r^*}{L(z^0+t^*\mathbf{b})}\Big\}\le$$
$$\le P_2\frac{L(z^0+t^*\mathbf{b})}{\eta}\min\{|F(z^0+t\mathbf{b})|:|t-t^*|=r^*\}\tag{23}$$

Але для кожного $z^0+t^*\mathbf{b}\in\mathbb{C}^n\backslash G_r^{\mathbf{b}}(F)$, з огляду на (22), множина

$$\Big\{z^0+t\mathbf{b}:|t-t^*|\le\frac{r}{2|\mathbf{b}|\sqrt{n}\lambda_2^{\mathbf{b}}(r/(|\mathbf{b}|\sqrt{n}))L(z^0+t^*\mathbf{b})}\Big\}$$

не містить нулів. Тому, застосовуючи до $1/F$, як функції від t, принцип максимуму модуля, ми отримаємо

$$|F(z^0+t^*\mathbf{b})| \geq \min\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t-t^*| = \frac{r^*}{L(z^0+t^*\mathbf{b})}\} \tag{24}$$

Із (23) та (24) випливає (20) з $P = P_2/\eta$.

Доведемо тепер, що якщо F - обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$, то існує $P_3 > 0$ таке, що для всіх $z^0 \in \mathbb{C}^n$, всіх $t_0 \in \mathbb{C}$ і кожного $r \in (0,1]$

$$n\Big(\frac{r}{L(z^0+t_0\mathbf{b})}, z^0, t_0, 1/F\Big) \min\Big\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t-t_0| = \frac{r}{L(z^0+t_0\mathbf{b})}\Big\} \leq$$
$$\leq P_3 \max\Big\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t-t_0| = \frac{1}{L(z^0+t_0\mathbf{b})}\Big\}. \tag{25}$$

Із нерівності Коші та теореми 6 для всіх $t \in \mathbb{C}$ таких, що $|t-t_0| = 1/L(z^0+t_0\mathbf{b})$, одержуємо

$$\Big|\frac{\partial F(z^0+t\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}}\Big| \leq \frac{L(z^0+t_0\mathbf{b})}{r} \max\Big\{|F(z^0+\theta\mathbf{b})| : |\theta-t| = \frac{r}{L(z^0+t_0\mathbf{b})}\Big\} \leq$$
$$\leq \frac{L(z^0+t_0\mathbf{b})}{r} \max\Big\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t-t_0| = \frac{r+1}{L(z^0+t_0\mathbf{b})}\Big\} \leq$$
$$\leq \frac{P_1(1,r)}{r} L(z^0+t_0\mathbf{b}) \max\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t-t_0| = \frac{1}{L(z^0+t_0\mathbf{b})}\}.$$

Якщо $F(z^0+t\mathbf{b}) \neq 0$ на колі $\{t \in \mathbb{C} : |t-t_0| = r/L(z^0+t_0\mathbf{b})\}$, то

$$n\Big(\frac{r}{L(z^0+t_0\mathbf{b})}, z^0, t_0, 1/F\Big) = \Big|\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t-t_0|=r/L(z^0+t_0\mathbf{b})} \frac{\partial F(z^0+t\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}} \frac{1}{F(z^0+t\mathbf{b})} dt\Big| \leq$$
$$\leq \frac{\max\Big\{\Big|\frac{\partial F(z^0+t\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}}\Big| : |t-t_0| = r/L(z^0+t_0\mathbf{b})\Big\}}{\min\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t-t_0| = r/L(z^0+t_0\mathbf{b})\}} \frac{r}{L(z^0+t_0\mathbf{b})}.$$

Із двох останніх співвідношень отримуємо

$$n\Big(\frac{r}{L(z^0+t_0\mathbf{b})}, z^0, t_0, 1/F\Big) \min\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t-t_0| = r/L(z^0+t_0\mathbf{b})\} \leq$$
$$\leq \frac{r}{L(z^0+t_0\mathbf{b})} \max\Big\{\Big|\frac{\partial F(z^0+t\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}}\Big| : |t-t_0| = r/L(z^0+t_0\mathbf{b})\Big\} \leq$$
$$\leq \frac{1}{L(z^0+t_0\mathbf{b})} \max\Big\{\Big|\frac{\partial F(z^0+t\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}}\Big| : |t-t_0| = 1\Big\} \leq$$
$$\leq \frac{P_1(1,r)}{r} \max\Big\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t-t_0| = 1/L(z^0+t_0\mathbf{b})\Big\},$$

тобто отримали (25) з $P_3 = P_1(1,r)/r$. Якщо на колі $\{t : |t-t_0| = r/L(z^0+t_0\mathbf{b})\}$ функція $F(z^0+t\mathbf{b})$ має нулі, то нерівність (25) - очевидна.

Зараз ми візьмемо $R = 1$ у теоремі 9. Тоді існує $P_2 = P_2(1) \geq 1$ та $\eta \in (0,1)$ такі, що для всіх $z^0 \in \mathbb{C}^n$ та всіх $t_0 \in \mathbb{C}$ і деякого $r^* = r^*(z^0, t_0) \in [\eta, 1]$

$\max\big\{|F(z^0+t\mathbf{b})|:|t-t_0|=r^*/L(z^0+t_0\mathbf{b})\big\}\le P_2\min\big\{|F(z^0+t\mathbf{b})|:|t-t_0|=r^*/L(z^0+t_0\mathbf{b})\big\}.$
Крім того, за теоремою 6 існує $P_1\ge 1$ таке, що для всіх $z^0\in\mathbb{C}^n$ і всіх $t_0\in\mathbb{C}$
$\max\big\{|F(z^0+t\mathbf{b})|:|t-t_0|=1/L(z^0+t_0\mathbf{b})\big\}\le P_1(1,\eta)\max\big\{|F(z^0+t\mathbf{b})|: |t-t_0|=\eta/L(z^0+t_0\mathbf{b})\big\}\le P_1(1,\eta)\max\big\{|F(z^0+t\mathbf{b})|:|t-t_0|=r^*/L(z^0+t_0\mathbf{b})\big\}\le$
$\le P_1(1,\eta)P_2\min\{|F(z^0+t\mathbf{b})|:|t-t_0|=r^*/L(z^0+t_0\mathbf{b})\}$. Тоді, з огляду на (25),
$n\big(r^*/L(z^0+t_0\mathbf{b}),z^0,t_0,1/F\big)\min\big\{|F(z^0+t\mathbf{b})|:|t-t_0|=r^*/L(z^0+t_0\mathbf{b})\big\}\le$
$\le P_3P_1(1,\eta)P_2\min\{|F(z^0+t\mathbf{b})|:|t-t_0|=r^*/L(z^0+t_0\mathbf{b})\}$, тобто
$n\big(r^*/L(z^0+t_0\mathbf{b}),z^0,t_0,1/F\big)\le P_1(1,\eta)P_2P_3$. Тоді $n\big(r^*/L(z^0+t_0\mathbf{b}),z^0,t_0,1/F\big)\le P_4=$
$=P_1(1,\eta)P_2P_3=P_1(1,\eta)P_2(1)P_1(1,r)/r$. Якщо $r\in(0,\eta]$, то вже все доведено.

