УДК 517.95

Н. І. Гузіль, С. П. Лавренюк

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ НАПІВЛІНІЙНОЇ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ В ОБЛАСТІ, НЕОБМЕЖЕНІЙ ЗА ПРОСТОРОВИМИ ЗМІННИМИ

N. I. Huzil', S. P. Lavrenyuk. *Boundary value problem for a semilinear ultraparabolic system in an unbounded domain with respect to space variables*, Matematychni Studii, **26** (2006) 161–173.

Trere are considered some conditions of the existence and uniqueness of a generalized solution of the boundary value problem for the system

$$u_t + \sum_{i=1}^{l} A_i(x,t)u_{y_i} - \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij}(x,y,t)u_{x_i})_{x_j} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} B_i(x,y,t)u_{x_i} + C(x,y,t)u + g(x,t,u) = f(x,y,t)$$

in the domain $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^l_+ \times (0,T)$, where u, g, f are vector functions and A_i, B_{sj}, C, B_j are matrices of the m-th order.

Н. И. Гузиль, С. П. Лавренюк. *Смешанная задача для полулинейной ультрапараболической системы в области, неограниченной по пространственым переменным* // Математичні Студії. – 2006. – Т.26, №2. – С.161–173.

Получены условия существования и единственности обобщенного решения смешанной задачи для системы вида

$$u_t + \sum_{i=1}^{l} A_i(x,t)u_{y_i} - \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij}(x,y,t)u_{x_i})_{x_j} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} B_i(x,y,t)u_{x_i} + C(x,y,t)u + g(x,t,u) = f(x,y,t)$$

в области $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^l_+ \times (0,T)$, где u, g, f — вектор-функции, A_i, B_{sj}, C, B_j — матрицы порядка m.

Ультрапараболічні рівняння почали досліджувати ще в першій половині XX століття. Рівняння такого типу, які іноді називають параболічними з багатьма часами, виникли як математична модель броунівського руху фізичної системи з n ступенями свободи ([1]). Рівняння Колмогорова багаторазово узагальнювали і досліджували різні автори

2000 *Mathematics Subject Classification:* 35K70.

(див. бібліографію в [2]). Зазначимо, що найбільш повні результати для лінійних ультрапараболічних рівнянь одержали Ейдельман С. Д., Івасишен С. Д. та їхні учні (див., наприклад, [2–5]). Окремі результати для нелінійних ультрапараболічних рівнянь в необмежених областях отримано в [6–9].

У цій статті пропонуємо певні умови існування та єдиності узагальненого розв'язку мішаної задачі для напівлінійної ультрапараболічної системи в області, необмеженій за просторовими змінними.

Нехай $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x > 0\}$, $\mathbb{R}^l_+ = \{y \in \mathbb{R}^l : y > 0\}$. В області $Q_T = \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^l_+ \times (0,T)$, $0 < T < +\infty$ розглянемо систему рівнянь

$$A(u) \equiv u_t + \sum_{i=1}^{l} A_i(x,t) u_{y_i} - \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij}(x,y,t) u_{x_i})_{x_j} + \tag{1}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} B_i(x,y,t) u_{x_i} + C(x,y,t)u + g(x,t,u) = f(x,y,t),$$

де $u = \mathrm{col}(u_1,\ldots,u_m), g = \mathrm{col}(g_1,\ldots,g_m), f = \mathrm{col}(f_1,\ldots,f_m)$, A_i, B_{sj}, C, B_j — матриці порядку m, $i \in \{1,\ldots,l\}$, $s,j \in \{1,\ldots,n\}$.

Позначимо $\Sigma_\tau = \partial\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^l_+ \times [0,\tau]$, $\tau \in [0,T]$, $O = \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^l_+$, $D_T = \mathbb{R}^n_+ \times (0,T)$, також позначимо через $O^k = \Pi^k_n \times \Pi^k_l$ для будь-яких $k \in \mathbb{N}$, де $\Pi^k_n = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : x_i < k, \quad i \in \{1,\ldots,n\}\}$, $\Pi^k_l = \{y \in \mathbb{R}^l_+ : y_i < k, \quad i \in \{1,\ldots,l\}\}$, $P^k = \Pi^k_n \times \mathbb{R}^l_+$, $P^k_\tau = P^k \cap \{t = \tau\}$, $\quad Q^k_\tau = P^k \times (0,\tau)$, $\Sigma^k_\tau = \partial\Pi^k_n \times \mathbb{R}^l_+ \times (0,\tau)$, $S^k_\tau = \Pi^k_n \times \partial\mathbb{R}^l_+ \times (0,\tau)$, $\tau \in [0,T]$.

Введемо простори:

$$L^r_{loc}(\overline{O}) = \{u : u \in L^r(O^k), \forall k \in \mathbb{N}\}, \quad r \in (1,+\infty];$$

$$V^{1,1}_\psi(P^k) = \left\{ v : \int\limits_{P^k} \left[|v|^2 + \sum_{i=1}^{l} |v_{y_i}|^2 + \sum_{i=1}^{n} |v_{x_i}|^2 \right] \psi(|y|) dxdy < \infty, \quad v|_{S^k_0} = 0, \quad v|_{\Sigma^k_0} = 0 \right\},$$

де функція $\psi \in C^1([0,+\infty))$ така, що $\psi(\xi) > 0$, $\psi'(\xi) < 0$ на $[0,+\infty)$ і $(\forall y \in \mathbb{R}^l_+)$: $\left| \frac{\psi_{y_i}(|y|)}{\psi(|y|)} \right| \le \psi_0$, $i \in \{1,\ldots,l\}$, де $\psi_0 = \mathrm{const}$, $\int_{\mathbb{R}^l_+} \psi(|y|)dy = \psi_1 < \infty$;

$$L^q_\psi(P^k) = \left\{ v : \int\limits_{P^k} |v|^q \psi(|y|) dxdy < \infty \right\}, \quad q \in (1,+\infty);$$

$$V^{1,0}_\psi(P^k) = \left\{ v : \int\limits_{P^k} \left[|v|^2 + \sum_{i=1}^{n} |v_{x_i}|^2 \right] \psi(|y|) dxdy < \infty, \quad v|_{\Sigma^k_0} = 0 \right\}.$$

$$L^q_{\psi,loc}(\overline{O}) = \left\{ v : v \in L^q_\psi(P^R), \forall R > 1 \right\}, \quad q \in (1,+\infty);$$

$$V^{1,0}_{\psi,loc}(\overline{O}) = \left\{ v : v, v_{x_i} \in L^2_{\psi,loc}(\overline{O}), i \in \{1,\ldots,n\}, \quad v|_{\Sigma_0} = 0 \right\};$$

$$V^{1,1}_{\psi,loc}(\overline{O}) = \left\{ v : v, v_{x_i}, v_{y_j} \in L^2_{\psi,loc}(\overline{O}), i \in \{1,\ldots,n\}, \ j \in \{1,\ldots,l\}, \quad v|_{S_0} = 0, \quad v|_{\Sigma_0} = 0 \right\};$$

Зауваження. Прикладами ваги ψ у вище означених просторах можуть бути функції вигляду: 1) $\psi(\xi) = e^{-\gamma\xi}$, $\gamma > 0$, $\quad$ 2) $\psi(\xi) = \frac{1}{1+\xi^\kappa}$, $\kappa > l$.

