УДК 517.53/577

Ю. Ю. Трохимчук

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ С СОВЕРШЕННЫМ МНОЖЕСТВОМ ОСОБЫХ ТОЧЕК

Yu. Yu. Trokhymchuk. *Analytic functions with perfect set of singular points*, Matematychni Studii, **26** (2006) 115–130.

This is a survey article on development of the notion of a singular point of an analytic function since results of Cauchy, Weierstrass and Picard.

Ю. Ю. Трохимчук. *Аналитические функции с совершенным множеством* // Математичні Студії. – 2006. – Т.26, №2. – С.115–130.

Статья является обзором развития понятия особой точки аналитической функции, начиная с работ Коши, Вейерштрасса, Пикара.

Рассматривая аналитические функции как функции представимые в виде степенного ряда $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n,\ \ |z| < R,\ \ 0 < R \le +\infty$, Коши (A.-L.Cauchy, 1841 г.) вывел интегральное представление таких функций

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta, \qquad C_\rho = \{\zeta = \rho e^{i\varphi}:\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}.$$

При этом сразу возникают и *неравенства Коши* $|a_n|\rho^n \le M_f(\rho)$ $(n \ge 0,\ \rho \ge 0)$, где $M_f(\rho) = \max\{|f(z)|:\ |z| = \rho\}$. Здесь же он пришел к заключению, что радиус сходимости данного ряда равен расстоянию от точки $z = 0$ до ближайшей особой точки функции f.

В 1844 г. Коши с помощью своей теоремы о вычетах доказывает, что аналитическая во всей комплексной плоскости и ограниченная функция необходимо является константой. Это утверждение, называемое теперь "теорема Лиувилля", как впервые заметил Жордан (C.Jordan), выводится непосредственно из неравенств Коши. В 1843 г. Лоран (P.Laurent) для голоморфной функции в кольце $\{z:\ R_1 < |z| < R_2\}$, получил представление

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{\rho_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{\rho_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \quad R_1 < \rho_1 < |z| < \rho_2 < R_2,$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 30B10, 30B40.

откуда уже непосредственно получаем преставление такой функции в виде *ряда Лорана*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta, \quad R_1 < \rho < R_2.$$

Если Коши, развивая свою теорию вычетов, под особыми точками аналитической функции фактически понимал только ее полюсы, то указанные формулы Лорана явились для Вейерштрасса (K.Weierstrass) отправным пунктом исследования существенно особых точек. При этом было доказано, что значения аналитической функции в окрестности таких точек образуют всюду плотное на коплексной плоскости множество (опубликовано в 1874 г.). Немного позже Пикар (E.Picard, 1879 г.) доказал свою знаменитую теорему, утверждающую, что в любой окрестности существенно особой точки все значения, кроме, возможно, одного, аналитическая функция принимает бесконечное множества раз.

В этот же период (70–80-е годы XIX ст.) Вейерштрасс предложил метод построения полной аналитической функции, исходя из ее определенного элемента. Именно под *аналитическим элементом* с центром в точке a будем понимать пару (a, S), где $a \in \mathbb{C}$, S — степенной ряд с центром в точке a, сходящийся в некоторой ее окрестности. Скажем, что два аналитических элемента (a, S), (b, T) являются непосредственными аналитическими продолжениями один другого, если круги сходимости рядов S и T имеют непустое пересечение и их суммы в пересечении кругов сходимости совпадают. Можно попытаться продолжить данный элемент (a, S), строя цепи (a, S), (a_1, S_1), $(a_2, S_2), \ldots$, (a_n, S_n), такие, что два любых соседних элемента образуют непосредственное продолжение один другого. Совокупность всех так возникших аналитических элементов образует *полную аналитическую функцию,* которая, исходя из любого ее элемента, определена однозначно. Если она оказывается многозначной функцией, то это означает, что имеется много элементов с одинаковым центром. Это множество не сложно сочетать с построением римановой поверхности, на которой возникающая функция будет уже однозначной. Вейерштрасс (1880 г.) построил пример, когда возникающая функция ограничивается одним единственным элементом. Собственно говоря, у функции Вейерштрасса, определяемой рядом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b^n z^{a^n},\ 0 < b < 1,\ a \in \mathbb{N} \setminus \{1\},\ ab > 1,$$