Нехай $r>\eta$ та $L_*^{z^0}=\max\{L(z^0+t\mathbf{b}):|t-t_0|=r/L(z^0+t_0\mathbf{b})\}$. Покладемо $\rho=\eta(L(z^0+t_0\mathbf{b})\lambda_2^{\mathbf{b}}(r))$ і $R=r/L(z^0+t_0\mathbf{b})$. Ми можемо покрити кожну множину $\overline{K}=\{z^0+t\mathbf{b}:|t-t_0|\le R\}$ радіуса R скінченим числом $m=m(r)$ замкнених множин $\overline{K}_j$ радіуса ρ з центрами у точках $t_j\in\overline{K}$. Тоді $\eta/(\lambda_2^{\mathbf{b}}(r)L(z^0+t_0\mathbf{b}))\le\eta/L_*^{z^0}\le\eta/L(z^0+t_j\mathbf{b})$ і у кожному $\overline{K}_j$ буде не більше за $[P_4]$ нулів функції $F(z^0+t\overline{\mathbf{b}})$. Отже, $n\big(r/L(z^0+t_0\mathbf{b}),z^0,t_0,1/F\big)\le\widetilde{n}(r)=[p_4]\,m(r)$ і властивість (21) доведено.

Достатність. Тепер, навпаки, нехай виконуються (20) та (21). За умовою (21) для всіх $R>0$ знайдеться $\widetilde{n}(R)\in\mathbb{Z}_+$ таке, що для кожної множини $\overline{K}=\{z^0+t\mathbf{b}:|t-t_0|\le R/L(z^0+t_0\mathbf{b})\}$ число нулів функції $F(z^0+t\mathbf{b})$ не перевищує $\widetilde{n}(r)$.

Покладемо $a=a(R)=R\lambda_1^{\mathbf{b}}(R)/(2(\widetilde{n}(R)+1))$.За умовою (20), існує $P=P(a)=\widetilde{P}(R)\ge 1$ таке, що $\left|\frac{\partial F(z)}{\partial\mathbf{b}}\frac{1}{F(z)}\right|\le PL(z)$ для всіх $z\in\mathbb{C}^n\backslash G_a$, тобто й для всіх $z\in\overline{K}$, розміщених зовні множин $b_k^0=\{z^0+t\mathbf{b}:\ |t-a_k^0|<a(R)(|\mathbf{b}|\sqrt{n}L(z^0+a_k^0\mathbf{b}))\}$, де a_k^0 - нулі функції $F(z^0+t\mathbf{b})$, $a_k^0\in\overline{K}$. Із означення $\lambda_1^{\mathbf{b}}$ отримуємо, що $\lambda_1^{\mathbf{b}}(R)L(z^0+t_0\mathbf{b})\le\lambda_1^{\mathbf{b}}(R,z^0)L(z^0+t_0\mathbf{b})\le L(z^0+a_k^0\mathbf{b})$. Тому $\left|\frac{1}{F(z)}\frac{\partial F(z)}{\partial\mathbf{b}}\right|\le PL(z)$ для всіх z, розміщених зовні таких множин

$$c_k^0=\left\{z^0+t\mathbf{b}:|t-a_k^0|\le\frac{a(R)}{|\mathbf{b}|\sqrt{n}\lambda_1^{\mathbf{b}}(R)L(z^0+t_0\mathbf{b})}=\frac{R}{2|\mathbf{b}|\sqrt{n}(\widetilde{n}(R)+1)L(z^0+t_0\mathbf{b})}\right\}.$$

Зрозуміло, що загальна довжина діаметрів усіх цих c_k^0 не повинна перевищувати величини $R\widetilde{n}(R)/(|\mathbf{b}|\sqrt{n}(\widetilde{n}(R)+1)L(z^0+t_0\mathbf{b}))<R/(|\mathbf{b}|\sqrt{n}L(z^0+t_0\mathbf{b}))$. Тому існує множина $\widetilde{c}^0=\{z^0+t\mathbf{b}:|t-t_0|=r/L(z^0+t_0\mathbf{b})\}$, де $\frac{R}{2|\mathbf{b}|\sqrt{n}(\widetilde{n}(R)+1)}=\eta(R)<r<\frac{R}{|\mathbf{b}|\sqrt{n}}$, така, що для всіх $z\in\widetilde{c}^0$ виконується

$$\left|\frac{1}{F(z)}\frac{\partial F(z)}{\partial\mathbf{b}}\right|\le PL(z)\le P\lambda_2^{\mathbf{b}}(r)L(z^0+t_0\mathbf{b})\le P\lambda_2^{\mathbf{b}}\big(\frac{R}{|\mathbf{b}|\sqrt{n}}\big)L(z^0+t_0\mathbf{b}).$$

Для довільних точок $z_1=z^0+t_1\mathbf{b}$ та $z_2=z^0+t_2\mathbf{b}$ із $\widetilde{c}^0$ отримуємо

$$\ln\big|F(z^0+t_1\mathbf{b})/F(z^0+t_2\mathbf{b})\big|\le\int_{t_1}^{t_2}\Big|\frac{1}{F(z^0+t\mathbf{b})}\frac{\partial F(z^0+t\mathbf{b})}{\partial\mathbf{b}}\Big||dt|\le$$
$$\le P\lambda_2^{\mathbf{b}}(R)L(z^0+t_0\mathbf{b})\frac{2r}{L(z^0+t_0\mathbf{b})}\le\ 2R\,P(R)\lambda_2^{\mathbf{b}}(R)/(|\mathbf{b}|\sqrt{n}).$$

Звідси,
$\max\{|F(z^0+t\mathbf{b})|:|t-t_0|=\frac{r}{L(z^0+t_0\mathbf{b})}\}\le P_2\min\{|F(z^0+t\mathbf{b})|:\ |t-t_0|=r/L(z^0+t_0\mathbf{b})\}$,

де $P_2=\exp(2R\,P(R)\lambda_2^{\mathbf{b}}(R))$. Отже, за теоремою 9, функція $F(z)$ – обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}\in\mathbb{C}$. Теорему доведено. $\square$

6^0. Зв'язок між обмеженістю L-індексу за напрямком та обмеженістю L-індексу у сенсі означення Бордуляк–Шеремети.