Говоритимемо, що для коефіцієнтів системи (1) виконуються відповідно умови (**A**), (**B**), (**C**), (**G**), якщо:
(**A**) : елементи матриць A_i неперервні і обмежені в $\overline{D}_T$; $A_i(x,t) = A_i^*(x,t)$, $i \in \{1,\ldots,l\}$ для всіх $(x,t) \in D_T$;
(**B**) : елементи матриць B_{ij}, B_i належать до простору $L^\infty(Q_T)$ для всіх $i,j \in \{1,\ldots,n\}$; для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$ і для всіх $\xi \in \mathbb{R}^m$ $\sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x,y,t)\xi_i,\xi_j) \geq b_0 \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2$, де $b_0 > 0$, $b_0 = \text{const}$;
(**C**) : елементи матриці C належать до простору $L^\infty(\mathbb{R}_+^l \times (0,T); L^\infty_{loc}(\overline{\mathbb{R}}_+^n))$; для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$ і для всіх $\xi \in \mathbb{R}^m$ виконується нерівність $(C(x,y,t)\xi,\xi) \geq c_0|\xi|^2$, $c_0 = \text{const}$.
(**G**) : функції $(x,t) \to g(x,t,\xi)$ є вимірними на D_T для всіх $\xi \in \mathbb{R}^m$; функції $\xi \to g(x,t,\xi)$ неперервні в $\mathbb{R}^m$ майже для всіх $(x,t) \in D_T$ і існують такі додатні сталі g_0, g_1, що для всіх ξ, η з $\mathbb{R}^m$, майже всіх $(x,t) \in D_T$ та $i \in \{1,\ldots,m\}$ і $p > 2$ виконуються нерівності

$$|g_i(x,t,\xi)| \leq g_1 \sum_{j=1}^m |\xi_j|^{p-1}, \quad (g(x,t,\xi) - g(x,t,\eta), \xi - \eta) \geq g_0|\xi - \eta|^p.$$

Розглянемо випадок $\sum_{i=1}^l A_i(x,t) \geq 0$ на D_T. Позначимо $S_\tau = \mathbb{R}_+^n \times \partial\mathbb{R}_+^l \times (0,\tau)$, $\tau \in [0,T]$. Задамо для системи (1) крайові умови

$$u(x,y,t) = 0 \text{ на } \Sigma_T, \tag{2}$$

$$u(x,y,t) = 0 \text{ на } S_T, \tag{3}$$

та початкову умову

$$u(x,y,0) = u_0(x,y) \text{ на } O. \tag{4}$$

Означення. Функцію u, яка належить до простору

$$W = (C([0,T]; L^2_{\psi,loc}(\overline{O})) \cap L^2((0,T); V^{1,0}_{\psi,loc}(\overline{O})) \cap L^p((0,T); L^p_{\psi,loc}(\overline{O})))^m,$$

задовольняє рівність

$$\int\limits_{O_T} (u,v)\sigma(x)\psi(|y|)dxdy + \int\limits_{Q_T} \Big[-(u,v_t)\sigma(x)\psi(|y|) - \sum_{i=1}^l (A_i(x,t)u, (v\psi)_{y_i})\sigma(x) + \tag{5}$$

$$+ \sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x,y,t)u_{x_i}, (v\sigma(x))_{x_j})\psi(|y|) + \sum_{i=1}^n (B_i(x,y,t)u_{x_i}, v)\sigma(x)\psi(|y|) +$$

$$+ (C(x,y,t)u,v)\sigma(x)\psi(|y|) + (g(x,t,u), v\sigma(x)\psi(|y|)) -$$

$$- (f(x,y,t),v)\psi(|y|)\sigma(x) \Big] dxdydt - \int\limits_{O_0} (u_0,v)\sigma(x)\psi(|y|)dxdy = 0$$

для всіх $v \in (L^2((0,T); V^{1,1}_{\psi,loc}(\overline{O})) \cap L^p((0,T); L^p_\psi(\overline{O})))^m$, які мають обмежені носії за змінною x, $v_t \in (L^2((0,T); L^2_{\psi,loc}(\overline{O})))^m$, для будь-якої функції $\sigma \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, $\sigma(x) \geq 0$ в $\mathbb{R}^n$ називатимемо *узагальненим розв'язком* задачі (1) – (4) в області Q_T.

Теорема. *Нехай виконуються умови* (**A**), (**B**), (**C**), (**G**), $u_0 \in (L^2_{\psi,loc}(\overline{O}))^m$, $f \in (L^{p'}((0,T); L^{p'}_{\psi,loc}(\overline{O})))^m$, $p' = p/(p-1)$, $\sum_{i=1}^{l} A_i(x,t) \geq 0$ *для всіх* $(x,t) \in D_T$, $2 < p \leq \frac{2n}{n-2}$, *якщо* $n > 2$ *і* $p > 2$, *якщо* $n \in \{1,2\}$. *Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1) – (4) в області* Q_T.

Доведення. Розглянемо допоміжну задачу

$$A(u) \equiv f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q_T^R, \tag{6}$$

$$u|_{S_T^R} = 0, \quad u|_{\Sigma_T^R} = 0, \tag{7}$$

$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \quad (x,y) \in P^R, \tag{8}$$

$R > 1$. Побудуємо послідовність функцій $u^N(x,y,t) = \sum_{s=1}^{N} c_s^N(t)\varphi^s(x,y)$, $N \in \mathbb{N}$, де $\{\varphi^s\}$ — база простору $V_\psi^{1,1}(P^R)$, а c_s^N, $s \in \{1,\dots,N\}$ є розв'язком такої задачі Коші:

$$\int\limits_{P^R} \Big[(u_t^N, \varphi^s) + \sum_{i=1}^{l} (A_i(x,t)u_{y_i}^N, \varphi^s) + \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij}(x,y,t)u_{x_i}^N, \varphi_{x_j}^s) + (C(x,y,t)u^N, \varphi^s) + \tag{9}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (B_i(x,y,t)u_{x_i}^N, \varphi^s) + (g(x,t,u^N), \varphi^s) - (f(x,y,t), \varphi^s) \Big] \psi(|y|)dxdy = 0,$$

$$c_s^N(0) = u_{0,s}^N, \quad s \in \{1,\dots,N\}, \tag{10}$$

причому

$$u_0^N(x,y) = \sum_{s=1}^{N} u_{0,s}^N \varphi^s(x,y), \quad \lim_{N\to\infty} ||u_0^N - u_0||_{L^2_\psi(P^R)} = 0.$$

На підставі теореми Каратеодорі [10, с. 54] існує абсолютно неперервний розв'язок задачі (9), (10), визначений на проміжку $[0, t_0]$. З оцінок, одержаних нижче, випливатиме, що $t_0 = T$.

