УДК 517.51

В. К. Маслюченко, В. В. Михайлюк, О. І. Філіпчук

# ТОЧКИ СУКУПНОЇ НЕПЕРЕРВНОСТІ НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ В ПЛОЩИНІ НЕМИЦЬКОГО

V. K. Maslyuchenko, V. V. Mykhaylyuk, O. I. Filipchuk. *Joint continuity points of separately continuous mappings with the values in the Nemytsky plane*, Matematychni Studii, **26** (2006) 217–221.

Let $X$ be a topological space, $Y$ be a first countable topological space, $\mathbb{P}$ be the Nemytsky plane and $f\colon X\times Y\to\mathbb{P}$ be a separately continuous mapping. It is shown that for each $y\in Y$ the set $C_y(f)$ of all points $x\in X$ such that $f$ is jointly continuous at $(x,y)$, is residual in $X$. We provide an example of a separately continuous mapping $f_0\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{P}$ which is discontinuous at each point $(x,x)$.

В. К. Маслюченко, В. В. Михайлюк, О. И. Филипчук. *Точки совокупной непрерывности раздельно непрерывных отображений со значениями в плоскости Немыцкого* // Математичні Студії. – 2006. – Т.26, №2. – С.217–221.

Доказано, что у каждого раздельно непрерывного отображения $f\colon X\times Y\to\mathbb{P}$ произведения топологического пространства $X$ и топологического пространства $Y$ с первой аксиомой счетности со значениями в плоскости Немыцкого $\mathbb{P}$ для каждого $y\in Y$ множество $C_y(f)$ всех точек $x\in X$, таких, что $f$ непрерывна в точке $(x,y)$ по совокупности переменных, является остаточным в $X$. Приведен пример раздельно непрерывного отображения $f_0\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{P}$, которое разрывно в каждой точке $(x,x)$.

**1.** У статтях [1-4] досліджувалась множина $C(f)$ точок сукупної неперервності нарізно неперервних відображень $f\colon X\times Y\to Z$ та їхніх аналогів зі значеннями в $\sigma$-метризовних просторах $Z$. При цьому в загальному випадку встановлено лише залишковість множини $C(f)$ в $X\times Y$, в той час, коли для сильно $\sigma$-метризовних просторів $Z$ отримані результати про залишковість множин $C_y(f)=\{x\in X:(x,y)\in C(f)\}$ і $C_Y(f)=\{x\in X:\{x\}\times Y\subseteq C(f)\}$.

Площина Немицького ([5, с.47]), яку ми позначаємо символом $\mathbb{P}$, є $\sigma$-метризовним, але не сильно $\sigma$-метризовним простором ([6, п.4]). Тому виникло природне *питання* про вивчення множини $C(f)$ для нарізно неперервних відображень $f\colon X\times Y\to\mathbb{P}$. Як з'ясувалося, у цьому випадку виникають нові цікаві явища.

У цій статті ми доводимо, що для кожного нарізно неперервного відображення $f\colon X\times Y\to\mathbb{P}$ добутку топологічного простору $X$ і топологічного простору $Y$, який задовольняє першу аксіому зліченності, у площину Немицького, множина $C_y(f)$ буде залишковою в $X$ для кожного $y\in Y$. Разом з тим, при $X=Y=\mathbb{R}$ існує нарізно неперервне відображення $f_0\colon X\times Y\to\mathbb{P}$, у якого $C_Y(f_0)=\varnothing$. Зауважимо, що для нарізно

2000 *Mathematics Subject Classification:* 54C08, 26B05.

неперервних дійснозначних функцій $f\colon X\times Y\to\mathbb{R}$ такі приклади були можливі лише для "великого" простору $Y$. Зокрема, в [7] це зроблено, коли $X=\mathbb{R}$ і $Y$ — топологічна сума континууму числових прямих, а у [8] — за досить загальних умов, які виконуються, наприклад, у випадку $X=\mathbb{R}$, $Y=l_\infty$. Додамо ще, що попередні версії сформульованих вище результатів анонсовано в [9].