Теорема 11. *Нехай $F(z)$ — ціла функція обмеженого L-індексу за кожним з напрямків $\mathbf{b}_i \in \mathbb{C}^n$, які утворюють базис у $\mathbb{C}^n$, $L \in Q^n_{\mathbf{b}_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тоді функція $F(z)$ — обмеженого L-індексу за довільним напрямком $\mathbf{b} = \lambda_1\mathbf{b}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{b}_n$, де $\lambda_i \in \mathbb{C}$ (принаймні одне $\lambda_i \neq 0$).*

Доведення. З огляду на теорему 4 достатньо довести, що якщо F має обмежені L-індекси за напрямками $\mathbf{b}_1$ та $\mathbf{b}_2$, то вона обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$. У доведенні ми використовуємо теореми 6 і 7.

Отже, для $\mathbf{b} = \mathbf{b_1} + \mathbf{b_2}$ отримуємо $\max\big\{|F(z + t\mathbf{b})| : |t - t_0| = r_2/L(z + t_0\mathbf{b})\big\} = \max\big\{|F(z+t\mathbf{b}_1+t\mathbf{b}_2)| : |t-t_0| = r_2/L(z + t_0\mathbf{b}_1 + t_0\mathbf{b}_2)\big\} = |F(z+t^*\mathbf{b_1}+t^*\mathbf{b}_2)|$, де t^* таке, що $|t^* - t_0| = r_2/L(z + t_0\mathbf{b}_1 + t_0\mathbf{b}_2)$. За означенням класу $Q^n_{\mathbf{b}}$

$$\frac{L(z + t_0\mathbf{b}_1 + t\mathbf{b}_2)}{L(z + t_0\mathbf{b}_1 + t_0\mathbf{b}_2)} \leq \sup\left\{\frac{L(z + t_0\mathbf{b}_1 + t\mathbf{b}_2)}{L(z + t_0\mathbf{b}_1 + t_0\mathbf{b}_2)} : |t - t_0| \leq \frac{r_2}{L(z + t_0\mathbf{b}_1 + t_0\mathbf{b}_2)}\right\} \leq \lambda_2^{\mathbf{b}}(r_2)$$

для всіх $t \in \mathbb{C}$ таких, що $|t - t_0| \leq r_2/L(z + t_0\mathbf{b}_1 + t_0\mathbf{b}_2)$, а тому $L(z + t_0\mathbf{b}_1 + t_0\mathbf{b}_2) \geq L(z + t_0\mathbf{b}_1 + t^*\mathbf{b}_2)/\lambda_2^{\mathbf{b}}(r_2)$.

Звідси, використовуючи теорему 6, з обмеженості L-індексу за напрямком $\mathbf{b}_1$ одержуємо

$$|F(z + t^*\mathbf{b}_1 + t^*\mathbf{b}_2)| \leq \max\left\{|F(z + t^*\mathbf{b}_2 + t\mathbf{b}_1)| : |t - t_0| = \frac{r_2}{L(z + t_0\mathbf{b}_1 + t_0\mathbf{b}_2)}\right\} \leq$$
$$\leq \max\left\{|F(z + t^*\mathbf{b}_2 + t\mathbf{b}_1)| : |t - t_0| = \frac{r_2\lambda_2^{\mathbf{b}}(r_2)}{L(z + t_0\mathbf{b}_1 + t^*\mathbf{b}_2)}\right\} \leq$$
$$\leq P_1 \max\left\{|F(z + t^*\mathbf{b}_2 + t\mathbf{b}_1)| : |t - t_0| = \frac{r_1}{L(z + t_0\mathbf{b}_1 + t^*\mathbf{b}_2)}\right\} = P_1|F(z+t^{**}\mathbf{b}_1+t^*\mathbf{b}_2)|,$$

де $t^{**} \in \mathbb{C}$ таке, що $|t^{**} - t_0| = r_1/L(z + t_0\mathbf{b}_1 + t^*\mathbf{b}_2)$, а $P_1 = P_1(r_1, \lambda_2^{\mathbf{b}}(r_2)r_2)$ – стала з теореми 6.

Оскільки, для $t \in \mathbb{C}$ таких, що $|t - t_0| = r_2/L(z + t_0\mathbf{b}_1 + t_0\mathbf{b}_2)$ справджується нерівність $L(z + t_0\mathbf{b}_1 + t\mathbf{b}_2) \geq \lambda_1^{\mathbf{b}}(r_2)L(z + t_0\mathbf{b}_1 + t_0\mathbf{b}_2)$, в тому числі й для t^*, то отримуємо $L(z + t_0\mathbf{b}_1 + t^*\mathbf{b}_2) \geq \lambda_1^{\mathbf{b}}(r_2)L(z + t_0\mathbf{b}_1 + t_0\mathbf{b}_2)$. Тому

$$\sup\left\{\frac{L(z + t_0\mathbf{b}_1 + t\mathbf{b}_2)}{L(z + t_0\mathbf{b}_1 + t_0\mathbf{b}_2)} : |t - t_0| \leq \frac{r_1}{L(z + t_0\mathbf{b}_1 + t^*\mathbf{b}_2}\right\} \leq$$
$$\leq \sup\left\{\frac{L(z + t_0\mathbf{b}_1 + t\mathbf{b}_2)}{L(z + t_0\mathbf{b}_1 + t_0\mathbf{b}_2)} : |t - t_0| \leq \frac{r_1}{\lambda_1^{\mathbf{b}}(r_2)L(z + t_0\mathbf{b}_1 + t_0\mathbf{b}_2)}\right\}.$$

Звідси, $L(z + t\mathbf{b}_1 + t_0\mathbf{b}_2) \leq \lambda_2^{\mathbf{b}}\big(r_1/\lambda_1^{\mathbf{b}}(r_2)\big)L(z + t_0\mathbf{b}_1 + t_0\mathbf{b}_2)$ для всіх $t \in \mathbb{C}$ таких, що $|t - t_0| = r_1/L(z + t_0\mathbf{b}_1 + t^*\mathbf{b}_2)$, в тому числі й для $t = t^{**}$.
Отже, $L(z + t_0\mathbf{b}_1 + t_0\mathbf{b}_2) \geq L(z + t^{**}\mathbf{b}_1 + t_0\mathbf{b}_2)/\lambda_2^{\mathbf{b}}(r_1/\lambda_1^{\mathbf{b}}(r_2))$. Тому,

