УДК 517.95

І. М. Медвідь

ПАРАБОЛІЧНА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ ФІЛЬТРАЦІЇ-АБСОРБЦІЇ БЕЗ УМОВ НА НЕСКІНЧЕННОСТІ

I. M. Medvid. *Parabolic problem for filtration-absorption equation without conditions at infinity*, Matematychni Studii, **26** (2006) 202–211.

We prove existence of a solution of some nonlinear parabolic problem without conditions at infinity. In particular, the growth of the data and coefficients of equation at infinity need not be bounded.

И. М. Медвидь. *Параболическая задача для уравнения фильтрации-абсорбции без условий на бесконечности* // Математичні Студії. – 2006. – Т.26, №2. – С.202–211.

Доказано существования решения нелинейной параболической задачи без условий на бесконечности. В частности, исходные данные и коэффициенты уравнения могут неограниченно возрастать на бесконечности.

Х. Брезіс (H. Brezis) у 1984р. вперше чітко сформулював явище, коли однозначна розв'язність задачі Коші для нелінійного параболічного рівняння не залежить від поведінки розв'язку на нескінченності, і це зроблено в праці [1] для рівняння вигляду

$$u_t - \triangle^m(|\,u|^{p-2}u) + c|\,u|^{q-2}u = 0$$

при $m = 1, c > 0, p = 2$ і $q > 2$. Подібні результати у випадку $m \geqslant 1, p = 2, c > 0$, $q > 2$ одержано в [3], [7], [9]. Інші випадки співвідношень між параметрами p і q при $m = 1, c > 0$ досліджено в [2], [5], [6]. В даній роботі доведено існування розв'язку мішаної задачі для одного класу нелінійних параболічних рівнянь в анізотропних просторах Соболєва без умов на нескінченності.

Нехай $n \geqslant 2$, $1 \leqslant m < n$ — натуральні числа, Ω_1 — необмежена область в $\mathbb{R}^m$, Ω_2 — обмежена область в $\mathbb{R}^{n-m}$, а $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Припустимо, що множина $\Omega \cap \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1^2 + \ldots + x_m^2 < i^2\}$ є областю і поверхня $\partial\bigl(\Omega \cap \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1^2 + \ldots + x_m^2 < i^2\}\bigr)$ є регулярною ([15, с.45]) для кожного $i \in \mathbb{N}$. Нехай $p_i > 2$, $i \in \{1, \ldots, n\}$; $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots \leqslant p_m$, $p_{m+1} \leqslant p_{m+2} \leqslant \ldots \leqslant p_n$; $r > 1$.

В області $Q_T = \Omega \times (0, T)$ розглянемо мішану задачу для параболічного рівняння

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} \bigl(a_i(x,t)|u_{x_i}|^{p_i-2}u_{x_i}\bigr)_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u +$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 35K30, 58J45.

$$+ |u|^{r-2}u \ = \ \sum_{i=1}^{n} f_{i x_i}(x,t) \ + \ f_0(x,t), \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \Omega \ , \tag{2}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad 0 < t < T \ . \tag{3}$$

Припустимо, що виконуються умови

(**A1**): $a_i,\ b_i,\ c,\ \frac{\partial b_i}{\partial x_i} \in L^{\infty}_{loc}(\overline{Q}_T),\ i \in \{1,\dots,n\}$;
(**A2**): існує стала $a_0 > 0$ така, що $a_i(x,t) \geqslant a_0$ м.с. в Q_T, $i \in \{1,\dots,n\}$;
(**A3**): $f_i \in L^{p_i'}_{loc}(\overline{Q}_T),\ i \in \{1,\dots,n\},\ 1/p_i + 1/p_i' = 1;\ f_0 \in L^{r'}_{loc}(\overline{Q}_T),\ 1/r + 1/r' = 1;$ $u_0 \in L^2_{loc}(\overline{\Omega})$.

Розглянемо систему областей $\{\widetilde{\Omega}_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^m$, де $\widetilde{\Omega}_i = \{(x_1,\dots,x_m) : x_1^2 + \ldots + x_m^2 < i^2\} \cap \Omega_1$, та $\{Q_{\tau i}\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n \times (0,T)$, де $Q_{\tau i} = \widetilde{\Omega}_i \times \Omega_2 \times (0,\tau)$, $i \in \mathbb{N}$, $0 < \tau \leqslant T$.

Дамо означення основних просторів функцій, які використовуються в цій статті. Всі ці простори є дійсними. Нехай $G \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область, $i \in \{1,\dots,n\}$. Позначимо:
$W^{1,p_i}_{x_i}(G) = \{v \mid v \in L^{p_i}(G), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^{p_i}(G)\}$ — банахів простір з нормою $\|v\|_{L^{p_i}} + \|\frac{\partial v}{\partial x_i}\|_{L^{p_i}}$;
$W^{1,p_i}_{0,x_i}(G)$ — банахів простір, що є замиканням $D(G)$ в $W^{1,p_i}_{x_i}(G)$ з нормою $\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\|_{L^{p_i}}$;
$W^{-1,p_i'}_{x_i}(G) = (W^{1,p_i}_{0,x_i}(G))^{\star}$; $W^{1,r,p_1,\dots,p_n}_0(G) = \bigcap_{i=1}^n W^{1,p_i}_{0,x_i}(G) \bigcap L^r(G)$;
$W^{1,r,p_1,\dots,p_n}(G) = \bigcap_{i=1}^n W^{1,p_i}_{x_i}(G) \bigcap L^r(G)$;
$C^{\infty}_c(\overline{\Omega}) = \{v \mid v \in C^{\infty}(\overline{\Omega}), \operatorname{supp} v$ — обмежена множина в $\overline{\Omega}\}$;
$W^{1,p_i}_{0,x_i,loc}(\overline{\Omega}) = \{v \mid v \in W^{1,p_i}_{x_i}(\widetilde{\Omega}_R \times \Omega_2), v|_{\partial(\widetilde{\Omega}_R \times \Omega_2) \cap \partial\Omega} = 0\ \forall\ R \in \mathbb{N}\}$;
$W^{1,r,p_1,\dots,p_n}_{0,loc}(\overline{\Omega}) = \{v \mid v \in W^{1,r,p_1,\dots,p_n}(\widetilde{\Omega}_R \times \Omega_2), v|_{\partial(\widetilde{\Omega}_R \times \Omega_2) \cap \partial\Omega} = 0\ \forall\ R \in \mathbb{N}\}$.