**2.** Нагадаємо, що топологічна структура на площині Немицького $\mathbb{P}=\mathbb{P}_1\cup\mathbb{P}_2$, де $\mathbb{P}_1=\mathbb{R}\times\{0\}$ і $\mathbb{P}_2=\mathbb{R}\times(0,+\infty)$, вводиться так: базою околів точки $p_0=(x_0,y_0)\in\mathbb{P}_2$ служать круги $K_r[p_0]=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<r^2\}$ з $0<r<y_0$, а точки $p_0=(x_0,0)\in\mathbb{P}_1$ — круги $K_r[p_r]$, де $p_r=(x_0,r)$ і $0<r<+\infty$. Очевидно, що $\mathbb{P}$ задовольняє першу аксіому зліченності. Зрозуміло також, що топологічна структура на $\mathbb{P}$, індукована з евклідової площини $\mathbb{R}^2$, мажорується топологічною структурою площини Немицького. Підпростір $\mathbb{P}_2$ площини Немицького є відкритим і індукована з $\mathbb{P}$ топологія на ньому збігається з топологією, індукованою з $\mathbb{R}^2$. Підпростір $\mathbb{P}_1$ площини Немицького є дискретним, і кожна одноточкова множина $\{(x,0)\}$ є відкритою і замкненою в $\mathbb{P}_1$. Підпростір $\mathbb{P}_2$ є метризовним, сама ж площина Немицького $\mathbb{P}$ подається у вигляді об'єднання зростаючої послідовності своїх замкнених метризовних підпросторів $Z_n=\{(x,y):x\in\mathbb{R}\quad\text{і}\quad y\geq\frac{1}{n}\quad\text{або}\quad y=0\}$, отже, є $\sigma$-метризовним простором, але не метризовним, бо $\mathbb{P}$ не є нормальним простором [5, с.47]. Більше того, як зауважено вище, $\mathbb{P}$ навіть не є сильно $\sigma$-метризовним. Проте, $\mathbb{P}$ є регулярним і навіть цілком регулярним топологічним простором.

**3.** Нехай $X$, $Y$, $Z$ — топологічні простори і $p_0=(x_0,y_0)\in X\times Y$. Відображення $f\colon X\times Y\to Z$ називаємо *горизонтально квазінеперервним у точці* $p_0$, якщо для довільного околу $W$ точки $z_0=f(p_0)$ в $Z$ і довільних околів $U$ і $V$ точок $x_0$ та $y_0$ у просторах $X$ та $Y$ відповідно існують точка $p_1=(x_1,y_1)\in U\times V$ і окіл $U_1$ точки $x_1$ в $X$, такі, що $U_1\subseteq U$ і $f(U_1\times\{y_1\})\subseteq W$. Відображення $f$ є *горизонтально квазінеперервним*, якщо воно є таким в кожній точці добутку $X\times Y$. Символом $K_hC(X\times Y,Z)$ ми позначаємо сукупність всіх горизонтально квазінеперервних відображень $f\colon X\times Y\to Z$, які неперервні відносно другої змінної, а символом $CC(X\times Y,Z)$ — сукупність нарізно неперервних відображень $f\colon X\times Y\to Z$. Для відображення двох змінних $f\colon X\times Y\to Z$ ми покладаємо $f^x(y)=f_y(x)=f(x,y)$.

Нам буде потрібна наступна властивість горизонтально квазінеперервних відображень ([3, лема 2]). Перед її формулюванням зазначимо, що символ $\overline{A}$ означає замикання множини $A$, а символ $\operatorname{int}A$ — її внутрішність.

**Лема 1.** *Нехай $X$, $Y$, $Z$ — топологічні простори, $f\colon X\times Y\to Z$ — горизонтально квазінеперервне відображення, $U$ і $V$ — відкриті множини в $X$ та $Y$ відповідно, $A\subseteq X$ і $U\subseteq\overline{A}$. Тоді $f(U\times V)\subseteq\overline{f(A\times V)}$.*

**4.** Перейдемо до розгляду основних результатів. Нагадаємо, що підмножина топологічного простору називається *залишковою* в ньому, якщо її доповнення є множиною першої категорії, тобто подається у вигляді об'єднання послідовності ніде не щільних у даному просторі множин.