$$\max\left\{|F(z + t\mathbf{b}_1 + t\mathbf{b}_2)| : |t - t_0| = \frac{r_2}{L(z + t_0\mathbf{b}_1 + t_0\mathbf{b}_2)}\right\} \leq P_1(r_1, r_2\lambda_2^{\mathbf{b}}(r_2))\times$$
$$\times|F(z + t^{**}\mathbf{b}_1 + t^*\mathbf{b}_2)| \leq P_1(r_1, r_2\lambda_2^{\mathbf{b}}(r_2)) \max\Big\{|F(z + t^{**}\mathbf{b}_1 + t\mathbf{b}_2)| : |t - t_0| =$$

$$= \frac{r_2}{L(z+t_0\mathbf{b}_1+t_0\mathbf{b}_2)}\Big\} \le P_1(r_1, r_2\lambda_2^{\mathbf{b}}(r_2)) \max\Big\{|F(z+t^{**}\mathbf{b}_1+t\mathbf{b}_2)| : |t-t_0| =$$
$$= \frac{\lambda_2^{\mathbf{b}}(r_1/\lambda_1^{\mathbf{b}}(r_2))r_2}{L(z+t^{**}\mathbf{b}_1+t_0\mathbf{b}_2)}\Big\} \le P_1(r_1, \lambda_2^{\mathbf{b}}(r_2)r_2)P_1(r_1, \lambda_2^{\mathbf{b}}(r_1/\lambda_1^{\mathbf{b}}(r_2))r_2)\times$$
$$\times \max\Big\{|F(z+t^{**}\mathbf{b}_1+t\mathbf{b}_2)| : |t-t_0| = \frac{r_1}{L(z+t_0\mathbf{b}_2+t^{**}\mathbf{b}_1)}\Big\} = P_1(r_1, \lambda_2^{\mathbf{b}}(r_2)r_2)\times$$
$$\times P_1(r_1, \lambda_2^{\mathbf{b}}(r_1/\lambda_1^{\mathbf{b}}(r_2))r_2)|F(z+t^{**}\mathbf{b}_1+t^{***}\mathbf{b}_2)|.$$

Але $|t^{**}\mathbf{b}_1+t^{***}\mathbf{b}_2-t_0(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2)| \le |\mathbf{b}_1|\,|t^{**}-t_0|+|\mathbf{b}_2|\,|t^{***}-t_0| \le r_1|\mathbf{b}_1|/L(z+t_0\mathbf{b}_1+t^{*}\mathbf{b}_2)+$ $+\, r_2|\mathbf{b}_2|/L(z+t_0\mathbf{b}_2+t^{**}\mathbf{b}_1)$. Як і вище, можна довести, що $L(z+t_0\mathbf{b}_2+t^{**}\mathbf{b}_1) \ge$ $\ge \lambda^{\mathbf{b}}(r_1/\lambda_1^{\mathbf{b}}(r_2))L(z+t_0\mathbf{b}_2+t_0\mathbf{b}_1)$ та $L(z+t_0\mathbf{b}_1+t^{*}\mathbf{b}_2) \ge \lambda_1^{\mathbf{b}}(r_2)L(z+t_0\mathbf{b}_1+t_0\mathbf{b}_2)$. Звідси,

$$|t^{**}\mathbf{b}_1+t^{***}\mathbf{b}_2-t_0(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2)| \le \frac{r_1}{L(z+t_0\mathbf{b}_1+t_0\mathbf{b}_2)}\left(\frac{|\mathbf{b}_1|}{\lambda_1^{\mathbf{b}}(r_2)}+\frac{|\mathbf{b}_2|}{\lambda_1^{\mathbf{b}}(r_1/\lambda_1^{\mathbf{b}}(r_2))}\right).$$

Отже,

$$\max\Big\{|F(z+(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2)t)| :\ |t-t_0| = \frac{r_2}{L(z+t_0(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2))}\Big\} \le$$
$$\le P_1(r_1, \lambda_2^{\mathbf{b}}(r_2)r_2)P_1(r_1, \lambda_2^{\mathbf{b}}(r_1/\lambda_1^{\mathbf{b}}(r_2))r_2)\times$$
$$\times \max\Big\{|F(z+(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2)t)| :\ |t-t_0| = \frac{r_1}{L(z+t_0(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2))}\Big(\frac{|\mathbf{b}_1|}{\lambda_1^{\mathbf{b}}(r_2)}+\frac{|\mathbf{b}_2|}{\lambda_1^{\mathbf{b}}(r_1/\lambda_1^{\mathbf{b}}(r_2))}\Big)\Big\}. \tag{26}$$

Оскільки $\lambda_1^{\mathbf{b}}(r)$ незростаюча функція від r, то $\lambda_1^{\mathbf{b}}(r_1/\lambda_1^{\mathbf{b}}(r_2)) \ge \lambda_1^{\mathbf{b}}(r_2/\lambda_2^{\mathbf{b}}(r_2))$ для $r_1 < r_2$. Вибираючи $r_1 < \min\big\{1,\ r_2,\ r_2\big/\big(|\mathbf{b}_1|/\lambda_1^{\mathbf{b}}(r_2)+|\mathbf{b}_2|/\lambda_1^{\mathbf{b}}(r_2/\lambda_1^{\mathbf{b}}(r_2))\big)\big\}$ з (26) отримаємо нерівність

$$\max\Big\{|F(z+(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2)t)| :\ |t-t_0| = \frac{r_2}{L(z+(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2)t_0)}\Big\} \le$$
$$\le P_1(r_1, \lambda_2^{\mathbf{b}}(r_2)r_2)P_1(r_1, \lambda_2^{\mathbf{b}}(r_1/\lambda_1^{\mathbf{b}}(r_2))r_2)\times$$
$$\times \max\Big\{|F(z+(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2)t)| :\ |t-t_0| = \frac{r_1'}{L(z+(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2)t_0)}\Big\}, \tag{27}$$

де $r_1' = r_1\big(|\mathbf{b}_1|/\lambda_1^{\mathbf{b}}(r_2)+|\mathbf{b}_2|/\lambda_1^{\mathbf{b}}(r_2/\lambda_1^{\mathbf{b}}(r_2))\big) < r_2$ за вибором r_1. Оскільки з (27) випливає, що виконуються умови теореми 7, звідси отримуємо обмеженість L-індексу функції $F(z)$ за напрямком $\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2$. □

Нехай $L \in \mathbf{Q}^n$. Припустимо, що існують такі функції $l_i(z_i) \in Q$, що для всіх $z \in \mathbb{C}^n$ $L(z_1,\ldots,z_n) \le \min\{l_i(z_i) : i = 1,2,\ldots,n\}$. У цьому випадку через $\widetilde{\mathbf{L}}(z)$ позначатимемо вектор-функцію $\widetilde{\mathbf{L}}(z) = (l_1(z_1), l_2(z_2),\ldots,l_n(z_n))$. За цих припущень правильна така теорема.