Означення 1. Функцію $u \in \bigcap_{i=1}^n L^{p_i}(0,T; W^{1,p_i}_{0,x_i,loc}(\overline{\Omega})) \bigcap L^r_{loc}(\overline{Q}_T) \bigcap C([0,T]; L^2_{loc}(\overline{\Omega}))$, яка задовольняє інтегральну рівність

$$\iint\limits_{Q_T} \Big(-u\varphi_t \ + \ \sum_{i=1}^n a_i(x,t)|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i}\varphi_{x_i} \ + \ \sum_{i=1}^n b_i(x,t)u_{x_i}\varphi \ + \ c(x,t)u\varphi \ +$$

$$+ |u|^{r-2}u\varphi\Big)\,dxdt \ = \ \iint\limits_{Q_T} \Big(f_0\varphi \ - \ \sum_{i=1}^n f_i\varphi_{x_i}\Big)\,dxdt \tag{4}$$

для будь-яких $\varphi \in C_0^{\infty}(Q_T)$ і умову (2), називатимемо *узагальненим розв'язком задачі* (1) – (3).

Нехай для обмеженої області G операція $\langle \cdot\,,\cdot \rangle_G$ — позначає скалярний добуток між просторами $W^{1,r,p_1,\dots,p_n}_0(G)$ та $\sum_{i=1}^n W^{-1,p_i'}_{x_i}(G) + L^{r'}(G)$, а $\big(\cdot,\cdot\big)_G$ — скалярний добуток між просторами $\bigcap_{i=1}^n L^{p_i}\big(0,T; W^{1,p_i}_{0,x_i}(G)\big) \bigcap L^r(G \times (0,T))$ та $\sum_{i=1}^n L^{p_i'}\big(0,T; W^{-1,p_i'}_{x_i}(G)\big) + L^{r'}(G \times (0,T))$.

Визначимо множину операторів $A_G(t)$ для м.в. $t \in (0,T)$ за правилом
$\langle A_G(t)(\varphi), \psi \rangle_G \overset{def}{=} \int_G \Big(\sum_{i=1}^n a_i(x,t)|\varphi_{x_i}|^{p_i-2}\varphi_{x_i}\psi_{x_i} + |\varphi|^{r-2}\varphi\psi \Big)\,dx\,,\ \ \varphi,\psi \in W^{1,r,p_1,\dots,p_n}_0(G)$,
і множину лінійних операторів $L_G(t)$ для м.в. $t \in (0,T)$ за правилом
$\langle L_G(t)(\varphi), \psi \rangle_G \overset{def}{=} \int_G \Big(\sum_{i=1}^n b_i(x,t)\varphi_{x_i}\psi \ + \ c(x,t)\varphi\psi \Big)\,dx,\ \ \varphi,\psi \in W^{1,r,p_1,\dots,p_n}_0(G)$.
Також введемо оператор $\mathcal{A}_G$ так $\big(\mathcal{A}_G(\varphi),\psi\big)_G = \int_0^T \langle A_G(t)(\varphi(\cdot,t)), \psi(\cdot,t) \rangle_G\,dt,\ \varphi,\psi \in$

$\bigcap_{i=1}^{n} L^{p_i}\big(0,T;W_{0,x_i}^{1,p_i}(G)\big)\bigcap L^r(G\times(0,T))$. Неважко показати, що оператор $A_G(t)$ для м.в. $t\in(0,T)$ відображає $W_0^{1,r,p_1,\dots,p_n}(G)$ в $\sum_{i=1}^{n} W^{-1,p_i'}(G)+L^{r'}(G)$, а оператор $\mathcal{A}_G$ відображає $\bigcap_{i=1}^{n} L^{p_i}\big(0,T;W_{0,x_i}^{1,p_i}(G)\big)\bigcap L^r(G\times(0,T))$ в $\sum_{i=1}^{n} L^{p_i'}\big(0,T;W_{x_i}^{-1,p_i'}(G)\big)+L^{r'}(G\times(0,T))$.

Введемо зрізаючу функцію

$$\psi_R(x_1,\dots,x_k)=\begin{cases}\frac{R^2-(x_1^2+\ldots+x_k^2)}{R}, & x_1^2+\ldots+x_k^2\leqslant R^2,\\ 0, & x_1^2+\ldots+x_k^2>R^2;\end{cases}$$

$\zeta_{R,\alpha}(x_1,\dots,x_k)=\psi_R^{\alpha}(x_1,\dots,x_k)$, $\alpha>0$, $R>0$ (вона вперше використана в [3]). Зауважимо, що правильні такі оцінки

$\frac{R^2-(x_1^2+\ldots+x_k^2)}{R}\geqslant R-\sqrt{x_1^2+\ldots+x_k^2}\geqslant R-R_0$ в $\widetilde{\Omega}_{R_0}\times\Omega_2$,

$\frac{R^2-(x_1^2+\ldots+x_k^2)}{R}\leqslant R$ в $\widetilde{\Omega}_R\times\Omega_2$, де R,R_0 — довільні додатні числа, $R_0<R$.

Для компактності записів введемо позначення $V(G)\overset{def}{=}W_0^{1,r,p_1,\dots,p_n}(G)$, $W(G\times(0,T))\overset{def}{=}\bigcap_{i=1}^{n} L^{p_i}\big(0,T;W_{0,x_i}^{1,p_i}(G)\big)\bigcap L^r(G\times(0,T))$.

