УДК 512.552.12

Б. В. Забавський

МАЙЖЕ АТОМНІ ОБЛАСТІ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ДІЛЬНИКІВ СТАБІЛЬНОГО РАНГУ 1

B. V. Zabavsky. *Almost atomic elementary divisor domains with stable range one*, Matematychni Studii, **26** (2006) 212–216.

We prove that if for any almost atomic Bezout domain with stable range 1 the Dubrovin condition holds and every maximal nonprincipal ideal is an ideal then the Bezout domain is an elementary divisor domain.

Б. В. Забавский. *Почти атомные области элементарных делителей стабильного ранга 1* // Математичні Студії. – 2006. – Т.26, №2. – С.212–216.

Доказано, что почти атомная область Безу стабильного ранга 1, в которой выполняется условие Дубровина и произвольный максимально неглавный правый идеал является идеалом, есть кольцо элементарных делителей.

Існує одна важлива властивість областей головних ідеалів, яка не переноситься на клас довільних кілець головних скінченно породжених ідеалів, а саме: можливість зведення довільної матриці до канонічного діагонального вигляду [1,2,6]. Внаслідок цього Капланський ввів в розгляд і започаткував вивчення кілець елементарних дільників [3].

Означення 1. Кільце R з $1 \neq 0$ називається *кільцем елементарних дільників*, якщо довільна матриця A над R володіє канонічною діагональною редукцією, тобто для A над R знайдуться оборотні матриці P та Q відповідних розмірів, такі що $PAQ = D$ — канонічна діагональна матриця, тобто $D = (d_{ii})$, причому $d_{ii}R \cap Rd_{ii} \supseteq Rd_{i+1,i+1}R$, $i \in \{1, 2, \ldots\}$

У даній статті доведено, що майже атомна область Безу стабільного рангу 1, в якій виконується умова Дубровіна і довільний максимально неголовний правий ідеал є ідеалом, є кільцем елементарних дільників.

Введемо необхідні означення і відомі факти. Під кільцем розуміємо завжди асоціативне кільце з $1 \neq 0$. Якщо над кільцем R довільна $1 \times 2(2 \times 1)$ матриця A володіє аналогічною властивістю, то так визначене кільце називається *правим (лівим) ермітовим*. *Ермітове кільце* — це кільце, яке є правим і лівим ермітовим. З означення 1 негайно випливає, що довільне кільце елементарних дільників є ермітовим кільцем. З іншої сторони [3], легко встановити, що ермітове кільце є кільцем головних односторонніх скінченопороджених ідеалів, тобто (в сучасній термінології) є кільцем Безу. *Праве*

2000 *Mathematics Subject Classification:* 16U80, 16S50.

(ліве) кільце Безу — це кільце, в якому довільний скінченопороджений правий (лівий) ідеал є головним правим (лівим) ідеалом. Праве і ліве кільце Безу будемо називати *кільцем Безу.* Як довели Гілмен і Хенріксен [2], існують комутативні кільця Безу, які не є ермітовими, а також існують ермітові кільця, які не є кільцями елементарних дільників. В [4] доведено, що комутативне кільце Безу є Ермітовим тоді і тільки тоді, коли його стабільний ранг не перевищує 2. В некомутативному випадку про кільця елементарних дільників відомо мало. Наприклад, області головних ідеалів, хоча навіть прості кільця головних ідеалів можуть бути доволі складними. В [5] доведено, що проста область Безу є областю елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли вона є 2-простою, тобто коли для довільного ненульового елемента $a \in R$ знайдуться такі $u_1, u_2, v_1, v_2 \in R$, що $u_1av_1 + u_2av_2 = 1$.

Інший результат, який стосується абсолютно протилежної ситуації, є результатом робіт [6,7], де показано, що дистрибутивне кільце елементарних дільників є дуо-кільцем. Але слід відмітити, що у випадку некомутативних кілець класи дистрибутивних кілець є доволі вузькими і спеціальними. Так, наприклад, праві дистрибутивні області Безу можна визначити, як області Безу, в яких довільний максимальний правий ідеал є ідеалом [8,9]. Звідси бачимо, що область головних ідеалів, взагалі кажучи, не є дистрибутивною. Це дозволило [10] розглядати певні області Безу, які є природним узагальненням дистрибутивних областей і містять, як підклас, клас областей головних ідеалів. А саме — майже атомні області Безу, в яких довільний максимально неголовний правий ідеал є ідеалом.