Теорема 12. *Нехай $L \in Q^n_{\mathbf{b}_i}$, $\{\mathbf{b}_i\}$ утворюють базис у $\mathbb{C}^n$, ціла функція $F(z)$ — обмеженого L-індексу за кожним напрямком $\mathbf{b}_i$, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, $\widetilde{\mathbf{L}}(z)$ — така, як визначена вище. Тоді $F(z)$ — обмеженого $\widetilde{\mathbf{L}}$-індексу за сукупністю змінних (тобто у сенсі означення Бордуляк-Шеремети).*

Доведення. На основі доведення достатності теореми 3 із обмеженості L-індексу функції $F(z)$ за напрямком $\mathbf{b}_i$ випливає обмеженість $l_i(z_i)$-індексу за напрямком $\mathbf{b}_i$. За теоремою 11 отримуємо, що $F(z)$ — обмеженого $l_i(z_i)$-індексу за напрямками $e_i = (0,\ldots,0,\underbrace{1}_{i\text{–те місце}},0\ldots,0)$.

У кадидатській дисертації М.Т. Бордуляк([11], твердження 3.1, с.80) доведено наступне твердження.

Лема 9. *Нехай $\mathbf{L}\in\mathbf{Q}^n$(тобто кожне $l_i(z_i)\in Q$). Якщо ціла функція $f(z)$, $z\in\mathbb{C}^n$, є функцією рівномірно обмеженого l_i-індексу за кожною змінною z_i, то вона обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних (у сенсі Бордуляк-Шеремети).*

Тепер залишилося застосувати це твердження до функції $F(z)$ і ми отримаємо потрібний висновок. □

Звідси при $L(z)\equiv 1$ отримуємо безпосередньо такий наслідок.

Наслідок 1. *Якщо ціла функція $F(z)$, $z\in\mathbb{C}^n$, має обмежений індекс за кожним напрямком $\mathbf{b}_i$ та $\{\mathbf{b}_i\}$ утворюють базис у $\mathbb{C}^n$, $i\in\{1,\ldots,n\}$, то вона має обмежений індекс за сукупністю змінних (тобто у сенсі означення Бордуляк-Шеремети).*

7^0. **Обмеженість L-індексу за напрямком цілих розв'язків деяких систем рівнянь з частинними похідними.**

Спершу розглянемо таке рівняння з частинними похідними.

$$g_0(z)\frac{\partial^p w}{\partial\mathbf{b}^p}+g_1(z)\frac{\partial^{p-1}w}{\partial\mathbf{b}^{p-1}}+\ldots+g_p(z)w=h(z) \tag{28}$$

Для нього правильна така теорема.

Теорема 13. *Нехай $L\in Q^n_{\mathbf{b}}$, $g_0(z),\ldots,g_p(z),h(z)$ — цілі функції обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}\in\mathbb{C}^n$ і для кожного $r>0$ знайдеться $T=T(r)>0$ таке, що для кожного $z\in\mathbb{C}^n\backslash G^{\mathbf{b}}_r(g_0)$ та $j=1,\ldots,n$ справджується нерівність*

$$|g_j(z)|\le TL^j(z)|g_0(z)|. \tag{29}$$

Тоді ціла функція $F(z)$, $z\in\mathbb{C}^n$, яка задовольняє рівняння (28) є функцією обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$. (Зауважимо, що $G^{\mathbf{b}}_r(g_0)$ раніше визначено у (19)).

Доведення. Для кожного $z^0\in\mathbb{C}^n$ правильне таке твердження ([7], теорема 5.1, с.88).

Лема 10. *Нехай $l\in Q$ і $g_0,g_1,\ldots,g_p,h$ — цілі функції обмеженого l-індексу, для кожного $r>0$ існує $T=T(r)>0$ таке, що для всіх $z\in\mathbb{C}\backslash G_r(g_0)$ та для $j=1,2,\ldots,p$ справджується $|g_j(z)|\le Tl^j(z)|g_0(z)|$, де $G_r(g_0)=\bigcup_k\left\{z\in\mathbb{C}:|z-a_k|\le\frac{r}{l(a_k)}\right\}$ і a_k — нулі функції g_0. Тоді ціла функція f, яка задовольняє рівняння*

$$g_0(z)w^{(p)}+g_1(z)w^{(p-1)}+\ldots+g_p(z)w=h(z)$$

є функцією обмеженого l-індексу.

Отже за лемою 10, функція $g(z^0+t\mathbf{b})$ матиме обмежений $L(z^0+t\mathbf{b})$-індекс, як функція змінної t. Але при доведенні теореми 5.1 ([7]) висновок про обмеженість індексу для однієї змінної робиться на основі того, що в кінці доведення отримують нерівність

$$\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t-t_0| = \frac{r+2}{2L(z^0+t_0\mathbf{b})}\right\} \le P_1 \max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : \right.$$
$$\left. |t-t_0| = \frac{1}{(r+1)L(z^0+t_0\mathbf{b})}\right\}, \tag{30}$$

де $P_1 = n!(r+1)^n 2^n \exp(3\pi(r+1)P_4)$, $P_4 = P_3\lambda_2^{\mathbf{b}}(z^0,t_0,1)\left(\lambda_2^{\mathbf{b}}(z^0,t_0,1)/\lambda_1^{\mathbf{b}}(z^0,t_0,1)\right)^n$, а P_3 визначається як $P_3 = T^*((T^*+1)(r+1)+r)$. Взявши $\lambda_1^{\mathbf{b}}(1)$ замість $\lambda_1^{\mathbf{b}}(z^0,t_0,1)$, $\lambda_2^{\mathbf{b}}(1)$ замість $\lambda_2^{\mathbf{b}}(z^0,t_0,1)$ ми тільки збільшимо P_1. Залишилося встановити, як визначається стала T^* і що її теж можна зробити незалежною від z^0 і t_0. Для цього сформулюємо таку лему.

Лема 11. *Нехай $F(z)$ — ціла функція обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}\in\mathbb{C}^n$. Тоді для кожного $r>0$ та кожного $m\in\mathbb{N}$ існує $P=P(r,m)>0$ таке, що для всіх $z\in\mathbb{C}^n\backslash G_r^{\mathbf{b}}(F)$ виконується $\left|\frac{\partial^m F(z)}{\partial\mathbf{b}^m}\right| \le PL^m(z)|F(z)|$, де $G_r^{\mathbf{b}}(F)$ раніше визначено у (19).*

Доведення. До функції $F(z^0+t\mathbf{b})$ можна застосувати відповідну лему з одновимірного випадку ([7], лема 5.1, с.87). Ми отримаємо відповідну нерівність із $P=P_2 m!\eta^{-m}$. Але P_2 і η визначаються за лемою 8 ([7], теорема 1.4, с.17), тобто замість цієї теореми можна застосувати її n-вимірний аналог — теорему 9. Отже, існують P_2 і η незалежні від z^0 і t_0, що й доводить твердження. □

Повертаючись до доведення теореми 13, зауважимо, що з леми 11 та нерівності (29) випливає, що для кожного $r>0$ знайдеться $T^*=T^*(r)>0$ таке, що для всіх $z\in\mathbb{C}^n\backslash G_r^{\mathbf{b}}$ (у нас $G_r^{\mathbf{b}} = G_r^{\mathbf{b}}(h)\bigcup(\bigcup_{j=1}^n G_r^{\mathbf{b}}(g_j))$) вірні наступні нерівності $|h'(z)| \le T^*|h(z)|L(z)$, $|g_j(z)| \le T^*|g_0(z)|L^j(z)$, $|g_j'(z)| \le T^*|g_0(z)|L^{j+1}(z)$.