**Теорема 1.** *Нехай $X$ — топологічний простір, $Y$ — топологічний простір, $Z$ — регулярний простір, $f\in K_hC(X\times Y,Z)$, $y_0$ — точка простору $Y$, яка має в ньому зліченну базу околів, $f(X\times\{y_0\})=\{z_0\}$ і $z_0$ має зліченну базу околів у $Z$. Тоді множина $C_{y_0}(f)$ є залишковою в $X$.*

*Доведення.* Припустимо спочатку, що простір $X$ берівський. Нехай $\{V_m : m \in \mathbb{N}\}$ і $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ — бази околів точок $y_0$ та $z_0$ в $Y$ та $Z$ відповідно, причому околи $W_n$ замкнені в $Z$. Приймемо $A_{n,m} = \{x \in X : f^x(V_m) \subseteq W_n\}$. З неперервності відображення $f$ за другою змінною негайно випливає, що для кожного $n \in \mathbb{N}$

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} A_{n,m} = X.$$

Покладемо далі $U_{n,m} = \operatorname{int} \overline{A_{n,m}}$, $G_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} U_{n,m}$ і $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Оскільки простір $X$ берівський, то множини $G_n$ відкриті і скрізь щільні в $X$. Зрозуміло, також, що множина $E$ є всюди щільною в берівському просторі $X$. До того ж, вона є $G_\delta$-множиною. Тому множина $E$ є залишковою в $X$.

Залишається довести, що $E \subseteq C_{y_0}(f)$. Нехай $x_0 \in E$ і $n \in \mathbb{N}$. Оскільки $x_0 \in G_n$, то існує такий номер $m$, що $x_0 \in U_{n,m}$. Покладемо для спрощення записів $W = W_n$, $V = V_m$, $U = U_{n,m}$ і $A = A_{n,m} \cap U$. Оскільки $U \subseteq \overline{A_{n,m}}$ і множина $U$ відкрита, то $A \subseteq U \subseteq \overline{A}$. Тоді $f(U \times V) \subseteq \overline{f(A \times V)}$ за лемою 1. З означення множин $A_{n,m}$ негайно випливає, що $f(A \times V) \subseteq W$. Отже, остаточно $f(U \times V) \subseteq \overline{f(A \times V)} \subseteq \overline{W} = W$, тобто $f(U \times V) \subseteq W$. Оскільки $U \times V$ — окіл точки $p_0$ в добутку $X \times Y$, то останнє включення показує, що $p_0 \in C(f)$, звідки випливає, що $x_0 \in C_{y_0}(f)$.

Нехай тепер $X$ — довільний топологічний простір. Тоді за теоремою Банаха про категорію [10, с. 87] в $X$ існує берівське ядро $T$ — такий відкритий підпростір, який є берівським простором в індукованій з $X$ топології і залишковою множиною в $X$. Покладемо $g = f|_{T \times Y}$. Оскільки підпростір $T$ відкритий в $X$, то $g \in K_hC(T \times Y, Z)$. За доведеним вище множина $C_{y_0}(g)$ залишкова в $T$, а отже, і в $X$. Але $C_{y_0}(g) \subseteq C_{y_0}(f)$, отже, $C_{y_0}(f)$ є залишковою в $X$ множиною. $\square$

**5.** У цьому пункті за допомогою теореми 1 встановимо умови, за яких нарізно неперервні відображення $f\colon X \times Y \to \mathbb{P}$ мають *властивість Вестона*, яка полягає в тому, що для кожного $y \in Y$ множина $C_y(f)$ є залишковою в $X$. При цьому ми будемо використовувати таке просте твердження.