Опишемо такі кільця. Під *атомом* розуміємо елемент, який є незворотним і не представляється у вигляді добутку двох незворотних елементів [1]. Якщо довільний необоротний елемент області R має правим і лівим множником атом, то область R називається *майже атомною* [11]. Ненульовий елемент a області R назвемо *лівим (правим) скінченим*, якщо довільний власний лівий (правий) дільник елемета a є зворотним, або він володіє скінченним атомним розкладом [11]. Назвемо елемент *скінченим*, якщо він є лівим і правим скінченим. Скінченний елемент області Безу назвемо факторіальним [11].

Праві кільця Безу відрізняються від кілець головних правих ідеалів, взагалі кажучи, наявністю неголовних правих ідеалів. Нехай надалі під кільцем будемо розуміти область Безу, яка не є областю головних як правих, так і лівих ідеалів. Оскільки множина неголовних правих ідеалів непорожня і індукована стосовно порядку теоретико-множинного включення, то, за лемою Цорна, можемо говорити про максимальні серед неголовних правих ідеалів, тобто правий ідеал M є *максимально неголовним правим ідеалом*, якщо він є неголовним правим ідеалом і з включення $M \subsetneqq J$ для правого ідеалу J завжди випливає, що J — головний правий ідеал [14]. Наведемо спочатку такий результат з [10].

Теорема 1. *Нехай R майже атомна область Безу, в якій довільний максимально неголовний правий ідеал є ідеалом. Тоді в R довільний максимально неголовний правий ідеал є максимально неголовним лівим ідеалом.*

Дубровін М.І. довів, що напівлокальне напівпервинне кільце Безу є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли виконується умова Дубровіна, тобто для довільного елемента $a \in R$ існує елемент $a_* \in R$, такий що $RaR = a_*R = Ra_*$ [15].

Напівлокальне кільце R є кільцем стабільного рангу 1, тобто кільцем, в якому з умови $aR + bR = R$, для довільних елементів $a, b \in R$, існує елемент $t \in R$, такий що

$(a+bt)R = R$ [16]. Для того, щоб довести основний цієї статті спочатку доведемо таке допоміжне твердження.

Твердження 1. *Нехай R — майже атомна область Безу, в якій виконується умова Дубровіна, а також з умови $RaR = R$ випливає, що a — факторіальний елемент. Тоді довільний ненульовий елемент $a \in R$ можна зобразити у вигляді*

$$a = a_* f = \varphi a_*,$$

де a_* — дуо-елемент, а f, φ — фаторіальні елементи.

Доведення. Оскільки $RaR = a_*R = Ra_*$, то $a = a_*f = \varphi a_*$, де $RfR = R\varphi R = R$ (оскільки R — область).За обмежень, накладених на кільце, маємо, що f, φ — фаторіальні елементи кільця R.

Твердження доведено. □

Твердження 2. *Нехай R — область Безу, в якій виконується умова Дубровіна. R є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли довільна матриця $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, де $RaR + RbR + RcR = R$, володіє канонічною діагональною редукцією.*

Доведення. Необхідність очевидна. Для доведення достатності зауважимо, що за обмежень, накладених на кільце R, воно є ермітовим кільцем [3]. Отже, нам достатньо довести, що канонічною діагональгою редукцією володіє матриця вигляду

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Нехай $RaR = a_*R = Ra_*, RbR = b_*R = Rb_*, RcR = c_*R = Rc_*$, і нехай $a_*R + b_*R + c_*R = \alpha R = R\alpha = Ra_* + Rb_* + Rc_*$. Тоді $a = \alpha a_1 = a_2\alpha, b = \alpha b_1 = b_2\alpha, c = \alpha c_1 = c_2\alpha$ для деяких елементів $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in R$.

Звідси $Ra_1R + Rb_1R + Rc_1R = R = Ra_2R + Rb_2R + Rc_2R$. Тоді

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 & 0 \\ \alpha b_1 & \alpha c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Оскільки R область, то для довільних зворотних матриць P, Q ми можемо знайти такі зворотні матриці P', Q', що

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} P = P' \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

$$Q \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} Q' [3]$$

За обмежень, накладених на кільце R, матриці

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} \text{ та } \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

володіють канонічною діагональною редукцією, то очевидно, що і матриця

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$$

володіє канонічною діагональною редукцією.

Твердження доведено. □

Теорема 2. *Нехай R — майже атомна область Безу стабільного рангу 1, в якій виконується умова Дубровіна, а також з умови $RaR = R$ випливає, що a — факторіальний елемент. Тоді R — кільце елементарних дільників.*

Доведення. За твердженням 2 для доведення теореми досить довести, що матриця вигляду
$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix},$$
де $RaR + RbR + RcR = R$, володіє канонічною діагональною редукцією. Оскільки R — область Безу стабільного рангу 1, то згідно [16] для довільних елементів $a, b \in R$ існують елементи $x, d \in R$, що $xa + b = d$, де $Ra + Rb = Rd$. Тоді
$$\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa+b & c \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c \\ a & 0 \end{pmatrix},$$
де $a = a_0 d$ для деякого елемента $a_0 \in R$.