Отже, з викладеного вище, отримуємо, що P_1 у (30) не залежить від z^0 і t_0. А тоді з цієї нерівності за теоремою 6 випливає, що функція $F(z)$ — обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$. □

Розглянемо тепер таку систему РЧП.

$$\left\{\begin{array}{c} a_{10}(z)F(z)+a_{11}(z)\frac{\partial F}{\partial b_1}+\ldots+a_{1p}(z)\frac{\partial^p F}{\partial b_1^p} = h_1(z), \\ \ldots \\ a_{n0}(z)F(z)+a_{n1}(z)\frac{\partial F}{\partial b_n}+\ldots+a_{np}(z)\frac{\partial^p F}{\partial b_n^p} = h_n(z), \end{array}\right. \tag{31}$$

З теореми 13 одержуються наслідки, які дають достатні умови обмеженості $\widetilde{L}$-індексу у сенсі означення Бордуляк-Шеремети.

Наслідок 2. *Нехай $a_{ji}(z)$, $h_j(z)$ — цілі функції обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}_j\in\mathbb{C}^n$, $L\in Q^n_{\mathbf{b}_j}$, $j=1,2,\ldots,n$, $i=1,2,\ldots,p$, $z\in\mathbb{C}^n$. При цьому для кожного $r>0$ та деякої сталої $M=M(r)>0$ і всіх $z\in\mathbb{C}^n\backslash G_r^{\mathbf{b}_j}(a_{jp})$ (у нас $G_r^{\mathbf{b}_j}(a_{jp})$ визначається аналогічно, як і $G_r^{\mathbf{b}}(g_0)$ у 19) виконуються нерівності $|a_{ji}(z)| \le M|a_{jp}(z)|L^{p-i}(z)$. Якщо $F(z)$ — цілий розв'язок системи (31), то $F(z)$ — обмеженого $\widetilde{\mathbf{L}}$-індексу за сукупністю змінних (у сенсі означення Бордуляк-Шеремети), де $\widetilde{\mathbf{L}}(z)$ така ж, як і у теоремі 12.*

Доведення. Застосовуючи окремо до кожного із рівнянь системи попередню теорему 13 отримуємо, що функція $F(z)$ — обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}_j \in \mathbb{C}^n$. А тоді за теоремою 12 випливає, що $F(z)$ — обмеженого $\widetilde{\mathbf{L}}$-індексу у сенсі означення Бордуляк-Шеремети. □

Наслідок 3. *Нехай $a_{ji}(z)$, $h_j(z)$ — цілі функції обмеженого $l_j(z_j)$ -індексу за напрямком $\mathbf{b}_j = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{j-\text{те місце}}, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^n$, $l_j \in Q^n_{\mathbf{b}_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $i = 1, 2, \ldots, p$, $z \in \mathbb{C}^n$. Нехай для кожного $r > 0$ та деякої сталої $M = M(r) > 0$ і всіх $z \in \mathbb{C}^n \backslash G^{\mathbf{b}_j}_r(a_{jp})$ (у нас $G^{b_j}_r(a_{jp})$ визначається аналогічно, як і $G^b_r(g_0)$ у 19) виконуються нерівності $|a_{ji}(z)| \leq M|a_{jp}(z)| l^{p-i}_j(z_j)$. Якщо $F(z)$ — цілий розв'язок системи (31), то $F(z)$ — обмеженого $\widetilde{\mathbf{L}}$-індексу за сукупністю змінних (у сенсі означення Бордуляк-Шеремети), де $\widetilde{L}(z) = (l_1(z_1), \ldots, l_n(z_n))$.*

Наслідок доводиться подібно до попереднього наслідку.

8^0. **Достатні умови обмеженості індексу для цілих функцій з "плоскими" нулями.** За допомогою доведеної вище теореми 10 можна встановлювати достатні умови обмеженості індексу для окремих класів цілих функцій декількох комплексних змінних. Нижче такі умови знайдено для цілих функцій з "плоскими" нулями. Вони є певним багатовимірним аналогом достатніх умов обмеженості l-індексу для цілих функцій, зображуваних канонічними добутками Вейєрштрасса (див. [10, 12]).

Нехай F ціла функція в $\mathbb{C}^n$ *нульового роду з "плоскими" нулями* ([5]), тобто функція вигляду

$$F(z) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \langle z, a^k |a^k|^{-2} \rangle), \tag{32}$$

де (a^k), $a^k \in \mathbb{C}^n$, – послідовність нульового роду, тобто така, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1/|a^k| < +\infty, \tag{33}$$

а $\langle a, b \rangle = \sum_{j=1}^n a_j \overline{b}_j$ для $a, b \in \mathbb{C}^n$. Відомо, що умова (33) (див. [5]) забезпечує рівномірну і абсолютну збіжність добутку (32) на компактах з $\mathbb{C}^n$. Вважаємо послідовність (a^k) впорядкованою так, що $|a^k| \leq |a^{k+1}|$ $(k \geq 1)$. Правильна така теорема.

Теорема 14. *Нехай $F(z)$ - ціла в $\mathbb{C}^n$ функція нульового роду з "плоскими" нулями. Якщо послідовність a^k задовольняє умови:*

1. *$|a^{k+1}| - |a^k| > 2|\mathbf{b}| q_0$ для деякого $q_0 > 0$ і всіх $k \geq 1$;*
2. *$a^k_j = m_j |a^k|$ для всіх $k \geq 1$;*
3. *$\sum_{k=1}^{s-1} \frac{1}{|a^s| - |a^k|} = O(1), s \to +\infty$;*
4. *$\sum_{k=s+2}^{+\infty} \frac{1}{|a^k| - |a^s|} = O(1), s \to +\infty$;*

то $F(z)$ – ціла функція обмеженого індексу за кожним напрямком $\mathbf{b}$.