все точки единичной окружности $\{z : \ |z| = 1\}$ являются особыми, хотя сама функция непрерывна в замыкании круга $\mathbb{D} = \{z : \ |z| < 1\}$, но на плотном множестве радиусов ее производная стремится к ∞. Тем самым единичный круг является естественной областью существования этой функции, поскольку у нее не может быть аналитического продолжения в более широкую область. Справедливости ради следует отметить, что пример функции $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b^n z^{n^2},\ 0 < b < 1$, являющейся непрерывной в замыкании $\mathbb{D} = \{z : \ |z| < 1\}$ вместе со всеми своими производными, но непродолжимой за пределы этого круга был дан Фредгольмом (см. [22]).

Появление рядов со свойствами, подобными свойствам рядов Фредгольма и Вейерштрасса, не осталось незамеченным. В 90-е годы XIX ст. появились и примеры, и общие теоремы о степенных рядах у Пуанкаре (H.Poincaré), Адамара (J.Hadamard), Фабри (E.Fabry) (лакунарные ряды). Например, лакунарный ряд $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2^n} 2^{-n^2}$ представляет непрерывную функцию в $\overline{\mathbb{D}}$, бесконечно дифференцируемую на границе, и, тем не менее, вся единичная окружность сплошь состоит из особых точек f, при этом функция f отображает $\mathbb{D}$ однолистно на некоторую выпуклую область с бесконечно гладкой границей. Борель (E.Borel), исследуя такие ряды, высказал предположение которое можно сформулировать в том виде, что если последовательные коэффициенты степенного ряда выбираются случайно и независимо друг от друга, то с вероятностью равной единице множество особенностей соответствующей функции совпадает с со всей граничной окружностью. В 1930 г. Штейнгаус (H.Steinhaus) в случае, когда функция имеет вид $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n a_n z^n$, а элементы последовательности (ε_n) принимают независимо друг от друга значения ± 1 с вероятностями равными $1/2$, доказал предположение Бореля, сведя вопрос к лебеговой теории меры. Ранее Хаусдорф (F.Hausdorf, 1918 г.) доказал, что среди всех рядов с целочисленными коэфициентами, аналитически продолжающиеся ряды образуют лишь счетное множество. Если же класс голоморфных в единичном круге функций снабдить топологией равномерной сходимости на компактах, то, как доказали в 1933 г. Кирст и Шпильрайн (S.Kierst, E.Szpilrajn), непродолжимых функций в этом классе остаточное множество (множество второй категории), т.е. опять — подавляющее большинство. Винер (N.Wiener), идя по стопам Штейнгауса (о чем он прямо и говорит) и используя его метод построения вспомогательных рядов, приходит к своей известной модели броуновского движения. А ведь все начиналось с аналитических функций с простейшим совершенным множеством особенностей — окружностью!

В конце XIX ст. нульмерное совершенное множество Кантора, а также его аналоги на плоскости, были уже хорошо известны. То, что такое множество P на плоскости может быть особым для аналитической функции, показал еще Пуанкаре, рассматривая ряды простых дробей $\sum_n A_n/(z - a_n)$, где множество $\{a_n\}$ всюду плотно на P. Вообще, можно сказать, что XIX век закончился в убеждении, что вблизи своих особенностей (по аналогии с изолированными особыми точками) аналитическая функция или ее производная обязательно неограниченные. И все же вопрос о существовании аналитических функций, непрерывно продолжающихся на нульмерное множество своих особенностей, был задет уже в 1897 г. — решение одной из проблем аналитической теории дифференциальных уравнений Пенлеве получил на основании своей гипотезы, что подобные функции не существуют. Хотя указанная проблема в теории уравнений была вскорости решена независимо от этой гипотезы, возникший вопрос не остался незамеченным. И вот сначала Помпейю ([2]), а затем Данжуа ([3]), внесший необходимые дополнения в рассуждения Помпейю, построили примеры всюду непрерывных аналитических функций с совершенным множеством особых точек. Примеры эти давались в виде (в современных обозначениях) интеграла

$$f(z) = \int_E \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta, \tag{1}$$

где $\varphi(\zeta)$ ограниченная на нульмерном в смысле топологической размерности компактном множестве E положительной плоской лебеговой меры функция. Источником для построения подобных примеров является следующая теорема, основанная на тех же построениях Помпейю и Данжуа, что и выше, но несколько обобщающая их.