**Лема 2.** *Нехай $(G_s)_{s \in S}$ — диз'юнктна сім'я відкритих множин $G_s$ у топологічному просторі $X$, така, що множина $G = \bigcup_{s \in S} G_s$ є залишковою в $X$ і $(E_s)_{s \in S}$ — сім'я підмножин $X$, така, що $E_s \subseteq G_s$ і $E_s$ є залишковою в $G_s$ для кожного $s \in S$. Тоді множина $E = \bigcup_{s \in S} E_s$ залишкова в $X$.*

*Доведення.* Нехай $A_s = G_s \setminus E_s$ для кожного $s \in S$ і $A = G \setminus E$. За умовою для кожного $s$ існує послідовність ніде не щільних в $G_s$ множин $A_{s,n}$, така, що $A_s = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{s,n}$. Нехай $A_n = \bigcup_{s \in S} A_{s,n}$. Для кожного $n$ множина $A_n$ ніде не щільна в $X$. Справді, нехай $U$ — відкрита множина у просторі $X$ і $U \cap G \neq \varnothing$. Тоді існує такий індекс $t \in S$, що перетин $U_t = U \cap G_t \neq \varnothing$. Множина $U_t$ відкрита в $G_t$. Оскільки множина $A_{t,n}$ ніде не щільна в $G_t$, то існує така відкрита непорожня множина $V$ в $G_t$, що $V \subseteq U_t$ і $V \cap A_{t,n} = \varnothing$. Але за умовою $G_t \cap G_s = \varnothing$ при $s \neq t$. Тому $V \cap A_{s,n} = \varnothing$ і при $s \neq t$. Отже, $V \cap A_n = \varnothing$. Крім того, $V \subseteq U$ і $V$ відкрита непорожня множина в $X$, що і дає нам ніде не щільність множин $A_n$ в $X$. Оскільки $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, то $A$ — множина першої категорії в $X$. Але $X \setminus E = (X \setminus G) \cup A$. Отже, $X \setminus E$ — це множина першої категорії в $X$, тобто множина $E$ залишкова в $X$. $\square$

**Теорема 2.** *Нехай $X$ і $Y$ — топологічні простори, $y_0 \in Y$, причому $y_0$ має зліченну базу околів в $Y$, $f \in CC(X \times Y, \mathbb{P})$. Тоді множина $C_{y_0}(f)$ залишкова в $X$.*

*Доведення.* Нехай $j\colon \mathbb{P} \to \mathbb{R}^2$ — тотожне вкладення площини Немицького $\mathbb{P}$ в евклідову площину $\mathbb{R}^2$ і $g = j \circ f$. Зрозуміло, що $g \in CC(X \times Y, \mathbb{R}^2)$, бо вкладення $j$ неперервне. Евклідова площина $\mathbb{R}^2$ є метризовним простором. Тому за відомим твердженням з [11] множина $C_{y_0}(g)$ є залишковою в $X$. Оскільки функція $f_{y_0}\colon X \to \mathbb{P}$ неперервна і множина $\mathbb{P}_2$ відкрита в $\mathbb{P}$, то множина $G = f_{y_0}^{-1}(\mathbb{P}_2)$ відкрита в $X$. Нехай $A = C_{y_0}(g) \cap G$. Зрозуміло, що $A$ залишкова в $G$, бо множина $G$ відкрита. Зрозуміло, що $A \subseteq C_{y_0}(g) \cap G$, але $C_{y_0}(g) \cap G \subseteq C_{y_0}(f)$, бо $f(G \times \{y_0\}) \subseteq \mathbb{P}_2$ і топології, які індукуються на $\mathbb{P}_2$ з просторів $\mathbb{P}$ і $\mathbb{R}^2$, збігаються. Отже, $A \subseteq C_{y_0}(f)$.

Нехай далі $H = X \setminus \overline{G}$. Зрозуміло, що множина $H$ — відкрита в $X$ і $f_{y_0}(H) \subseteq \mathbb{P}_1$. Тоді звуження $h = f_{y_0}|_H$ відображає множину $H$ у дискретний підпростір $\mathbb{P}_1$ площини Немицького і, зрозуміло, є неперервним. В такому разі, для кожного $z \in \mathbb{R}$ прообраз $H_z = h^{-1}(\{(z, 0)\})$ є відкритою множиною в $H$, а отже, і в $X$. Крім того, $H_{z'} \cap H_{z''} = \varnothing$, якщо $z' \neq z''$ і $H = \bigsqcup_{z \in \mathbb{R}} H_z$. Для $z \in \mathbb{R}$ покладемо $\varphi_z = f|_{H_z \times Y}$. Зрозуміло, що $\varphi_z \in CC(H_z \times Y, \mathbb{P})$, причому $\varphi_z(H_z \times \{y_0\}) = \{(z, 0)\}$. Тому за теоремою 1 множина $B_z = C_{y_0}(\varphi_z)$ залишкова в $H_z$.