Нехай $cR + dR = zR$ і $cy + d = z$ для деякого $y \in R$ (такі елементи існують [16]). Тоді
$$\begin{pmatrix} d & c \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+cy & c \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & c \\ a & 0 \end{pmatrix},$$
де $d = zt, c = zc_0$ для деяких елементів $t, c_0 \in R$.

Отже, ми довели, що матриця
$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$$
еквівалентна до матриці
$$\begin{pmatrix} z & c \\ a & 0 \end{pmatrix},$$
де $a = azt, c = zc_0$.

Оскільки $RaR + RbR + RcR = R$, тоді $RzR + RcR + RaR = RaR + RbR + RcR = R$. Більше того, позаяк $a = a_0 zt$ і $c = zc_0$, то
$$RaR + RzR + Rc = RzR.$$
Отже, $RzR = R$. За обмежень, накладених на кільце R, маємо, що z — факторіальний елемент. З [14] матриця
$$\begin{pmatrix} z & c \\ a & 0 \end{pmatrix},$$
а отже, і матриця
$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$$
володіє канонічною діагональною редукцією. Теорему доведено. □

Як наслідок даної теореми, враховуючи теорему 1 і [14], отримаємо такі твердження.

Теорема 3. *Незай R — майже атомна область Безу, в якій довільний максимально неголовний правий ідеал є ідеалом. Тоді в R виконується умова: з умови $RaR = R$ слідує, що a — факторіальний елемент кільця R.*

Теорема 4. *Нехай R — майже атомна область Безу стабільного рангу, в якій виконується умова Дубровіна і довільний максимально неголовний правий ідеал є ідеалом. Тоді R є кільцем елементарних дільників.*

ЛІТЕРАТУРА

1. Кон П. Свободные кольца и их связи. – М.: Мир. – 1975. – 422 с.
2. Gillman L., Henriksen M. *Rings of continuous functions in which every finitely generated ideal is principal*, Trans.Amer.Math.Soc, 1956, V. 82, P. 366–391.
3. Kaplansky I. *Elementary divisors and modules*, Trans. Amer. Math. Soc., 1949, V. 66, P. 464-491.
4. Забавський Б.В. *Редукція матриць над кільцями Безу стабільного рангу не більше 2* sep Укр.мат.журн., 2003, Т. 55, №4, С. 550–554.
5. Забавський Б.В. *Простые кольца элементарных делителей* // Математичні студії, 2004, Т.22, №2, С. 219–221.
6. Забавський Б.В., Комарницький М.Я. *О дистрибутивных кольцах элементарных делителей* // Укр. мат. журн., 1990, 46, Т.42, №7, С. 1002–1004.
7. Туганбаев А.А. *Кольца элементарных делителей и дистрибутивные кольца*, Успехи мат. наук., 11991, 46, вып.6, С. 219–220.
8. Brungs H.H. *Bezout domains and rings with the distributive lattices of right ideals*, Can.J.Math., 1986, V.38, №2, P. 286–303.
9. Tuganbaev A.A. Semidistributive Modules and Rings, Kluwer Academic Publ. Netherland, 1998.
10. Забавський Б.В. *Факторіальний аналог дистрибутивних областей Безу* // Укр. мат. журн., 2001, Т. 53, №11, С. 1564–1567.
11. Cohn P.M. *Right principal Bezout domains*, J. London Math. Soc., 1987, V. 35, №2, P. 251–262.
12. Cohn P.M., Schofield A.H. *Two examples of principal ideal domains*, Bull.London Math.Soc., 1985, V. 17, P. 25–28.
13. Beauregard R.A. *Left Ore principal right ideal domains*, Proc. Amer. Math. Soc., 1988, V. 102, №3, P. 459–462.
14. Забавский Б.В. *О некоммутативных кольцах элементарных делителей*, Укр. мат. журн., 1987, Т.39, №4, Р. 440–444.
15. Дубровин Н.И. *О кольцах с элементарными делителями*, Изв. вузов. мат., 1986, №111, P. 14–20.
16. Zabavsky B.V. *Diagonalizability theorems for rings with finite stable range*, Alg. and Discrete math., 2004, №2, P. 84–90.

Львівський національний університет імені Івана Франка

Надійшло 03.09.2006