Помножимо кожне рівняння системи (9) відповідно на функцію $c_s^N(t)e^{-\alpha t}$, де $\alpha > 0$ виберемо пізніше, додамо їх за s від 1 до N і проінтегруємо по $[0,\tau]$, $\tau \in (0,T]$. Після виконання цих операцій одержимо рівність

$$\int\limits_{Q_\tau^R} \Big[(u_t^N, u^N) + \sum_{i=1}^{l} (A_i(x,t)u_{y_i}^N, u^N) + \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij}(x,y,t)u_{x_i}^N, u_{x_j}^N) + (C(x,y,t)u^N, u^N) + \tag{11}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (B_i(x,y,t)u_{x_i}^N, u^N) + (g(x,t,u^N), u^N) - (f(x,y,t), u^N) \Big] \psi(|y|)e^{-\alpha t}dxdydt = 0.$$

Перетворимо і оцінимо кожний доданок рівності (11) окремо, враховуючи відповідні умови теореми:

$$\underset{1}{\mathrm{Im}} \equiv \int\limits_{Q_\tau^R} (u_t^N, u^N)\psi(|y|)e^{-\alpha t}dxdydt = \frac{1}{2}\int\limits_{P_\tau^R} |u^N|^2\psi(|y|)e^{-\alpha\tau}dxdy - \frac{1}{2}\int\limits_{P_0^R} |u_0^N|^2\psi(|y|)dxdy +$$

$$+ \frac{\alpha}{2}\int\limits_{Q_\tau^R} |u^N|^2\psi(|y|)e^{-\alpha t}dxdydt;$$

$$\operatorname*{Im}_2 \equiv \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^{l} (A_i(x,t)u^N_{y_i}, u^N)\psi(|y|)e^{-\alpha t}dxdydt \geq -\frac{a_1\psi_0}{2} \int\limits_{Q_\tau^R} |u^N|^2\psi(|y|)e^{-\alpha t}dxdydt;$$

$$\operatorname*{Im}_3 \equiv \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij}(x,y,t)u^N_{x_i}, u^N_{x_j})\psi(|y|)e^{-\alpha t}dxdydt \geq b_0 \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^{n} |u^N_{x_i}|^2\psi(|y|)e^{-\alpha t}dxdydt;$$

$$\operatorname*{Im}_4 \equiv \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^{n} (B_i(x,y,t)u^N_{x_i}, u^N)\psi(|y|)e^{-\alpha t}dxdydt \leq$$

$$\leq \frac{b_3}{2} \int\limits_{Q_\tau^R} \left(\delta \sum_{i=1}^{n} |u^N_{x_i}|^2 + \frac{n}{\delta}|u^N|^2 \right) \psi(|y|)e^{-\alpha t}dxdydt,$$

де $b_3 = \max\limits_i \operatorname*{ess\,sup}\limits_{Q_T} ||B_i||$ і $\delta > 0$, $\|\cdot\|$ — евклідова норма матриці;

$$\operatorname*{Im}_5 \equiv \int\limits_{Q_\tau^R} (C(x,y,t)u^N, u^N)\psi(|y|)e^{-\alpha t}dxdydt \geq c_0 \int\limits_{Q_\tau^R} |u^N|^2\psi(|y|)e^{-\alpha t}dxdydt;$$

$$\operatorname*{Im}_6 \equiv \int\limits_{Q_\tau^R} (g(x,t,u^N), u^N)\psi(|y|)e^{-\alpha t}dxdydt \geq g_0 \int\limits_{Q_\tau^R} |u^N|^p\psi(|y|)e^{-\alpha t}dxdydt;$$

$$\operatorname*{Im}_7 \equiv \int\limits_{Q_\tau^R} (f(x,y,t), u^N)\psi(|y|)e^{-\alpha t}dxdydt \leq \frac{g_0}{2} \int\limits_{Q_\tau^R} |u^N|^p\psi(|y|)e^{-\alpha t}dxdydt +$$

$$+\frac{\mu_1}{2} \int\limits_{Q_\tau^R} |f|^{p'}\psi(|y|)e^{-\alpha t}dxdydt.$$

Враховуючи оцінки $\mathrm{Im}_1, \ldots, \mathrm{Im}_7$, з рівності (11) отримаємо

$$\int\limits_{P_\tau^R} |u^N|^2\psi(|y|)e^{-\alpha\tau}dxdy + \int\limits_{Q_\tau^R} \left[\left(\alpha - \frac{b_3 n}{\delta} - a_1\psi_0 - 2c_0 \right) |u^N|^2 + (2b_0 - b_3\delta) \sum_{i=1}^{n} |u^N_{x_i}|^2 + \right. \tag{12}$$

$$\left. + g_0|u^N|^p \right] \psi(|y|)e^{-\alpha t}dxdydt \leq \mu_1 \int\limits_{Q_\tau^R} |f|^{p'}\psi(|y|)e^{-\alpha t}dxdydt + \int\limits_{P_0^R} |u^N_0|^2\psi(|y|)dxdy.$$

Нехай $\delta = \frac{b_0}{b_3}$, $\alpha = \max\{b_0 + \frac{b_3^2 n}{b_0} + 2c_0 + a_1\psi_0, b_0\}$. Тоді з нерівності (12) одержимо оцінки

$$\int\limits_{P_\tau^R} |u^N|^2\psi(|y|)dxdy \leq \mu_3, \quad \tau \in [0,T], \tag{13}$$

$$\int\limits_{Q_T^R} \left[|u^N|^2 + \sum_{i=1}^{n} |u^N_{x_i}|^2 + |u^N|^p \right] \psi(|y|)dxdydt \leq \mu_3, \quad \int\limits_{Q_T^R} |g(x,t,u^N)|^{p'}dxdydt \leq \mu_3, \tag{14}$$

де стала μ_3 не залежить від N.