Розглянемо рівняння (1) в області Q_{Tk}, $k\in\mathbb{N}$, з початковою умовою (2) в $\widetilde{\Omega}_k\times\Omega_2$ і з крайовою умовою

$$u|_{\partial(\widetilde{\Omega}_k\times\Omega_2)}=0,\quad 0<t<T.$$

Доведемо, що існує розв'язок такої задачі.

Теорема 1. *Нехай $k\in\mathbb{N}$. Припустимо, що існує $M\in\mathbb{R}$ таке, що $c(x,t)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b_{ix_i}(x,t)\geqslant M$ м.с. в Q_{Tk}. Тоді існує функція $u\in W(\widetilde{\Omega}_k\times\Omega_2\times(0,T))$, $u\in C([0,T];L^2(\widetilde{\Omega}_k\times\Omega_2))$, яка задовольняє рівність*

$$\iint\limits_{Q_{Tk}}\Big(-u\varphi_t+\sum_{i=1}^{n}a_i(x,t)|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i}\varphi_{x_i}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x,t)u_{x_i}\varphi+c(x,t)u\varphi+$$
$$+|u|^{r-2}u\varphi\Big)\,dxdt=\iint\limits_{Q_{Tk}}\Big(f_0\varphi-\sum_{i=1}^{n}f_i\varphi_{x_i}\Big)\,dxdt \tag{5}$$

для будь-яких $\varphi\in C_0^{\infty}(Q_{Tk})$ і умову $u|_{t=0}=u_0(x)$, $x\in\widetilde{\Omega}_k\times\Omega_2$.

Доведення. Використаємо метод Фаедо-Гальоркіна. Для простоти, в доведенні замість $A_{\widetilde{\Omega}_k\times\Omega_2}$ будемо писати A, замість $\mathcal{A}_{\widetilde{\Omega}_k\times\Omega_2}$ — $\mathcal{A}$, замість $L_{\widetilde{\Omega}_k\times\Omega_2}$ — L, а під $\langle\cdot,\cdot\rangle$ і $(\cdot,\cdot)$ розумітимемо відповідно $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\widetilde{\Omega}_k\times\Omega_2}$ і $(\cdot,\cdot)_{\widetilde{\Omega}_k\times\Omega_2}$.

Нехай система $\{\varphi_l\}_{l=1}^{\infty}$ функцій $\varphi_l\in C_0^{\infty}(\Omega)$ ($l\in\{1,2,\dots\}$) є лінійно незалежна і повна в $V(\widetilde{\Omega}_k\times\Omega_2)$, $k\in\mathbb{N}$. Побудуємо послідовність функцій

$$u_m(x,t)=\sum_{l=1}^{m}c_l^m(t)\varphi_l(x),\ m\in\mathbb{N},\ (x,t)\in Q_{Tk},$$

де $c_1^m,\dots,c_m^m$ є розв'язком задачі Коші

$$\langle(u_m)_t,\varphi_l\rangle+\langle A(t)(u_m),\varphi_l\rangle+\langle L(t)(u_m),\varphi_l\rangle=\langle f^k(t),\varphi_l\rangle \text{ для м.в. } t\in(0,T), \tag{6}$$

$$c_l^m(0)=u_{0,l}^m,\quad l\in\{1,\dots,m\}, \tag{7}$$

де $\langle f^k(t),\varphi\rangle\overset{def}{=}\int_{\widetilde{\Omega}_k\times\Omega_2}\Big(f_0(x,t)\varphi(x)-\sum_{i=1}^{n}f_i(x,t)\varphi_{x_i}(x)\Big)\,dx$, $\varphi\in V(\widetilde{\Omega}_k\times\Omega_2)$, для м.в. $t\in(0,T)$, а $u_{0,l}^m$, $l\in\{1,\dots,m\}$, визначаються таким чином:

$$u_{0m}(x)=\sum_{l=1}^{m}u_{0,l}^{m}\varphi_l(x),\quad u_{0m}\to u_0 \text{ в } L^2(\widetilde{\Omega}_k\times\Omega_2) \text{ при } m\to\infty.$$

На основі теореми Каратеодорі [14, с.54] існує абсолютно неперервний розв'язок задачі (6), (7), визначений на деякому проміжку $[0,\,t_0]$, $t_0\leqslant T$. Із оцінок, отриманих нижче, буде випливати, що можна взяти $t_0=T$.

Із (6) і (7), враховуючи, що

$$\int_0^\tau\langle A(t)(u_m),u_m\rangle\,dt\geqslant\int_0^\tau\Big[a_0\sum_{i=1}^{n}\|(u_m)_{x_i}\|_{L^{p_i}}^{p_i}+\|u_m\|_{L^r}^{r}\Big]\,dt,\ \tau\in(0,T],\ m\in\mathbb{N},$$

і, використовуючи нерівність Юнга, отримаємо для будь-яких $m\in\mathbb{N}$

$$\frac12\,\|u_m(\tau)\|_{L^2}^2+a_1\int_0^\tau\Big[\sum_{i=1}^{n}\|(u_m)_{x_i}\|_{L^{p_i}}^{p_i}+\|u_m\|_{L^r}^{r}\Big]\,dt+\iint\limits_{Q_{\tau_k}}\Big(c(x,t)-\frac12\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial b_i(x,t)}{\partial x_i}\Big)u_m^2\,dx\,dt\leqslant$$
$$+\int_0^\tau\bigg((a_1/2)\Big[\sum_{i=1}^{n}\|(u_m)_{x_i}\|_{L^{p_i}}^{p_i}+\|u_m\|_{L^r}^{r}\Big]+C_1\Big[\sum_{i=1}^{n}\|f_i\|_{L^{p'_i}}^{p'_i}+\|f_0\|_{L^{r'}}^{r'}\Big]\bigg)\,dt+\frac12\|u_{0m}\|_{L^2}^2,\tag{8}$$