Доведення. Зауважимо, що для функції $F(z_0 + t\mathbf{b})$ нулями будуть $t_k = \frac{|a^k|^2 - \langle z^0, a^k \rangle}{\langle \mathbf{b}, a^k \rangle}$ (у випадку $\langle \mathbf{b}, a^k \rangle = 0$ отримуємо, що $F(z^0 + t\mathbf{b}) \equiv 0$). Введемо позначення $\widetilde{w} =$

$(m_1, m_2, ..., m_n)$, де $m_j \in \mathbb{C}$ визначені в умові 2. Виберемо $q_1 \in (0, |\mathbf{b}|q_0)$. Тоді справджується нерівність $n(q_1, z^0, t_0, 1/F) \leq 1$ для довільних $z^0 \in \mathbb{C}^n, t_0 \in \mathbb{C}$. Від супротивного, нехай $|t_k - t_0| \leq q_1$ і $|t_l - t_0| \leq q_1$, $k < l$. Тоді

$$|t_k - t_0| = \left|\frac{|a^k|^2 - \langle z^0 + t_0\mathbf{b}, a^k\rangle}{\langle \mathbf{b}, a^k\rangle}\right| \geq \frac{|\,|a^k|^2 - \langle z^0 + t_0\mathbf{b}, a^k\rangle|}{|\mathbf{b}||a^k|}.$$

Звідси отримуємо, що

$$\left||a^k| - \langle z^o + t_0\mathbf{b}, \frac{a^k}{|a^k|}\rangle\right| \leq |\mathbf{b}|q_1 \Longrightarrow \left||a^k| - \left|\langle z^o + t_0\mathbf{b}, \frac{a^k}{|a^k|}\rangle\right|\right| \leq |\mathbf{b}|q_1 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \left|\langle z^o + t_0\mathbf{b}, \frac{a^k}{|a^k|}\rangle\right| - |\mathbf{b}|q_1 \leq |a^k| \leq \left|\langle z^o + t_0\mathbf{b}, \frac{a^k}{|a^k|}\rangle\right| + |\mathbf{b}|q_1.$$

Подібно, $\left|\langle z^0 + t_0\mathbf{b}, \frac{a^l}{|a^l|}\rangle\right| - |\mathbf{b}|q_1 \leq |a^l| \leq \left|\langle z^0 + t_0\mathbf{b}, \frac{a^l}{|a^l|}\rangle\right| + |\mathbf{b}|q_1$ або

$$|\langle z^0 + t_0\mathbf{b}, \widetilde{m}\rangle| - |\mathbf{b}|q_1 \leq |a^k| \leq |\langle z^0 + t_0\mathbf{b}, \widetilde{m}\rangle| + |\mathbf{b}|q_1$$

і

$$|\langle z^0 + t_0\mathbf{b}, \widetilde{m}\rangle| - |\mathbf{b}|q_1 \leq |a^l| \leq |\langle z^0 + t_0\mathbf{b}, \widetilde{m}\rangle| + |\mathbf{b}|q_1.$$

Звідси

$$|a^l| - |a^n| \leq 2|\mathbf{b}|q_1. \tag{34}$$

Але з умови $|a^{k+1}| - |a^k| > 2|\mathbf{b}|q_0$ випливає, що

$$|a^{k+2}| - |a^k| = |a^{k+2}| - |a^{k+1}| + |a^{k+1}| - |a^k| > 4|\mathbf{b}|q_0 > 2|\mathbf{b}|q_0,$$

і

$$|a^l| - |a^k| > 2|\mathbf{b}|q_0 > 2|\mathbf{b}|q_1 (k < l) \tag{35}$$

- суперечність з (34). Тому $n(q_1, z^0, t_0, 1/F) \leq 1$ для всіх $z^0 + t_0\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$.

Кожну замкнену кулю радіуса q можна покрити скінченним числом $m(q_1, q)$ замкнених куль радіуса q_1. Отже, одержимо $n(q, z^0, t_0, 1/F) \leq 2m(q_1, q)$, тобто умова 2 теореми 10 виконується.

Зауважимо, що

$$\frac{1}{F(z)}\frac{\partial F(z)}{\partial \mathbf{b}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-\langle \overline{a}^k, \mathbf{b}\rangle/|a^k|^2}{1 - \frac{\langle z, a^k\rangle}{|a^k|^2}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\langle \overline{a}^k, \mathbf{b}\rangle}{\langle z, a^k\rangle - |a^k|^2}$$

і

$$\left|\frac{1}{F(z)}\frac{\partial F(z)}{\partial \mathbf{b}}\right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\langle \overline{a}^k, \mathbf{b}\rangle|}{|\langle z, a^k\rangle - |a^k|^2|} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\mathbf{b}||a^k|}{|\langle z, a^k\rangle - |a^k|^2|}. \tag{36}$$

Достатньо довести, що виконується умова 1 теореми 10 для $q \leq q_0$. Введемо позначення $\widetilde{q} = |\mathbf{b}|q$,

$$A_k = \{z \in \mathbb{C}^n : ||\langle z, \widetilde{m}\rangle| - |a^k|| \leq \widetilde{q}, |\langle z, \widetilde{m}\rangle - |a^k|| \geq \widetilde{q}\},$$
$$B_k = \{z \in \mathbb{C}^n : |a^k| + \widetilde{q} \leq |\langle z, \widetilde{m}\rangle| \leq |a^{k+1}| + \widetilde{q}\}, n \geq 1.$$

За допомогою (35) і (36), враховуючи умови 3 і 4 теореми, для $z \in A_k$ отримуємо

$$\left|\frac{1}{F(z)}\frac{\partial F(z)}{\partial \mathbf{b}}\right| \leq |\mathbf{b}|\left(\sum_{k=1}^{s-1}\frac{1}{|\langle z,\widetilde{m}\rangle|-|a^k|}+\frac{1}{|\langle z,\widetilde{m}\rangle-|a^s||}+\sum_{k=s+1}^{+\infty}\frac{1}{|a^k|-|\langle z,\widetilde{m}\rangle|}\right)\leq$$

$$\leq |\mathbf{b}|\left(\sum_{k=1}^{s-1}\frac{1}{|a^s|-|a^k|-\widetilde{q}}+\frac{1}{\widetilde{q}}+\sum_{k=s+1}^{+\infty}\frac{1}{|a^k|-|a^s|-\widetilde{q}}\right)\leq$$

$$\leq |\mathbf{b}|\left(\sum_{k=1}^{s-1}\frac{1}{|a^s|-|a^k|-\frac{|a^s|-|a^k|}{2}}+\frac{2}{\widetilde{q}}+\sum_{k=s+2}^{+\infty}\frac{1}{|a^k|-|a^s|-\frac{|a^k|-|a^s|}{2}}\right)=$$

$$=2|\mathbf{b}|\left(\sum_{k=1}^{s-1}\frac{1}{|a^s|-|a^k|}+\frac{1}{\widetilde{q}}+\sum_{k=s+2}^{+\infty}\frac{1}{|a^k|-|a^s|}\right)=2|\mathbf{b}|\left(O(1)+\frac{1}{\widetilde{q}}+O(1)\right)=$$

$$=O(1), s\longrightarrow+\infty,$$

тобто для $z \in A_k$ виконується $\left|\frac{\partial F(z)}{\partial \mathbf{b}}\frac{1}{F(z)}\right| \leq P(q)$.