Теорема 1. *Пусть $E \subset \mathbb{C}$ произвольный компакт плоской положительной меры. Если $\varphi \in L_p(E)$, $p > 2$, то функция f вида (1) является ограниченной во всей комплексной плоскости непрерывной функцией, аналитической вне множества E, при этом*

$$|f(z_1) - f(z_2)| \le C|z_1 - z_2|^\alpha, \quad \alpha = \frac{p-2}{p},$$

для произвольных точек z_1, z_2 *на комплексной плоскости; если же* $p = +\infty$, *то последнее неравенство заменяется условием Дини*

$$|f(z_1) - f(z_2)| \le C|z_1 - z_2| \ln \frac{2d}{|z_1 - z_2|},$$

где d — *диаметр множества* E.

Доказательство. Аналитичность f вне множества E очевидна. Применяя неравенство Гельдера к интегралу, получим

$$|f(z)| \le \int_E \frac{|\varphi(\zeta)|}{|\zeta - z|} d\xi d\eta \le \left(\int_E |\varphi(\zeta)|^p d\xi d\eta\right)^{1/p} \left(\int_E |\zeta - z|^{-q} d\xi d\eta\right)^{1/q}, \quad 1/p + 1/q = 1;$$

так как $q < 2$, то

$$|f(z)| \le M_1 \|\varphi\|_{L_p(E)}, \qquad M_1 = \left(\frac{2\pi}{\alpha q}\right)^{1/q} d^{\alpha}, \qquad d = \mathrm{diam}\, E,$$

т.е., f ограниченная функция. Применяя неравенство Гельдера к интегралу

$$f(z_1) - f(z_2) = (z_1 - z_2) \int_E \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)} d\xi d\eta,$$

получаем

$$|f(z_1) - f(z_2)| = |z_1 - z_2| \|\varphi\|_{L_p(E)} \left(\int_E (|\zeta - z_1| \cdot |\zeta - z_2|)^{-q} d\xi d\eta\right)^{1/q}.$$

Лемма 1. *Пусть* $\alpha < 2$, $\beta < 2$. *Тогда, если* $\alpha + \beta > 2$, *то*

$$I \equiv \int_E |\zeta - z_1|^{-\alpha} |\zeta - z_2|^{-\beta} d\xi d\eta \le M^{(1)}_{\alpha,\beta} |z_1 - z_2|^{2-\alpha-\beta},$$

если $\alpha + \beta = 2$, *то* $I \le M^{(2)}_{\alpha,\beta} + 8\pi |\ln|z_1 - z_2||$, *если* $\alpha + \beta < 2$, *то* $I \le M^{(3)}_{\alpha,\beta}$, *где* $M^{(j)}_{\alpha,\beta}$ — *абсолютные постоянные, зависящие только от* α, β.

Доказательство. Положим $K_1 = \{z : \ |z - z_1| < \rho\}$, $\rho = 2|z_1 - z_2|$. Рассмотрим также круг $K_0 = \{z : \ |z - z_1| < 2\rho_0\}$, такой, что $E \subset K_0$. Если точка ζ лежит вне круга K_1, то $2|\zeta - z_1| \ge |\zeta - z_2|$. Поэтому при $\alpha + \beta > 2$

$$I_0 \equiv \int_{K_0 \setminus K_1} |\zeta - z_1|^{-\alpha} |\zeta - z_2|^{-\beta} d\xi d\eta \le 2^{1+\beta}\pi \int_{\rho}^{2\rho_0} r^{1-\alpha-\beta} dr \le 8\pi |z_1 - z_2| / (\alpha + \beta - 2).$$

Аналогично, $I_0 \le 8\pi \ln(\rho_0 / |z_1 - z_2|)$ при $\alpha + \beta = 2$ и $I_0 \le 32\pi \rho_0^{2-\alpha-\beta} / (2 - \alpha - \beta)$ при $\alpha + \beta < 2$. Поскольку

$$I_1 \equiv \int_{K_1} \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z_1|^{\alpha} |\zeta - z_2|^{\beta}} = |z_1 - z_2|^{2-\alpha-\beta} \int_{|\zeta| \le 2} \frac{d\xi d\eta}{|\zeta|^{\alpha} |\zeta - e^{i\theta}|^{\beta}} \le \frac{M_{\alpha,\beta}}{|z_1 - z_2|^{\alpha+\beta-2}}.$$