Покладемо $B = \bigcup_{z \in \mathbb{R}} B_z$. Оскільки множини $H_z$ відкриті в $X$, то $B_z \subseteq C_{y_0}(f)$ для кожного $z$, тобто $B \subseteq C_{y_0}(f)$.

Нехай $E = A \cup B$. Оскільки $X \setminus (G \cup H) = \overline{G} \setminus G$ і множина $\overline{G} \setminus G$ ніде не щільна в $X$, то множина $G \cup H$ залишкова в $X$. Тому за лемою 2 і множина $E$ буде залишковою в $X$. Але $E \subseteq C_{y_0}(f)$, отже, і множина $C_{y_0}(f)$ є залишковою в $X$. □

Наступний результат негайно випливає з теореми 2.

**Теорема 3.** *Нехай $X$ — топологічний простір, $Y$ — топологічний простір з першою аксіомою зліченності і $f \in CC(X \times Y, \mathbb{P})$. Тоді відображення $f$ має властивість Вестона.*

**6.** Нарешті доведемо, що нарізно неперервні відображення $f\colon X \times Y \to \mathbb{P}$ при $X = Y = \mathbb{R}$ можуть не мати *властивості Гана*, яка полягає в тому, що множина $C_Y(f)$ залишкова в $X$.

**Теорема 4.** *Нехай $X = Y = \mathbb{R}$ і $f\colon X \times Y \to \mathbb{P}$ — відображення, яке задається формулою $f(x, y) = (x + y, |x - y|)$. Тоді:*

*(i)* $\Delta = \{(x, x) : x \in X\} = D(f) = (X \times Y) \setminus C(f)$;

*(ii)* $f$ *— нарізно неперервне відображення;*

*(iii)* $C_Y(f) = \varnothing$.

*Доведення.* **(i)** Перевіримо, чи $\Delta \subseteq D(f)$. Нехай $p_0 = (x_0, x_0) \in \Delta$, $W_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 2x_0)^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$, $\delta > 0$ і $O_\delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]^2$. Оскільки $W_0$ — окіл точки $z_0 = f(p_0)$ у просторі $\mathbb{P}$, а множини $O_\delta$ при $\delta > 0$ утворюють базу околів точки $p_0$ в $\mathbb{R}^2$, то належність $p_0 \in D(f)$ негайно випливатиме з того, що $f(O_\delta) \not\subseteq W_0$ для кожного $\delta > 0$. Зафіксуємо $\delta > 0$ і розглянемо довільну точку $x_\delta \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$ і відповідну точку $p_\delta = (x_\delta, x_\delta)$ на діагоналі $\Delta$. Зрозуміло, що $p_\delta \in O_\delta$ і $f(p_\delta) = (2x_\delta, 0) \notin W_0$, позаяк $x_\delta \neq x_0$. Отже, $f(O_\delta) \not\subseteq W_0$.

Нехай $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$. Тоді $|x_0 - y_0| > 0$. Отже, $z_0 = f(p_0) \in \mathbb{P}_2$. Оскільки числові функції $u(x, y) = x + y$ та $v(x, y) = |x - y|$ неперервні, то функція $f$ як відображення з

$\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$ є неперервною. Але підпростір $\mathbb{P}_2$ відкритий в $\mathbb{P}$ і його топологічна структура збігається з топологічною структурою, індукованою з $\mathbb{R}^2$. Тому $f$ є неперервним в точці $p_0$ як відображення з $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{P}$, адже $f(p_0) \in \mathbb{P}_2$.