де $a_1=\min\{a_0,1\}$, C_1 — додатня константа, яка не залежить від m. Звідси випливає, що послідовність $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ — обмежена в $C\big([0,T];L^2(\widetilde{\Omega}_k\times\Omega_2)\big)\bigcap W(\widetilde{\Omega}_k\times\Omega_2\times(0,T))$. Легко показати, що $\{\mathcal{A}(u_m)\}_{m=1}^\infty$ — обмежена в $W^\star(\widetilde{\Omega}_k\times\Omega_2\times(0,T))$. Звідси випливає існування підпослідовності $\{u_{m_j}\}_{j=1}^\infty$ послідовності $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ і функції $u\in W(\widetilde{\Omega}_k\times\Omega_2\times(0,T))\bigcap L^\infty\big(0,T;L^2(\widetilde{\Omega}_k\times\Omega_2)\big)$ таких, що

$u_{m_j}\to u$ $\star$ — слабко в $L^\infty\big(0,T;L^2(\widetilde{\Omega}_k\times\Omega_2)\big)$;

$u_{m_j}\to u$ слабко в $W(\widetilde{\Omega}_k\times\Omega_2\times(0,T))$;

$\mathcal{A}(u_{m_j})\to\chi$ слабко в $W^\star(\widetilde{\Omega}_k\times\Omega_2\times(0,T))$.

Використовуючи доведення теореми 1.1 [11, с.86], можна показати, що правильна рівність

$$\int_0^T\Big[\langle u_t,\varphi(\cdot,t)\rangle+\langle L(t)(u),\varphi(\cdot,t)\rangle\Big]\,dt+\big(\chi,\varphi\big)=\int_0^T\langle f^k,\varphi(\cdot,t)\rangle dt\,,\tag{9}$$

для будь-яких $\varphi\in C_0^\infty(\overline{Q}_T)$, а також $u(\cdot,0)=u_0$. Вираз $\int_0^T\langle u_t,\varphi(\cdot,t)\rangle dt$ в рівності (9) розуміємо так: $\int_0^T\langle u_t,\varphi(\cdot,t)\rangle dt=-\int_0^T\langle u,\varphi_t(\cdot,t)\rangle dt$, $\varphi\in C_0^\infty(\overline{Q}_T)$. З (9), зокрема, випливає, що $u_t\in W^\star(\widetilde{\Omega}_k\times\Omega_2\times(0,T))$.

Отже, для доведення існування розв'язку залишається показати, що $\chi=\mathcal{A}(u)$. Для цього використаємо метод монотонності [13]. Нехай $\beta>2M$. З умов теореми випливає, що

$$\chi_{m_j}\overset{def}{=}\int_0^T\big\langle A(t)(u_{m_j}(t))-A(t)(v(t)),(u_{m_j}(t)-v(t))\,e^{-\beta t}\big\rangle\,dt\geqslant0\quad\forall\ v\in W.\tag{10}$$

Згідно (6)

$$\int_0^T\big\langle A(t)(u_{m_j}),u_{m_j}\,e^{-\beta t}\big\rangle\,dt=\int_0^T\big\langle f^k(t),u_{m_j}\,e^{-\beta t}\big\rangle\,dt+\frac12\int\limits_{\widetilde{\Omega}_k\times\Omega_2}\big(u_{0m_j}(x)\big)^2\,dx-$$

$$- \frac{1}{2} \int\limits_{\widetilde{\Omega}_k \times \Omega_2} \big(u_{m_j}(x,T)\big)^2 e^{-\beta T} \, dx \; - \iint\limits_{Q_{T_k}} \frac{\beta}{2}\big(u_{m_j}\big)^2 e^{-\beta t} \, dx \, dt \; - \int\limits_0^T \big\langle L(t)(u_{m_j}), u_{m_j} e^{-\beta t} \big\rangle \, dt.$$

Враховуючи цю рівність і те, що

$$\varliminf_{j\to\infty} \|u_{m_j}(\cdot,T)\|^2_{L^2(\widetilde{\Omega}_k\times\Omega_2)} \;\geqslant\; \|u(T)\|^2_{L^2(\widetilde{\Omega}_k\times\Omega_2)},$$

з (10) випливає

$$\varlimsup_{j\to\infty} \chi_{m_j} \leqslant \int\limits_0^T \big\langle f^k(t), u\, e^{-\beta t} \big\rangle \, dt \; + \; \frac{1}{2} \int\limits_{\widetilde{\Omega}_k\times\Omega_2} u_0^2(x) \, dx \; - \; \frac{1}{2} \int\limits_{\widetilde{\Omega}_k\times\Omega_2} u^2(x,T) \, e^{-\beta T} \, dx \; -$$

$$- \varliminf_{j\to\infty} \bigg(\iint\limits_{Q_{T_k}} \frac{\beta}{2}\big(u_{m_j}\big)^2 e^{-\beta t} \, dx \, dt \; + \int\limits_0^T \big\langle L(t)(u_{m_j}), u_{m_j} \, e^{-\beta t} \big\rangle \, dt \bigg) \; -$$

$$- \big(\chi, v\, e^{-\beta t}\big) \; - \int\limits_0^T \big\langle A(t)(v), (u-v)\, e^{-\beta t} \big\rangle \, dt.$$

Враховуючи (9), з останньої нерівності отримаємо

$$\big(\chi \; - \; \mathcal{A}(v), (u-v)\, e^{-\beta t}\big) \; + \varliminf_{j\to\infty} \bigg(\iint\limits_{Q_{T_k}} \frac{\beta}{2} u^2 \, e^{-\beta t} \, dx \, dt \; + \int\limits_0^T \big\langle L(t)(u), u\, e^{-\beta t} \big\rangle \, dt \; -$$

$$- \iint\limits_{Q_{T_k}} \frac{\beta}{2}\big(u_{m_j}\big)^2 e^{-\beta t} \, dx \, dt \; - \int\limits_0^T \big\langle L(t)(u_{m_j}), u_{m_j} \, e^{-\beta t} \big\rangle \, dt \bigg) \geqslant 0.$$