Так как $I \le I_0 + I_1$, то отсюда получаем требуемое неравенство. □

Продолжим доказательство теоремы 1. У нас $1 < q < 2$, поэтому

$$|z_1 - z_2| \left(\int_E |\zeta - z_1||\zeta - z_2|^{-q} d\xi d\eta \right)^{1/q} \le M_p |z_1 - z_2|^{\frac{p-1}{p}}$$

и получаем первую оценку теоремы. Если же φ ограничена на E, т.е. $\varphi \in L_{+\infty}(E)$, то получим и вторую оценку. Теорема 1 доказана. □

Если E разбивающий плоскость нигде не плотный компакт, то, вообще говоря, аналитические функции, определяемые формулой (1), в разных компонентах его дополнения могут оказаться различными по своей природе — в этом случае они как бы искусственно "склеены" этой формулой (ниже мы приведем соотвествующие примеры).

Но если E не разбивает плоскость, в частности, если E — простая дуга или нульмерный компакт, то формула (1) определяет единую аналитическую функцию вне E и если она не равна тождественно постоянной, то E содержит (совершенное) множество ее особых точек, на которое тем самым непрерывно продолжается. Например, если E нульмерно и положительной меры в каждой своей порции, то функция g, определяемая равенством $g(z) = \int_E d\xi d\eta/(\zeta - z)$, как раз и будет такой функцией. Действительно, то, что эта функция не есть постоянная, следует из равенства $\lim_{z\to\infty} z \int_E d\xi d\eta/(\zeta - z) = -\int_E d\xi d\eta = -\text{meas } E \neq 0$. Вычисляемое значение равно вычету функции g в бесконечности и следовательно равно $-\int_\Gamma g(z)dz$, где замкнутый контур Γ охватывает все множество E. Несложно при этом доказать, что каждая точка из E является особой для g, т.е. g не является аналитической ни в какой точке из E. В самом деле, для произвольной точки $z_0 \in E$ и ее окрестности $U(z_0)$ проведем в $U \setminus E$ замкнутый спрямляемый контур Γ содержащий точку z_0 внутри. Контур Γ разбивает E на две отделимые порции $E_0, E_1 :\ E = E_0 \cup E_1$, $z_0 \in E_0$, а функция g представляется в виде $g(z) = \int_E d\xi d\eta/(\zeta - z) = (\int_{E_0} + \int_{E_1}) d\xi d\eta/(\zeta - z) = g_0(z) + g_1(z)$. Контурный интеграл $-\int_\Gamma g(z)dz = -\int_{\Gamma_0} g(z)dz = \text{meas } E_0 \neq 0$. Из произвольности z_0 и $U(z_0)$ следует наше утверждение.

После результатов Помпейю и Данжуа внимание математиков по части исследования особенностей аналитических функций было в основном направлено на поведение этих функций вблизи нульмерных множеств их особенностей, по-видимому считая, что нульмерные особые множества по своей природе должны быть ближе к природе изолированных особых точек, чем, скажем, к особым линиям. Оказалось, что частично это действительно так; и все же достаточно массивные нульмерные особые множества оказываются ближе к особым одномерным множествам. Здесь одним из ближайших последователей Помпейю и Данжуа снова оказался Пенлевэ, который уже сумел сформулировать некоторые общие утверждения о совершенных множествах особых точек аналитических функций. Будем пока следовать Пенлевэ.

Возьмем произвольный нульмерный компакт $E \subset \mathbb{C}$ и заключим его точки в конечную систему замкнутых спрямляемых кривых (например, ломаных), расположенных одна вне другой. Нижний предел сумм длин всех таких кривых при стремлении к нулю максимального из их диаметров назовем *длиной* $l(E)$ *множества* E.

Приведем некоторые примеры. Почти очевидно, что если E принадлежит простой спрямляемой кривой Γ, то $l(E) = 2\text{meas}_\Gamma E$ (meas_Γ — мера Лебега относительно кривой).