На підставі оцінок (13) – (14) існує підпослідовність $\{u^{N_k}\}\subset\{u^N\}$ така, що при $k\to\infty$

$$\begin{aligned}
&u^{N_k}\to u \quad *-\text{слабко в } (L^\infty((0,T);L^2_\psi(P^R)))^m,\\
&u^{N_k}\to u \quad \text{слабко в } (L^2((0,T);V^{1,0}_\psi(P^R)))^m,\\
&u^{N_k}\to u \quad \text{слабко в } (L^p((0,T);L^p_\psi(P^R)))^m,\\
&g(x,t,u^{N_k})\to z \quad \text{слабко в } (L^{p'}((0,T);L^{p'}_\psi(P^R)))^m,\\
&u^{N_k}(\cdot,\cdot,T)\to\chi \quad \text{слабко в } (L^2_\psi(P^R))^m.
\end{aligned}$$

Помножимо рівняння системи (9) (записані для N_k) відповідно на функції $z_s^{N_{k_0}}\in C^1([0,T])$, додамо їх за s від 1 до N_{k_0} і проінтегруємо по проміжку $[0,T]$. Одержимо рівність

$$\int\limits_{Q_T^R}\Big[-(u^{N_k},v_t^{N_{k_0}})+\Big(\sum_{i=1}^{l}A_iu^{N_k}_{y_i}-\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}u^{N_k}_{x_i})_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}B_iu^{N_k}_{x_i}+Cu^{N_k}+g(x,t,u^{N_k})- \tag{15}$$

$$-f(x,y,t),v^{N_{k_0}}\Big)\Big]\psi(|y|)dxdydt+\int\limits_{P_T^R}(u^{N_k},v^{N_{k_0}})\psi(|y|)dxdy-\int\limits_{P_0^R}(u_0^{N_k},v^{N_{k_0}})\psi(|y|)dxdy=0,$$

де $v^{N_{k_0}}=\sum_{s=1}^{N_{k_0}}z_s^{N_{k_0}}(t)\varphi^s(x,y),\quad N_k\ge N_{k_0}$. Перейшовши до границі в (15) спочатку при $k\to\infty$, а потім при $k_0\to+\infty$, отримаємо рівність

$$\int\limits_{Q_T^R}\Big\{\Big[-(u,v_t)-\sum_{i=1}^{l}(A_iu,v_{y_i})+\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}u_{x_i},v_{x_j})+\sum_{i=1}^{n}(B_iu_{x_i},v)+(Cu,v)+(z,v)- \tag{16}$$

$$-(f,v)\Big]\psi(|y|)-\sum_{i=1}^{l}(A_iu,v)\psi_{y_i}(|y|)\Big\}dxdydt+\int\limits_{P_T^R}(\chi,v)\psi(|y|)dxdy-\int\limits_{P_0^R}(u_0,v)\psi(|y|)dxdy=0,$$

правильну для довільної функції $v\in(L^2((0,T);V^{1,1}_\psi(P^R))\cap L^p((0,T);L^p_\psi(P^R)))^m$, $v_t\in(L^2((0,T);L^2_\psi(P^R)))^m$. Із (16) випливає, що u є розв'язком системи (1) в сенсі розподілів. Отже,

$$u_t=-\sum_{i=1}^{l}A_iu_{y_i}+\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}u_{x_i})_{x_j}-\sum_{i=1}^{n}B_iu_{x_i}-Cu-z+f$$

в Q_T, тому $u_t\in(L^2((0,T);(V^{1,0}_\psi(P^R))^*)+L^{p'}((0,T);L^{p'}_\psi(P^R)))^m$. Оскільки $u\in(L^2((0,T);V^{1,0}_\psi(P^R))\cap L^p((0,T);L^p_\psi(P^R)))^m$, то згідно з теоремою 1.17 ([11, с. 177]) $u\in(C([0,T];L^2_\psi(P^R)))^m$ і правильна формула інтегрування частинами

$$\int\limits_{Q_\tau^R}(u,u_t)\psi(|y|)dxdydt=\frac{1}{2}\int\limits_{P_\tau^R}|u|^2\psi(|y|)dxdy-\frac{1}{2}\int\limits_{P_0^R}|u^2|\psi(|y|)dxdy.$$

З (16) також випливає, що $u(x,y,T)=\chi(x,y)$. Далі зовсім подібно як в [12, с.26] легко довести, що $u|_{t=0}=u_0$. Крім того, рівність (16) правильна і для $v=u$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{P_T^R}|u|^2\psi(|y|)dxdy+\int\limits_{Q_T^R}\Big[\Big(\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}u_{x_i},u_{x_j})+\sum_{i=1}^{n}(B_iu_{x_i},u)+(Cu,u)+ \tag{17}$$

$$+(z,u)-(f,u)\Big)\psi(|y|)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}(A_iu,u)\psi_{y_i}(|y|)\Big]dxdydt-\frac{1}{2}\int\limits_{P_0^R}|u_0|^2\psi(|y|)dxdy=0.$$

Використовуючи монотонність $g(x,t,u)$ і (17) доводимо, що $g(x,t,u)=z(x,y,t)$ (доведення подібне як в [12, с.171]).

Отже, ми отримали, що існує функція

$$u\in W_R=(C([0,T];L^2_\psi(P^R))\cap L^2((0,T);V^{1,0}_\psi(P^R))\cap L^p((0,T);L^p_\psi(P^R)))^m,$$

яка задовольняє рівність

$$\int\limits_{Q_T^R}\Big[-(u,v_t)\psi(|y|)-\sum_{i=1}^{l}(A_iu,(v\psi(|y|))_{y_i})+\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}u_{x_i},v_{x_j})\psi(|y|)+ \tag{18}$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(B_iu_{x_i},v)\psi(|y|)+(Cu,v)\psi(|y|)+(g(x,t,u),v)\psi(|y|)-(f(x,y,t),v)\psi(|y|)\Big]dxdydt+$$

$$+\int\limits_{P_T^R}(u,v)\psi(|y|)dxdy-\int\limits_{P_0^R}(u_0,v)\psi(|y|)dxdy=0$$

для всіх $v\in(L^2((0,T);V^{1,1}_\psi(P^R))\cap L^p((0,T);L^p_\psi(P^R)))^m$, $v_t\in(L^2((0,T);L^2_\psi(P^R)))^m$ і також задовольняє крайові умови (7).