Розглянемо

$$\varliminf_{j\to\infty} \bigg(\iint\limits_{Q_{T_k}} \frac{\beta}{2} u^2 \, e^{-\beta t} \, dx \, dt \; + \int\limits_0^T \big\langle L(t)(u), u\, e^{-\beta t} \big\rangle \, dt \; - \iint\limits_{Q_{T_k}} \frac{\beta}{2}\big(u_{m_j}\big)^2 e^{-\beta t} \, dx \, dt \; -$$

$$- \int\limits_0^T \big\langle L(t)(u_{m_j}), u_{m_j} \, e^{-\beta t} \big\rangle \, dt \bigg) \; = \; - \varlimsup_{j\to\infty} \bigg(\iint\limits_{Q_{T_k}} \frac{\beta}{2}\big(u_{m_j} - u\big)^2 e^{-\beta t} \, dx \, dt \; +$$

$$+ \int\limits_0^T \big\langle L(t)(u_{m_j}) - L(t)(u), (u_{m_j} - u)\, e^{-\beta t} \big\rangle \, dt \; - \iint\limits_{Q_{T_k}} \Big(\beta u_{m_j} u - \beta u^2\Big) \, e^{-\beta t} \, dx \, dt -$$

$$- \int\limits_0^T \Big(2\big\langle L(t)(u), u\, e^{-\beta t} \big\rangle - \big\langle L(t)(u_{m_j}), u\, e^{-\beta t} \big\rangle - \big\langle L(t)(u), u_{m_j} \, e^{-\beta t} \big\rangle \Big) \, dt \bigg) =$$

$$= -\varlimsup_{j\to\infty} \iint\limits_{Q_{T_k}} \Big(\frac{\beta}{2} + c(x,t) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial b_i(x,t)}{\partial x_i}\Big)\big(u_{m_j}-u\big)^2 e^{-\beta t}dx\ dt \leqslant 0.$$

Отож,

$$\big(\chi - \mathcal{A}(v), (u-v)\,e^{-\beta t}\big) \geqslant 0.$$

Легко показати, що оператор $\mathcal{A}$ семінеперервний. Використаємо цей факт для доведення рівності $\chi = \mathcal{A}(u)$. Покладемо $v = u - \lambda w,\ \lambda \in (0,1)$, де w — довільний елемент із W, і, спрямувавши λ до 0, отримаємо

$$\big(\chi - \mathcal{A}(u), w\,e^{-\beta t}\big) \geqslant 0, \quad w \in W,$$

звідки випливає, що $\chi = \mathcal{A}(u)$. Отже, в результаті отримаємо

$$\int\limits_0^T \Big[\langle u_t,\varphi\rangle + \langle A(t)(u),\varphi\rangle + \langle L(t)(u),\varphi\rangle - \langle f^k(t),\varphi\rangle\Big]\,dt = 0\ ,$$

для будь-яких $\varphi \in C_0^\infty(\overline{Q}_T)$ і $u|_{t=0} = u_0(x)$, $x \in \widetilde{\Omega}_k \times \Omega_2$.

Звідси, взявши до уваги лему 2 праці [12], можна зробити висновок, що $u \in C\big([0,T]; L^2(\widetilde{\Omega}_k \times \Omega_2)\big)$. Отже, теорему 1 доведено. □

Теорема 2. *Припустимо, що існує $M \in \mathbb{R}$ таке, що $c(x,t) - \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} b_{i x_i}(x,\,t) \geqslant M$ м.с. в Q_T, і, крім того, $r > p_m$ або $p_n > p_m$. Тоді існує узагальнений розв'язок задачі* (1) – (3).

Доведення. Нехай $R \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N},\ 1 < R < k$. За теоремою 1 для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ існує функція u_k така, що виконується рівність

$$\int\limits_0^\tau \langle (u_k)_t, v\rangle_{\widetilde{\Omega}_k\times\Omega_2}\,dt + \iint\limits_{Q_{\tau_k}} \Big[\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)|(u_k)_{x_i}|^{p_i-2}(u_k)_{x_i}v_{x_i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)(u_k)_{x_i}v + c(x,t)u_k v\Big]\,dxdt - \int\limits_0^\tau \langle f^k, v\rangle_{\widetilde{\Omega}_k\times\Omega_2}\,dt = 0,\ \tau \in [0,T], \qquad (11)$$

для будь-яких $v \in W(\widetilde{\Omega}_k \times \Omega_2 \times (0,T))$, $\operatorname{supp} v \subset \overline{Q}_{T_R}$ і $u_k(x,0) = u_0(x),\ x \in \widetilde{\Omega}_k \times \Omega_2$.

За пробну функцію в (11) візьмемо $v = u_k \zeta_{R,\alpha} e^{-\gamma t},\ \gamma > 2M$.

Розглянемо випадок $r > p_m$. Нехай $\alpha > rp_m/(r-p_m)$. На підставі нерівності Юнга з (11) випливає

$$\frac{1}{2}e^{-\gamma\tau}\int\limits_{\widetilde{\Omega}_R\times\Omega_2}\big(u_k\big)^2(x,\tau)\,\zeta_{R,\alpha}\,dx + a_0\sum_{i=1}^{n}\iint\limits_{Q_{\tau_R}}\big|(u_k)_{x_i}\big|^{p_i}\zeta_{R,\alpha}e^{-\gamma t}\,dx\,dt + \iint\limits_{Q_{\tau_R}}|u_k|^r\,\zeta_{R,\alpha}e^{-\gamma t}\,dx\,dt +$$

$$+ \iint\limits_{Q_{\tau_R}} \Big(\frac{\gamma}{2} + c(x,t) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial b_i(x,t)}{\partial x_i}\Big)u_k^2\zeta_{R,\alpha}\,e^{-\gamma t}dx\ dt \leqslant$$