**(ii)** Оскільки функція $f$ симетрична і $C(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$, то досить довести, що для кожного фіксованого $x_0 \in \mathbb{R}$ функція $f_{x_0}(x) = (x + x_0, |x - x_0|)$ з $\mathbb{R}$ в $\mathbb{P}$ є неперервною в точці $x_0$. Для цього достатньо для довільного околу $W$ точки $z_0 = f(x_0, x_0) = (2x_0, 0)$ в $\mathbb{P}$ знайти такий окіл $U$ точки $x_0$ в $\mathbb{R}$, що $f_{x_0}(U) \subseteq W$. Оскільки $z_0 \in \mathbb{P}_1$, а базу околів точки $z_0$ в $\mathbb{P}$ утворюють круги $K_\varepsilon[p_\varepsilon]$ радіуса $\varepsilon$ з центрами в точках $p_\varepsilon = (2x_0, \varepsilon)$, то досить розглянути випадок, коли $W = K_\varepsilon[p_\varepsilon]$, де $\varepsilon > 0$. Але

$$(x + x_0 - 2x_0)^2 + (|x - x_0| - \varepsilon)^2 = 2|x - x_0|(|x - x_0| - \varepsilon) + \varepsilon^2.$$

Звідси випливає, що $f_{x_0}(x) \in W$ тоді і тільки тоді, коли $|x - x_0| \leq \varepsilon$. Тому, покладаючи $U = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, отримаємо, що $f_{x_0}(U) \subseteq W$. Отже, функція $f_{x_0}$ неперервна в точці $x_0$.

**(iii)** Оскільки на кожній вертикальній прямій $\{x\} \times \mathbb{R}$ є точка $(x, x)$ діагоналі $\Delta$, яка згідно з доведеним в (i) є точкою розриву функції $f$, то $C_Y(f) = \varnothing$. $\square$

## ЛІТЕРАТУРА


1. Маслюченко В.К. *Нарізно неперервні відображення зі значеннями в індуктивних границях* // Укр. мат. журн. – 1992. – Т. 44, №3. – С. 380–384.
2. Маслюченко В.К. *Нарізно неперервні відображення від багатьох змінних зі значеннями в $\sigma$-метризовних просторах* // Нелінійні коливання. – 1999. – Т. 2, №3. – С. 337–344.
3. Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Шишина О.І. *Сукупна неперервність горизонтально квазінеперервних відображень зі значеннями в $\sigma$-метризовних просторах* // Мат. методи і фіз-мех. поля. – 2002. – Т. 45, №1. – С.42–46.
4. Маслюченко В.К., Філіпчук О.І. *Точкова розривність $K_hK$-функцій зі значеннями в $\sigma$-метризовних просторах* // Науковий вісник Чернівецького університету. Математика. -– 2004.-– Вип. 191–192. – С. 103–106.
5. Энгелькинг Р. Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.
6. Карлова О.О., Куцак С.М., Маслюченко В.К. *Узагальнення теореми Бера на випадок неметризовного простору значень* // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Математика. – 2004. – Вип. 228. – С. 11–14.
7. Piotrowski Z. *Separate and joint continuity* // Real Anal. Exch. – 1985–86. – V. 11, №2. – P. 293–322.
8. Маслюченко В.К. Зв'язки між різними характеристиками величини множини точок сукупної неперервності нарізно неперервних відображень // Чернів. ун-т. – Чернівці, 1994. – 17 с. – Деп. в ДНТБ України 10.І.94, №70-Ук94.
9. Маслюченко В.К., Філіпчук О.І. *Нарізно неперервні відображення зі значеннями в площині Немицького* // Міжнар. конф. "Математичний аналіз і суміжні питання". Тези доповідей. – Львів, 17-20 листопада, 2005. — С. 66.
10. Куратовский К. Топология. Т.1. – М.: Мир, 1966. – 594 с.
11. Calbrix J., Troallic J.P. *Applications séparément continues* // C.R. Acad. Sc. Paris. Séc. A. – 1979. – V. 288. – P.647-648.


Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича

*Надійшло 20.01.2006*