Розглянемо задачу (6) – (8) при $R=k$, з правою частиною f^k і початковою функцією u_0^k:

$$f^k=\begin{cases}f(x,y,t), & (x,y,t)\in Q_T^k,\\ 0, & (x,y,t)\in Q_T\setminus Q_T^k\end{cases};\quad u_0^k=\begin{cases}u_0, & (x,y)\in P_0^k,\\ 0, & (x,y)\in O_0\setminus P_0^k.\end{cases}$$

Нехай $k\in\{2,3,4,\ldots\}$. Для кожного k існує функція $u^k\in W_k$, яка задовольняє рівність (18). Продовжимо функцію u^k нулем на область $Q_T\backslash Q_T^k$. Маємо послідовність функцій $\{u^k\}$, кожна з яких задовольняє рівність

$$\int\limits_{Q_T}\Big[-(u^k,v_t)-\sum_{i=1}^{l}(A_iu^k,v_{y_i})+\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}u^k_{x_i},v_{x_j})+ \tag{19}$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(B_iu^k_{x_i},v)+(Cu^k,v)+(g(x,t,u^k),v)-(f(x,y,t),v)\Big]dxdydt+$$

$$+\int\limits_{O_T}(u^k,v)dxdy-\int\limits_{O_0}(u_0^k,v)dxdy=0$$

для всіх $v\in(L^2((0,T);V^{1,1}_{\psi,loc}(\overline{O}))\cap L^p((0,T);L^p_\psi(\overline{O})))^m$, $v_t\in(L^2((0,T);L^2_{\psi,loc}(\overline{O})))^m$, supp v — обмежений.

Доведемо фундаментальність цієї послідовності у певних просторах. Нехай $R>1$ — довільне фіксоване число, $s>R$, $k>R$. Розглянемо рівності (34) для u^s і u^k, віднімемо їх і позначимо $u^{s,k}=u^s-u^k$. Одержимо рівність

$$\int\limits_{Q_T}\Big[-(u^{s,k},v_t)-\sum_{i=1}^{l}(A_iu^{s,k},v_{y_i})+\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}u^{s,k}_{x_i},v_{x_j})+\sum_{i=1}^{n}(B_iu^{s,k}_{x_i},v)+ \tag{20}$$

$$+(Cu^{s,k},v)+(g(x,t,u^s)-g(x,t,u^k),v)\Big]dxdydt+\int\limits_{O_T}(u^{s,k},v)dxdy=0$$

для всіх $v\in(L^2((0,T);V^{1,1}_{\psi,loc}(\overline{O}))\cap L^p((0,T);L^p_{\psi}(\overline{O})))^m$, $v_t\in(L^2((0,T);L^2_{\psi,loc}(\overline{O})))^m$, $\operatorname{supp} v\subset P^R\times(0,T)$.

Нехай $\tau_0,\tau_1\in(0,T)$, $\tau_0<\tau_1$, $\theta_d(t)$ — неперервна кусково лінійна функція на $[0,T]$, $\theta_d(t)=1$, якщо $\tau_0+\frac{2}{d}<t<\tau_1-\frac{2}{d}$, $\theta_d(t)=0$ при $t>\tau_1-\frac{1}{d}$ і при $t<\tau_0+\frac{1}{d}$. Нехай ρ_h — регуляризуюча послідовність в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\rho_h(t)=\rho_h(-t)$, $\int_{-\infty}^{\infty}\rho_h(t)dt=1$, $\operatorname{supp}\rho_h\subset[-\frac{1}{h},\frac{1}{h}]$; ω_h — регуляризуюча послідовність в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\omega_h(\xi)=\omega_h(-\xi)$, $\int_{-\infty}^{\infty}\omega_h(\xi)d\xi=1$, $\operatorname{supp}\omega_h\subset[-\frac{1}{h},\frac{1}{h}]$. Нехай $h\in\mathbb{N}$, $h>2d$, $\eta_h=\omega_h\rho_h$, $\Phi_d(y)=\sqrt{\psi(|y|)}\cdot I_1^{(1)}(y_1)\cdot\dots\cdot I_l^{(d)}(y_l)$, де $I_i^{(d)}(y_i)$ — кусково-лінійна, неперервна на $\mathbb{R}$, $I_i^{(d)}(y_i)=0$ при $y_i>\widetilde{y}_i-\frac{1}{d}$, $I_i^{(d)}(y_i)=1$ при $y_i<\widetilde{y}_i-\frac{2}{d}$, де $\widetilde{y}_i\in(0,+\infty)$.

Приймемо в (20), що $v=((\theta_d u^{s,k}\Phi_d)*\eta_h*\eta_h)\theta_d\Phi_d\phi_R(x)$, де

$$\phi_R(x)=[H_R(x)]^\alpha,\quad H_R(x)=\begin{cases}\frac{1}{R}(R^2-|x|^2), & 0\le|x|\le R,\\ 0, & |x|>R,\end{cases}$$

тобто

$$v(x,y,t)=\theta_d(t)\Phi_d(y)\phi_R(x)\int\limits_{\mathbb{R}^{l+1}}\int\limits_{\mathbb{R}^{l+1}}\theta_d(t_1)\Phi_d(y^1)u^{s,k}(x,y^1,t_1)\omega_h(|y^2-y^1|)\rho_h(t_2-t_1)dy^1dt_1\times$$
$$\times\omega_h(|y-y^2|)\rho_h(t-t_2)dy^2dt_2.$$

Тоді

$$-\int\limits_{Q_T}(u^{s,k},v_t)dxdydt=-\int\limits_{Q_T}\phi_R(x)(u^{s,k},\theta_d'\Phi_d((\theta_d\Phi_d u^{s,k})*\eta_h*\eta_h))dxdydt-$$
$$-\int\limits_{Q_T}\phi_R(x)\Bigg(u^{s,k},\theta_d\Phi_d\int\limits_{\mathbb{R}^{l+1}}\Bigg[\int\limits_{\mathbb{R}^{l+1}}\theta_d(t_1)\Phi_d(y^1)u^{s,k}(x,y^1,t_1)\omega_h(|y^2-y^1|)\rho_h(t_2-t_1)dy^1dt_1\Bigg]\times$$
$$\times\omega_h(|y-y^2|)\frac{\partial}{\partial t}\rho_h(t-t_2)dy^2dt_2\Bigg)dxdydt=J_1+J_2;$$

$$J_1\xrightarrow[h\to\infty]{}-\int\limits_{Q_T}\phi_R(x)(u^{s,k},u^{s,k}\theta_d'\Phi_d^2\theta_d)dxdydt\xrightarrow[d\to\infty]{}\frac{1}{2}\int\limits_{\Pi_l^{\widetilde{y}}}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\phi_R(x)|u^{s,k}\sqrt{\psi}|^2dxdy|_{t=\tau_1}-$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Pi_l^{\widetilde{y}}}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\phi_R(x)|u^{s,k}\sqrt{\psi}|^2dxdy|_{t=\tau_0},$$