$$\leqslant \iint\limits_{Q_{\tau_R}} \sum_{i=1}^{m} \Big| a_i(x,t)|(u_k)_{x_i}|^{p_i-2}(u_k)_{x_i} u_k\,(\zeta_{R,\alpha})_{x_i}\Big|\,dx\,dt \;+\; \int\limits_0^\tau \big|\langle f^k, u_k\zeta_{R,\alpha}\rangle\big|dt \,+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\widetilde{\Omega}_R\times\Omega_2} u_0^2\,\zeta_{R,\alpha}\,dx \;\leqslant C_2(R)\sum_{i=1}^{m}\iint\limits_{Q_{\tau_R}} \big|(u_k)_{x_i}\big|^{p_i-1}\zeta_{R,\alpha}^{1/p_i'}\,|u_k|\,\zeta_{R,\alpha}^{1/r}\,|(\zeta_{R,\alpha})_{x_i}|\,\zeta_{R,\alpha}^{-1/p_i'-1/r}\,dx\,dt\,+$$

$$+\iint\limits_{Q_{\tau_R}} \big|f_0\zeta_{R,\alpha}^{1-1/r}u_k\zeta_{R,\alpha}^{1/r} - \sum_{i=1}^{n} f_i\zeta_{R,\alpha}^{1-1/p_i}(u_k)_{x_i}\zeta_{R,\alpha}^{1/p_i} - \sum_{i=1}^{n} f_i(\zeta_{R,\alpha})_{x_i}\zeta_{R,\alpha}^{-1/r}u_k\zeta_{R,\alpha}^{1/r}\big|\,dx\,dt\,+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\widetilde{\Omega}_R\times\Omega_2} u_0^2\,\zeta_{R,\alpha}\,dx \leqslant C_2(R)\sum_{i=1}^{m}\Bigg(\iint\limits_{Q_{\tau_R}}\big|(u_k)_{x_i}\big|^{p_i}\zeta_{R,\alpha}\,dxdt\Bigg)^{1/p_i'}\Bigg(\iint\limits_{Q_{\tau_R}}|u_k|^r\zeta_{R,\alpha}\,dxdt\Bigg)^{1/r}\times$$

$$\times\Bigg(\iint\limits_{Q_{\tau_R}}\psi_R^{\alpha-rp_i/(r-p_i)}\,dxdt\Bigg)^{(r-p_i)/(rp_i)} + \Bigg(\iint\limits_{Q_{\tau_R}}|f_0|^{r'}\zeta_{R,\alpha}\,dxdt\Bigg)^{1/r'}\Bigg(\iint\limits_{Q_{\tau_R}}|u_k|^r\zeta_{R,\alpha}\,dxdt\Bigg)^{1/r}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\Bigg(\iint\limits_{Q_{\tau_R}}|f_i|^{p_i'}\zeta_{R,\alpha}\,dxdt\Bigg)^{1/p_i'}\Bigg(\iint\limits_{Q_{\tau_R}}\big|(u_k)_{x_i}\big|^{p_i}\zeta_{R,\alpha}\,dxdt\Bigg)^{1/p_i'}+$$

$$+\,C_3\sum_{i=1}^{m}\Bigg(\iint\limits_{Q_{\tau_R}}|f_i|^r\psi_R^{\alpha-r'}\,dxdt\Bigg)^{1/r'}\Bigg(\iint\limits_{Q_{\tau_R}}|u_k|^r\zeta_{R,\alpha}\,dxdt\Bigg)^{1/r}+\frac{1}{2}\int\limits_{\widetilde{\Omega}_R\times\Omega_2}u_0^2\,\zeta_{R,\alpha}\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon_1\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\iint\limits_{Q_{\tau_R}}\big|(u_k)_{x_i}\big|^{p_i}\zeta_{R,\alpha}\,dx\,dt\;+\;\iint\limits_{Q_{\tau_R}}|u_k|^r\,\zeta_{R,\alpha}\,dx\,dt\Bigg)+C_4(\varepsilon_1,R),$$

$\tau\in[0,T]$, де $\varepsilon_1>0$, C_2, C_3, C_4 — додатні константи, які не залежать від k.

У випадку $p_n>p_m$ у виразі $\iint\limits_{Q_{\tau_R}}\sum_{i=1}^m\Big|a_i(x,t)|(u_k)_{x_i}|^{p_i-2}(u_k)_{x_i}u_k\,(\zeta_{R,\alpha})_{x_i}\Big|\,dx\,dt$ біля u_k виділяємо $\zeta_{R,\alpha}^{1/p_n}$ і проводимо аналогічну оцінку.

З нерівності Фрідріхса, оскільки $\zeta_{R,\alpha}$ не залежить від x_n, випливає нерівність

$$\Bigg(\iint\limits_{Q_{\tau_R}}|u_k|^{p_n}\,\zeta_{R,\alpha}\,dx\,dt\Bigg)^{1/p_n}\leqslant C_5(R)\Bigg(\iint\limits_{Q_{\tau_R}}\big|(u_k)_{x_n}\big|^{p_n}\zeta_{R,\alpha}\,dx\,dt\Bigg)^{1/p_n},\tau\in[0,T],\qquad(12)$$

де $C_5>0$. На підставі (12), в кожному з випадків отримаємо таку оцінку

$$\int\limits_{\widetilde{\Omega}_R\times\Omega_2}\big(u_k\big)^2(x,\tau)\,\zeta_{R,\alpha}\,dx+\iint\limits_{Q_{\tau_R}}\Bigg(\sum_{i=1}^{n}|(u_k)_{x_i}|^{p_i}+|u_k|^r+|u_k|^{p_n}\Bigg)\zeta_{R,\alpha}\,dxdt\leqslant C_6(R),\qquad(13)$$

$\tau\in[0,T]$, C_6 — додатня константа, що не залежить від k.