Якщо ж $z \in B_k$, то, використовуючи умови (3) і (4) цієї ж теореми 14, отримуємо

$$\left|\frac{1}{F(z)}\frac{\partial F(z)}{\partial \mathbf{b}}\right| \leq |\mathbf{b}|\left(\sum_{k=1}^{s-1}\frac{1}{|\langle z,\widetilde{m}\rangle|-|a^k|}+\frac{1}{|\langle z,\widetilde{m}\rangle|-|a^s|}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{|a^{s+1}|-|\langle z,\widetilde{m}\rangle|}+\frac{1}{|a^{s+2}|-|\langle z,\widetilde{m}\rangle|}+\sum_{k=s+3}^{+\infty}\frac{1}{|a^k|-|\langle z,\widetilde{m}\rangle|}\right)\leq$$

$$\leq \mathbf{b}\left(\sum_{k=1}^{s-1}\frac{1}{|a^s|-|a^k|+\widetilde{q}}+\frac{3}{\widetilde{q}}+\sum_{k=s+3}^{+\infty}\frac{1}{|a^k|-|a^{s+1}|+\widetilde{q}}\right)\leq$$

$$\leq |\mathbf{b}|\left(\sum_{k=1}^{s-1}\frac{1}{|a^s|-|a^k|}+\frac{3}{\widetilde{q}}+\sum_{k=s+3}^{+\infty}\frac{1}{|a^k|-|a^{s+1}|}\right)\leq$$

$$\leq |\mathbf{b}|\left(O(1)+\frac{3}{\widetilde{q}}+O(1)\right)=O(1), s\longrightarrow+\infty.$$

Розглянемо тепер такі z, що $|\langle z,\widetilde{m}\rangle| \leq |a^1|-\widetilde{q}$. Для них отримуємо

$$\left|\frac{1}{F(z)}\frac{\partial F(z)}{\partial \mathbf{b}}\right| \leq |\mathbf{b}|\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{||\langle z,\widetilde{m}\rangle|-|a^k||}\leq |\mathbf{b}|\left(\frac{1}{|a^1|}+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{|a^k|-|a^1|+\widetilde{q}}\right)\leq$$

$$\leq\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{|a^k|-|a^1|}+\frac{1}{|a^1|}\right)=O(1),$$

позаяк виконується умова (33).

Отже, для всіх $z \in A=\bigcup_k(A_k\bigcup B_k)\bigcup\{z:|\langle z,\widetilde{m}\rangle|\leq|a^1|-\widetilde{q}\}$:

$$\left|\frac{1}{F(z)}\frac{\partial F(z)}{\partial \mathbf{b}}\right| \leq P(q).$$

Вище доведено, що $|t_k-t_0|<q \Longrightarrow |\langle z^0+t_0\mathbf{b},\widetilde{m}\rangle-|a^k||<|\mathbf{b}|q$, і тому $A\supset\mathbb{C}^n\backslash G_q^{\mathbf{b}}$.

Отже, виконуються усі умови теореми 10. Звідси випливає, що $F(z)$ - обмеженого індексу за напрямком $\mathbf{b}$. Теорему доведено. $\square$

З теореми 14 отримуємо такий очевидний наслідок.

Наслідок 4. *Якщо $F(z)$ — ціла функція нульового роду з "плоскими" нулями і для неї виконуються умови 1, 2, 3, 4 теореми 14, то $F(z)$ — ціла функція обмеженого індексу в сенсі означення Бордуляк-Шеремети.*

ЛІТЕРАТУРА

1. *Бордуляк М. Т., Шеремета М. М. Обмеженість* L*-індексу цілої функції багатьох змінних* // Доп. НАН України. – 1993, №9. – С.10–13.
2. *Бордуляк М.Т.* Обмеженість **L**-індексу цілої функції багатьох комплесних змінних // Львів.ун-т, Львів, 1992. – 37 с. – Деп. в УкрІНТЕІ 17.12.92, №2006. – Ук-92.
3. *Бордуляк М.Т.* Про цілі в $\mathbb{C}^n$ функції обмеженого L-індексу// Львів.ун-т, Львів, 1994. – 22 с. – Деп. в ДНТБ України 25.08.94, №1790 – Ук-94.
4. *Бордуляк М.Т. Простір цілих в* $\mathbb{C}^n$ *функцій обмеженого* L*-індексу* // Матем. студії. – 1995. – Вип. 4. – С.53–58.
5. *Папуш Д. Е.О росте целых функций с «плоскими» нулями* // Теория функций, функц. анализ и их прилож. (Харьков) – 1987. – Вып.48. – С.117–125.
6. *Кузык А. Д., Шеремета М. Н. Целые функции ограниченного* l*-распределения значений* // Матем. заметки. – 1986. – Т 39, №1. – С.3–13.
7. *Sheremeta M. M.* Analytic functions of bounded index. – Lviv: VNTL Publishers, 1999. – 141 pp.
8. *Lepson B.Differential equations of infinite order, hyperdirichlet series and entire functions of bounded index* // Proc. Sympos. Pure Math. V.2. – Amer. Math. Soc.: Providence, Rhode Island. – 1968. – P.298–307.
9. *Fricke G. H., Shah S. M. On bounded value distribution and bounded index* // J. of Nonlinear Anal.: Theory, Meth. and Appl. – 1978. – Vol.2, №4. – P.423–435.
10. *Chyzhykov I. E., Sheremeta M. M. Boundedness of* l*-index for entire functions of zero genus* // Матем. студії. – 2001. – Т.16, №2. – С.124–130.
11. *Бордуляк М.Т.* Обмеженість **L**-індексу цілих функцій багатьох комплесних змінних. – Дис. ... канд. фіз.-мат. наук: Львів, 1996. – 120 с.
12. *Гольдберг А.А., Шеремета М.М. Про обмеженість* l*-індексу канонічних добутків* // Укр.матем.вісник. – 2005. – Т.2, №1. – С.52–54.

Львівський національний університет імені Івана Франка
механіко-математичний факультет
matstud@franko.lviv.ua

Надійшло 31.05.2006