майже для всіх $\tau_0,\tau_1\in[0,T]$ і для майже всіх $\widetilde{y}=(\widetilde{y}_1,\dots,\widetilde{y}_l)\in\mathbb{R}^l_+$;

$$J_2=-\int\limits_{Q_T}\phi_R(x)\Bigg(u^{s,k}\theta_d\Phi_d,\int\limits_{\mathbb{R}^{l+1}}\Bigg[\int\limits_{\mathbb{R}^{l+1}}\frac{\partial}{\partial t_1}\big(\theta_d(t_1)\Phi_d(y^1)u^{s,k}(x,y^1,t_1)\big)\times$$
$$\times\omega_h(|y^2-y^1|)\rho_h(t_2-t_1)dy^1dt_1\Bigg]\omega_h(|y-y^2|)\rho_h(t-t_2)dy^2dt_2\Bigg)dxdydt=$$

$$= -\int\limits_{Q_T}\int\limits_{\mathbb{R}^{l+1}} \phi_R(x)\Big(u^{s,k}\theta_d\Phi_d\omega_h(|y-y^2|)\rho_h(t-t_2)\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^{l+1}} \frac{\partial}{\partial t_1}\big(\theta_d(t_1)\Phi_d(y^1)u^{s,k}(x,y^1,t_1)\big)\omega_h(|y^2-y^1|)\rho_h(t_2-t_1)dy^1dt_1\Big)dy^2dt_2dxdydt =$$

$$= -\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\int\limits_{\mathbb{R}^{l+1}} \phi_R(x)\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^{l+1}} u^{s,k}(x,y^1,t_1)\theta_d(t_1)\Phi_d(y^1)\omega_h(|y-y^1|)\rho_h(t-t_1)dy^1dt_1\times$$

$$\times\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^{l+1}} \theta_d(t_1)\Phi_d(y^1)u^{s,k}(x,y^1,t_1)\omega_h(|y-y^1|)\rho_h(t-t_1)dy^1dt_1\Bigg)_t\Bigg)dxdydt = 0.$$

Розглянемо другий інтеграл з рівності (20)

$$\sum_{i=1}^{l}\int\limits_{Q_T}\phi_R(x)(A_iu^{s,k},v_{y_i})dxdydt = \sum_{i=1}^{l}\int\limits_{Q_T}\phi_R(x)\big(A_iu^{s,k},\big[((\theta_d\Phi_du^{s,k})*\eta_h*\eta_h)\theta_d\Phi_d\big]_{y_i}\big)dxdydt =$$

$$= \sum_{i=1}^{l}\int\limits_{Q_T}\phi_R(x)\big(A_iu^{s,k},((\theta_d\Phi_du^{s,k})*\eta_h*\eta_h)_{y_i}\theta_d\Phi_d\big)dxdydt+$$

$$+\sum_{i=1}^{l}\int\limits_{Q_T}\phi_R(x)\big(A_iu^{s,k},((\theta_d\Phi_du^{s,k})*\eta_h*\eta_h)\theta_d\Phi_{dy_i}\big)dxdydt = J_3+J_4.$$

Подібно, як і для J_2, легко довести, що $J_3=0$. Далі,

$$J_4 = \sum_{i=1}^{l}\int\limits_{Q_T}\phi_R(x)\left(A_iu^{s,k}\theta_d\sqrt{\psi},((\theta_d\Phi_du^{s,k})*\eta_h*\eta_h)\left(\prod_{j=1}^{l}I_j^{(d)}(y_j)\right)_{y_i}\right)dxdydt+$$

$$+\sum_{i=1}^{l}\int\limits_{Q_T}\phi_R(x)\left(A_iu^{s,k}\theta_d,((\theta_d\Phi_du^{s,k})*\eta_h*\eta_h)\prod_{j=1}^{l}I_j^{(d)}(y_j)\right)(\sqrt{\psi})_{y_i}dxdydt\underset{h\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\underset{h\to\infty}{\longrightarrow}\sum_{i=1}^{l}\int\limits_{Q_T}\phi_R(x)\left(A_iu^{s,k}\theta_d^2\psi(|y|),u^{s,k}\left(\prod_{j=1}^{l}I_j^{(d)}(y_j)\right)_{y_i}\cdot\prod_{j=1}^{l}I_j^{(d)}(y_j)\right)dxdydt+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}\int\limits_{Q_T}\phi_R(x)\left(A_iu^{s,k}\theta_d^2,u^{s,k}\prod_{j=1}^{l}(I_j^{(d)}(y_j))^2\right)(\psi(|y|))_{y_i}dxdydt\underset{d\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\underset{d\to\infty}{\longrightarrow}\sum_{i=1}^{l}\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\int\limits_{\partial D^{\tilde{y}}}\phi_R(x)(A_iu^{s,k},u^{s,k})\psi(|y|)\cos(\nu,y_i)dS_ydxdt+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\int\limits_{\Pi_l^{\tilde{y}}}\phi_R(x)(A_iu^{s,k},u^{s,k})(\psi(|y|))_{y_i}dxdydt,$$

де $\partial D^{\widetilde{y}} = \mathbb{R}^l_+ \cap \partial \Pi^{\widetilde{y}}_l$. Провівши подібні міркування для решти інтегралів з рівності (20) і врахувавши те, що $u^{s,k}(x,y,0)=0$ при $(x,y) \in \Pi^R_n \times \Pi^{\widetilde{y}}_l$, одержимо

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Pi^{\widetilde{y}}_l}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\phi_R(x)|u^{s,k}\sqrt{\psi}|^2 dxdy|_{t=\tau_1} + \sum_{i=1}^{l}\int\limits_0^{\tau_1}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\int\limits_{\partial D^{\widetilde{y}}}(A_i u^{s,k}, u^{s,k})\psi(|y|)\phi_R(x) dS_y dxdt+ \tag{21}$$

$$+\int\limits_0^{\tau_1}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\int\limits_{\Pi^{\widetilde{y}}_l}\Big[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{l}\phi_R(x)(A_j u^{s,k}, u^{s,k})(\psi(|y|))_{y_j} + \sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}u^{s,k}_{x_i}, (u^{s,k}\phi_R(x))_{x_j})\psi(|y|)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(B_i u^{s,k}_{x_i}, u^{s,k})\phi_R(x)\psi(|y|) + (Cu^{s,k}, u^{s,k})\phi_R(x)\psi(|y|)+$$

$$+(g(x,t,u^s)-g(x,t,u^k), u^{s,k})\phi_R(x)\psi(|y|)\Big]dxdydt = 0.$$

Оскільки $u^{s,k} \in (C([0,T]; L^2_\psi(P^R)))^m$, то рівність (21) правильна для всіх $\tau_1 \in (0,T]$.