З (13) і умов теореми випливає, що для будь-якого $R_0>1$, $R_0\in\mathbb{N}$

$\{u_k\}_{k=1}^\infty$ — обмежена в $C\big([0,T];\,L^2(\widetilde{\Omega}_{R_0}\times\Omega_2)\big)$;

$\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ — обмежена в $\bigcap_{i=1}^{n} L^{p_i}\big(0,T;\, W_{x_i}^{1,p_i}(\widetilde{\Omega}_{R_0}\times\Omega_2)\big)\bigcap L^r(Q_{T R_0})$.
Зокрема $\{|(u_k)_{x_i}|^{p_i-2}(u_k)_{x_i}\}_{k=1}^{\infty}$ — обмежена в $L^{p_i'}(Q_{T R_0})$, $i\in\{1,\ldots,n\}$.

Отже, існують підпослідовність $\{u_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ послідовності $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, функції u і χ_i, $i\in\{1,\ldots,n\}$, такі, що

$u_{k_j}\to u$ слабко в $\bigcap_{i=1}^{n} L^{p_i}\big(0,T;\, W_{x_i}^{1,p_i}(\widetilde{\Omega}_{R_0}\times\Omega_2)\big)\bigcap L^r(Q_{T R_0})$,

$|(u_{k_j})_{x_i}|^{p_i-2}(u_{k_j})_{x_i}\to\chi_i$ слабко в $L^{p_i'}(Q_{T_{R_0}})$, $i\in\{1,\ldots,n\}$.

Тоді з (11) випливає, що

$(u_{k_j})_t\to u_t$ слабко в $\sum_{i=1}^{n} L^{p_i'}\big(0,T; W_{x_i}^{-1,p_i'}(\widetilde{\Omega}_{R_0}\times\Omega_2)\big)+L^{r'}(Q_{T R_0})$.

Неважко показати (див., наприклад, [15]), що $u_{k_j}\to u$ слабко в $L^{q_0}\big(0,T; L^{q_0}(\widetilde{\Omega}_{R_0}\times\Omega_2)\big)$ і $(u_{k_j})_t\to u_t$ слабко в $L^{q_0'}\big(0,T;\sum_{i=1}^{n} W_{x_i}^{-1,p'\,i}(\widetilde{\Omega}_{R_0}\times\Omega_2)+L^{r'}(\widetilde{\Omega}_{R_0}\times\Omega_2)\big)$, де $q_0=\max\{p_n,r\}$. Звідси можна зробити висновок, що $u_{k_j}\to u$ сильно в $L^{q_0}(Q_{T_{R_0}})$ [13, с.70].

Доведемо фундаментальність послідовності $\{u_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ в просторі $\bigcap_{i=1}^{n} L^{p_i}\big(0,T;\, W_{0,x_i,loc}^{1,p_i}(\overline{\Omega})\big)\bigcap L_{loc}^r(\overline{Q}_T)$. Для цього запишемо (11) для фіксованих k_j і m_j (для елементів підпослідовності) і за пробну функцію візьмемо $v=(u_{k_j}-u_{m_j})\,\zeta_{R,\alpha}e^{-\gamma t}$, де $\gamma>2M$, $\alpha>1$, $R>1, R\leqslant k_j, R\leqslant m_j$, $R\in\mathbb{N}$. Розглянемо різницю цих двох рівностей і, використовуючи нерівність

$$(t-s)(\mid t\mid^{p-2} t-\mid s\mid^{p-2} s)\geqslant 2^{2-p}\mid t-s\mid^{p},\ p\geqslant 2,\, t,s\in\mathbb{R},$$

отримаємо оцінку

$$\frac{1}{2}e^{-\gamma\tau}\int\limits_{\widetilde{\Omega}_R\times\Omega_2}(u_{k_j}-u_{m_j})^2(x,\tau)\,\zeta_{R,\alpha}\,dx\ +\ a_0\sum_{i=1}^{n}2^{2-p_i}\iint\limits_{Q_{\tau_R}}\big|(u_{k_j}-u_{m_j})_{x_i}\big|^{p_i}\zeta_{R,\alpha}e^{-\gamma t}\,dxdt\ +$$

$$\Psi(u_{k_j},u_{m_j},r)+\iint\limits_{Q_{\tau_R}}\Big(\frac{\gamma}{2}\ +\ c(x,t)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial b_i(x,t)}{\partial x_i}\Big)\big(u_{k_j}-u_{m_j}\big)^2\zeta_{R,\alpha}\,e^{-\gamma t}dxdt\leqslant$$

$$\leqslant C_7(R)\sum_{i=1}^{m}\iint\limits_{Q_{\tau_R}}\Big(\big|(u_{k_j})_{x_i}\big|^{p_i-1}+\big|(u_{m_j})_{x_i}\big|^{p_i-1}\Big)|u_{k_j}-u_{m_j}|\,dxdt\ \leqslant$$

$$\leqslant C_8(R)\sum_{i=1}^{m}\bigg(\big\|(u_{k_j})_{x_i}\big\|_{L^{p_i}(Q_{T_R})}^{p_i-1}+\big\|(u_{m_j})_{x_i}\big\|_{L^{p_i}(Q_{T_R})}^{p_i-1}\bigg)\|u_{k_j}-u_{m_j}\|_{L^{p_i}(Q_{T_R})},\tag{14}$$

де C_7, C_8 — додатні константи, що не залежать від k_j і m_j;

$$\Psi(u_{k_j},u_{m_j},r)=\iint\limits_{Q_{\tau_R}}\big(|u_{k_j}|^{r-2}u_{k_j}-|u_{m_j}|^{r-2}u_{m_j}\big)(u_{k_j}-u_{m_j})\,\zeta_{R,\alpha}e^{-\gamma t}\,dxdt,\ \text{якщо } r<2;$$

$$\Psi(u_{k_j},u_{m_j},r)=2^{2-r}\iint\limits_{Q_{\tau_R}}\big|u_{k_j}-u_{m_j}\big|^{r}\zeta_{R,\alpha}e^{-\gamma t}\,dxdt,\ \text{якщо } r\geqslant 2.$$

Враховуючи оцінку (14) і попередні зауваження щодо збіжності послідовності $\{u_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$, отримаємо, що

$\{u_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ — фундаментальна в $C\big([0,T];\, L_{loc}^2(\overline{\Omega})\big)$;

$\{u_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ — фундаментальна в $\bigcap_{i=1}^{n} L^{p_i}\big(0,T;\, W_{0,x_i,loc}^{1,p_i}(\overline{\Omega})\big)\bigcap L_{loc}^r(\overline{Q}_T)$.