Нехай $\mathcal{B}$ є множиною тих точок з $\mathbb{R}^l_+$, в яких визначена функція $\int_0^{\tau_1}\int_{\mathbb{R}^n_+}\phi_R(x)(A_i u^{s,k}, u^{s,k})\psi(|y|)dxdt$. Тоді при $\widetilde{y}_i \to \infty$, $\widetilde{y} \in \mathcal{B}$, $i \in \{1,\ldots,l\}$ $\sum_{i=1}^l\int_0^{\tau_1}\int_{\mathbb{R}^n_+}\int_{\partial D^{\widetilde{y}}}\phi_R(x)(A_i u^{s,k}, u^{s,k})\psi(|y|)dS_y dxdt \to 0$. Отже, (21) набуває вигляду

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^l_+}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\phi_R(x)|u^{s,k}(x,y,\tau)|^2\psi(|y|)dxdy + \int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\mathbb{R}^l_+}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\Big[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{l}(A_j u^{s,k}, u^{s,k})(\psi(|y|))_{y_j}\phi_R(x)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}u^{s,k}_{x_i}, (u^{s,k}\phi_R(x))_{x_j})\psi(|y|) + \sum_{i=1}^{n}(B_i u^{s,k}_{x_i}, u^{s,k})\phi_R(x)\psi(|y|)+ \tag{22}$$

$$+(Cu^{s,k}, u^{s,k})\phi_R(x)\psi(|y|) + (g(x,t,u^s)-g(x,t,u^k), u^{s,k})\phi_R(x)\psi(|y|)\Big]dxdydt = 0.$$

Оцінимо кожен доданок рівності (22), врахувавши умови теореми. Матимемо:

$$\operatorname*{Im}_{8} \equiv \frac{1}{2}\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\mathbb{R}^l_+}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\sum_{j=1}^{l}(A_j u^{s,k}, u^{s,k})(\psi(|y|))_{y_j}\phi_R(x)dxdydt \geq$$

$$\geq -\frac{a_1\psi_0}{2}\int\limits_{Q_\tau}|u^{s,k}|^2\phi_R(x)\psi(|y|)dxdydt;$$

$$\operatorname*{Im}_{9} \equiv \int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}(x,y,t)u^{s,k}_{x_i}, (u^{s,k}\phi_R(x))_{x_j})\psi(|y|)dxdydt =$$

$$= \int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}(x,y,t)u^{s,k}_{x_i}, u^{s,k}_{x_j})\phi_R(x)\psi(|y|)dxdydt+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}(x,y,t)u^{s,k}_{x_i},u^{s,k})(\phi_R(x))_{x_j}\psi(|y|)dxdydt\equiv \overset{1}{\underset{9}{\mathrm{Im}}}+\overset{2}{\underset{9}{\mathrm{Im}}};$$

$$\overset{1}{\underset{9}{\mathrm{Im}}}\geq b_0\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^{s,k}_{x_i}|^2\phi_R(x)\psi(|y|)dxdydt;$$

$$\overset{2}{\underset{9}{\mathrm{Im}}}\leq \frac{b_1\delta_2}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^{s,k}_{x_i}|^2\phi_R(x)\psi(|y|)dxdydt+\frac{n\delta_2}{p}\int\limits_{Q_\tau}|u^{s,k}|^p\phi_R(x)\psi(|y|)dxdydt+$$

$$+\frac{\mu(\delta_2)}{r}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{(\phi_R(x))_{x_i}}{\phi_R(x)}\right|^r\phi_R(x)\psi(|y|)dxdydt,\quad \delta_2>0,\ r=\frac{2p}{p-2};$$

$$\underset{10}{\mathrm{Im}}\equiv\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}(B_i(x,y,t)u^{s,k}_{x_i},u^{s,k})\phi_R(x)\psi(|y|)dxdydt\leq$$

$$\leq\frac{b_3}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left(\delta_1\sum_{i=1}^{n}|u^{s,k}_{x_i}|^2+\frac{n}{\delta_1}|u^{s,k}|^2\right)\phi_R(x)\psi(|y|)dxdydt;$$

$$\underset{11}{\mathrm{Im}}\equiv\int\limits_{Q_\tau}(C(x,y,t)u^{s,k},u^{s,k})\phi_R(x)\psi(|y|)dxdydt\geq c_0\int\limits_{Q_\tau}|u^{s,k}|^2\phi_R(x)\psi(|y|)dxdydt;$$

$$\underset{12}{\mathrm{Im}}\equiv\int\limits_{Q_\tau}(g(x,t,u^s)-g(x,t,u^k),u^{s,k})\phi_R(x)\psi(|y|)dxdydt\geq g_0\int\limits_{Q_\tau}|u^{s,k}|^p\phi_R(x)\psi(|y|)dxdydt.$$

Враховуючи одержані оцінки інтегралів $\mathrm{Im}_8,\dots,\mathrm{Im}_{12}$, з (22) отримаємо нерівність

$$\int\limits_{O_\tau}|u^{s,k}|^2\phi_R(x)\psi(|y|)dxdy+\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[(2b_0-b_3\delta_1-b_1\delta_2)\sum_{i=1}^{n}|u^{s,k}_{x_i}|^2+ \tag{23}$$

$$+\left(2c_0-\frac{b_3n}{\delta_1}-a_1\psi_0\right)|u^{s,k}|^2+2g_0|u^{s,k}|^p\Bigg]\phi_R(x)\psi(|y|)dxdydt\leq$$

$$\leq\frac{(p-2)\mu(\delta_2)}{p}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{(\phi_R(x))_{x_i}}{\phi_R(x)}\right|^{\frac{2p}{p-2}}\phi_R(x)\psi(|y|)dxdydt.$$

Очевидно, що

$$\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{(\phi_R(x))_{x_i}}{\phi_R(x)}\right|^{\frac{2p}{p-2}}\phi_R(x)\psi(|y|)dxdydt\leq(2\alpha)^{\frac{2p}{p-2}}\int\limits_{Q_\tau}[H_R(x)]^{\alpha-\frac{2p}{p-2}}\psi(|y|)dxdydt.$$

Виберемо параметри δ_1,δ_2 так, щоб $2b_0-b_3\delta_1-b_1\delta_2=1$. Тоді з (23), застосувавши лему Гронуолла-Беллмана, одержимо

$$\int\limits_{O_\tau}|u^{s,k}|^2\phi_R(x)\psi(|y|)dxdy+\int\limits_{Q_\tau}\left(\sum_{i=1}^{n}|u^{s,k}_{x_i}|^2+|u^{s,k}|^2+|u^{s,k}|^p\right)\phi_R(x)\psi(|y|)dxdydt\leq \tag{24}$$

$$\leq c_4 \int\limits_{Q_\tau} [H_R(x)]^{\alpha - \frac{2p}{p-2}} \psi(|y|) dx dy dt, \quad \tau \in [0, T],$$

де стала c_4 не залежить від R, s, k.

Нехай k_0 — довільне фіксоване натуральне число, R_0 таке найменше дійсне число, що $P_\tau^{k_0} \subset \mathbb{R}_+^l \times \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| < R_0\}$. Нехай $R > R_0$. Тоді з (24) враховуючи, що $R - |x| \leq h_R(x) \leq R + |x|$, отримаємо

$$\int\limits_{P_\tau^{k_0}} |u^{s,k}|^2 dx dy + \int\limits_{Q_\tau^{k_0}} \left(\sum_{i=1}^n |u_{x_i}^{s,k}|^2 + |u^{s,k}|^2 + |u^{s,k}|^p \right) dx dy dt \leq c_5 \left(\frac{2R}{R - R_0} \right)^\alpha R^{n - 2p/(p-2)}, \quad (25)$$

де $\alpha = \left[\frac{2p}{p-2}\right] + 1$, а стала c_5 не залежить від R, s, k. За умовою теореми $p < \frac{2n}{n-2}$, тому легко бачити, що для кожного довільно малого $\varepsilon > 0$ існує таке R, що

$$c_5 \left(\frac{2R}{R - R_0} \right)^\alpha R^{n - 2p/(p-2)} < \varepsilon.$$

Отже, з оцінки (25) випливає, що послідовність $\{u^k\}$ є фундаментальною в просторах $(L_\psi^p(Q_T^{k_0}))^m$, $(C([0,T]; L_\psi^2(P^{k_0})))^m$, а послідовності $\{u_{x_i}^k\}$ фундаментальні у просторі $(L_\psi^2(Q_T^{k_0}))^m$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ для $\forall k_0 \in \mathbb{N}$. Тоді, записавши (19) для $v = w\sigma(x)\psi(|y|)$, де $w \in (L^2((0,T); V_{\psi,loc}^{1,1}(\overline{O})) \cap L^p((0,T); L_\psi^p(\overline{O})))^m$, які мають обмежені носії за змінною x, $w_t \in (L^2((0,T); L_{\psi,loc}^2(\overline{O})))^m$, і перейшовши до границі при $k \to \infty$, отримаємо рівність (5). Отже, існує узагальнений розв'язок задачі (1) – (4) в області Q_T.

Доведемо єдиність розв'язку. Нехай задача (1) – (4) має два узагальнені розв'язки u^1 і u^2. Тоді функція $u = u^1 - u^2$ задовольняє рівність

$$\int\limits_{O_T} (u, v)\sigma(x) dx dy + \int\limits_{Q_T} \Bigg[-(u, v_t)\sigma(x) - \sum_{i=1}^l (A_i(x,t)u, v_{y_i})\sigma(x) + \quad (26)$$

$$+ \sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x,y,t)u_{x_i}, (v\sigma(x))_{x_j}) + \sum_{i=1}^n (B_i(x,y,t)u_{x_i}, v)\sigma(x) + (C(x,y,t)u, v)\sigma(x) +$$

$$+ (g(x,t,u^1) - g(x,t,u^2), v\sigma(x)) \Bigg] dx dy dt = 0$$

для всіх $v \in (L^2((0,T); V_\psi^{1,1}(\overline{O})) \cap L^p((0,T); L_\psi^p(\overline{O})))^m$, які мають обмежені носії, $v_t \in (L^2(0,T; L_\psi^2(\overline{O})))^m$, для будь-якої функції $\sigma \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, $\sigma(x) \geq 0$ в $\mathbb{R}^n$. Приймемо в рівності (26) $v = ((\theta_d \Phi_d u) * \eta_k * \eta_k)\theta_d \Phi_d$, $\sigma(x) = \phi_R(x)$. Тоді провівши такі ж операції як при доведенні фундаментальності отримаємо рівність (22) (записану для u). Врахувавши оцінки інтегралів $\mathrm{Im}_8, \ldots, \mathrm{Im}_{12}$, одержимо з (22) нерівність (23) (записану для u), з якої легко випливає нерівність $\int_{P_T^{k_0}} |u|^2 dx dy \leq \varepsilon$. Оскільки ця нерівність виконується $\forall k_0 \in \mathbb{N}$ і $\forall \varepsilon > 0$, тоді $u = u^1 - u^2 = 0$, тобто $u^1 = u^2$. Теорему доведено. $\square$

ЛІТЕРАТУРА

1. Kolmogorov A.N. *Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung)* // Ann. Math. – 1934. – V. 35. – P. 116–117.
2. Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Birkhäuser Verlag. – 2004. – 390 p.
3. Дронь В.С., Івасишен С.Д. *Про коректну розв'язність задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова* // Укр. мат. вісник. – 2004. – Т.1, №1. – С. 61–68.
4. Возняк О.Г., Івасишен С.Д. *Фундаментальні розв'язки задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь та їх застосування* // Доп. НАН України. – 1996. – №10. – С. 11–16.
5. Эйдельман С.Д., Малицкая А.П. *О фундаментальных решениях и стабилизации решения задачи Коши для одного класса вырождающихся параболических уравнений* // Диф. уравн. – 1975. – Т. 11, №7. – С. 1316–1331.
6. Polidoro S. *On the regularity of solutions to a nonlinear ultraparabolic equation arising in mathematical finance* // Nonlinear Analysis. – 2001. – V. 47. – P. 491–502.
7. Lanconelli E., Pascucci A., Polidoro S. *Linear and nonlinear ultraparabolic equations of Kolmogorov type arising in diffusion theory and in finance* // Nonlinear problems in mathematical physics and related topics II. In honour of Proff. O.A. Ladyzhenskaya. – New York, NY: Kluwer Academic Publishers. Int. Math. Ser., N.Y. 2. – 2002. – P. 243 – 265.
8. Барабаш Г.М., Лавренюк С. П., Процах Н. П. *Мішана задача для напівлінійного ультрапараболічного рівняння* // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2002. – Т. 45, №4. –С. 27–34.
9. Lascialfari F., Morbidelli D. *A boundary value problem for a class of quasilinear ultraparabolic equations* // Commun. Part. Diff. Equat. – 1998. – V. 23, N 5–6. – P. 847–868.
10. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: ИЛ, 1958. – 474 с.
11. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М: Мир. – 1978. – 336 с.
12. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 587 с.

Львівський національний університет імені Івана Франка

Надійшло 24.02.2005