Звідси випливає, що

$u_{k_j}\to u$ в $C\big([0,T];\, L_{loc}^2(\overline{\Omega})\big)$;

$u_{k_j}\to u$ в $\bigcap_{i=1}^{n} L^{p_i}\big(0,T;\, W_{0,x_i,loc}^{1,p_i}(\overline{\Omega})\big)\bigcap L_{loc}^r(\overline{Q}_T)$.

Оскільки $(u_{k_j})_{x_i}\to u_{x_i}$ сильно в $L^{p_i}(0,T;L_{loc}^{p_i}(\overline{\Omega}))$, $i\in\{1,\ldots,n\}$, $u_{k_j}\to u$ сильно в $L_{loc}^r(\overline{Q}_T)$ то за лемою 1.3 [13, с. 25]

$$\big|(u_{k_j})_{x_i}\big|^{p_i-2}(u_{k_j})_{x_i} \to \big|u_{x_i}\big|^{p_i-2}u_{x_i} \ \text{ слабко в } L^{p_i'}\big(0,T;L^{p_i'}_{loc}(\overline{\Omega})\big),$$
$$|u_{k_j}|^{r-2}u_{k_j} \to |u|^{r-2}u \ \text{ слабко в } L^{r'}_{loc}(\overline{Q}_T).$$

Отож, перейшовши до границі по вибраній підпослідовності в (11) при $\tau = T$, отримаємо

$$\int_0^T \langle u_t, v\rangle_\Omega \, dt \ + \iint\limits_{Q_{T_k}} \Big[\sum_{i=1}^n a_i(x,t)|u_{x_i}|^{p_i-2}u_{x_i}v_{x_i} \ +$$
$$+ \sum_{i=1}^n b_i(x,t)u_{x_i}v \ + \ c(x,t)uv\Big]\,dxdt \ = \iint\limits_{Q_T} \Big(f_0 v \ - \ \sum_{i=1}^n f_i v_{x_i}\Big)\,dxdt$$

для будь-яких $v \in W(\Omega\times(0,T))$, $\operatorname{supp} v$ — обмежена множина в $\overline{\Omega}$.

Оскільки, $u_{k_j} \to u$ в $C\big([0,T];\,L^2_{loc}(\overline{\Omega})\big)$, то $u_{k_j}(\cdot,0) \to u(\cdot,0)$ в $L^2_{loc}(\overline{\Omega})$, тобто, $u(\cdot,0) = u_0$. Звідси, легко бачити, що u — узагальнений розв'язок задачі (1) – (3). Теорему доведено.

$\square$

ЛІТЕРАТУРА

1. Brezis H. *Semilinear equations in $\mathbb{R}^n$ without conditions at infinity*, Appl. Math. Optim,. 1984, Vol. 12. no 3, P. 271–282.
2. Pierre M. *Nonlinear fast diffusion with measures as data.* In "Nonlinear parabolic equations: qualitative properties of solutions" , ed. by L. Boccardo and A. Tesei. Pitman Research Notes in Mathematics, 1987, 149, P. 179–188.
3. Bernis Francisco *Elliptic and parabolic semilinear problems without conditions at infinity*, Arch. Rational Mech. Anal, 1989, Vol. 106, no 3, P.217–241.
4. Di Benedetto, Herrero M.A. *Non-negative solutions of the evolution p-Laplacian equation. Initial traces and Cauchy problem when* $1 < p < 2$, Arch. Rational Mech. Anal, 1990, Vol. 111, no 3, P. 225–290.
5. McLeod B., Pelitier L.A., Vazquez J.L. *Solutions of nonlinear Ode appearing in the theory of diffusion with absorption*, Differential Integral Equations, 1991, Vol. 4, no 1, P.1–14.
6. Vazquez J.L., Walias M. *Existence and uniqueness of solutions of diffusion-absorption equations with general data*, Differential Integral Equations, 1994, Vol. 7, no 1, P.15–36.
7. Бокало Н.М. *Краевые задачи для полулинейных параболических уравнений в неограниченных областях без условий на бесконечности*, Сиб. мат. журн., 1996, Т. 37, №5, С. 977–985.
8. Gladkov A., Guedda M. *Diffusion-absorption equation without growth restrictions on the data at infinity*, J. Math. Anal. Appl, 2002, Vol. 274, no 1, P. 16–37.
9. Marchi C, Tesei A. *Higher-order parabolic equations without conditions at infinity*, J. Math. Anal. Appl, 2002, Vol. 269, no 1, P. 352–368.
10. Herrero M.A., Velázquez J.J.L. *On the dynamics of a semilinear heat equation with strong absorption*, Comm. Part. Differ. Equat., 1989, V. 14, no 12, P. 1653–1715.
11. Бокало М., Дмитрів В. *Крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь в анізотропних просторах* // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат., 2001, Вип.59. С.84–101.
12. Bokalo M.M., Sikorsky V.M. *The well-posedness of a Fourier problem for quasilinear parabolic equations of arbitrary order in unisotropic spaces*, Mat. Studii, 1997, Vol. 8, no 1, P. 53–70.

13. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – Москва: Мир, 1972. – 608 с.
14. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – Москва: Изд-во иностранной литературы, 1958. – 475 с.
15. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – Москва: Мир, 1978. – 336 с.

Львівський національний університет імені Івана Франка

Надійшло 23.11.2004
Після переробки 20.04.2006