Следующий пример обобщает топологический квадрат $P_0^2 = P_0 \times P_0$ классического канторового совершенного множества P_0. Возьмем единичный квадрат $\Omega_0 = I \times I$ и выбросим из него все точки двух полос параллельных осям координат: $\{(x, y) :\ \alpha <$

$x < 1-\alpha\}$, $\{(x,y):\ \alpha < y < 1-\alpha\}$, $0 < \alpha < 1/2$. Объединение оставшихся четырех квадратов со стороной α обозначим Ω_1. Для каждого из этих квадратов повторим то же построение с коэффициентом пропорциональности α. Объединение возникших 4^2 квадратов со стороной α^2 обозначим Ω_2. Продолжая это построение неограниченно, получаем монотонно убывающую последовательность $\Omega_{n+1} \subset \Omega_n$ $(n \geq 0)$ систем квадратов, пересечение которой $E = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \Omega_n$ есть нульмерный компакт. Сравнительно легко определить длину множества E для каждого α. Сумма периметров квадратов ранга n, т.е. из Ω_n, равна $4(4\alpha)^n$. Поэтому если $\alpha < 1/4$, то легко видеть, что $l(E) = 0$ в этом случае. Если $\alpha = 1/4$, то сумма периметров квадратов любого ранга равна 4; можно доказать ([4]), что в этом случае $l(E) = 1/4$. Для нас достаточно лишь отметить, что длина E конечна и положительна; последнее следует из того, что проекция системы Ω_n вдоль прямой $\{(x,y):\ y = x/2\}$ есть постоянный отрезок, а, значит на этот отрезок проектируется и их предел E.

Пусть теперь $\alpha > 1/4$. Обозначим длину E через $l = l(E)$. Часть множества E, лежащая в одном из квадратов из Ω_1, имеет длину $l/4$; с другой стороны эта часть подобна E с коэффициентом подобия α, поэтому $\alpha l = l/4$. Отсюда следует, что либо $l = 0$, либо $l = +\infty$. Но случая $l = 0$ не может быть, поскольку проекция каждой системы Ω_n вдоль прямой $\{(x,y):\ y = (1-2\alpha)x\}$ есть постоянный отрезок. Поэтому в этом случае $l = l(E) = +\infty$. В частности, для квадрата P_0^2 канторового множества P_0 $(\alpha = 1/3)$ также имеем $l(P_0^2) = +\infty$. Отметим еще, что все построенные обобщенные канторовы квадраты имеют плоскую лебегову меру нуль.

Общий характер возможного поведения аналитической функции вблизи множества особых точек можно теперь описать следующей теоремой Пенлевэ.

Теорема 2. *Если множество E особых точек аналитической функции f имеет длину $l(E) = 0$, то в окрестности E функция f не может быть ограниченной; если $l(E) < +\infty$, то f не может быть всюду на E непрерывной.*

Доказательство. Будем предполагать, что ни в какой окрестности любой точки из E функция f не является голоморфной. Возьмем произвольную открыто-компактную порцию множества E и заключим ее во внутрь замкнутого спрямляемого контура C; внутри C проведем произвольное конечное число непересекающихся контуров C_k $k \in \{1, 2, \ldots, k_0\}$, содержащих внутри ту же порцию множества E, и для полученной многосвязной области $\operatorname{int} C \setminus \bigcup_k \overline{\operatorname{int} C_k}$ напишем формулу Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\sum_k \int_{C_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = f_0(z) + f_1(z).$$

Функция f_0 голоморфна внутри C, а функция f_1 вне $\bigcup_k \overline{\operatorname{int} C_k}$. Поэтому в $\bigcup_k \operatorname{int} C_k$ функции f и f_1 имеют одни и те же особые точки.

Оценим функцию f_1. Зафиксируем точку z в нашей области; для $\delta = \operatorname{dist}(z, \bigcup_k C_k) > 0$ получим $|f_1(z)| \leq ML/(2\pi\delta)$, где $M = \sup\{|f(\zeta)|:\ \zeta \in \bigcup_k C_k\}$ и $L = \sum_k l(C_k)$. Если теперь f ограниченная внутри C функция, то M не зависит от выбора контуров C_k и, так как L может быть сделано сколь угодно малым, то величина $|f_1(z)|$, не зависящая от выбора контуров, должна быть равной нулю. Из произвольности z следует, что $f_1 \equiv 0$, $f \equiv f_0$ и, следовательно, функция f голоморфная всюду внутри C, что невозможно по предположению. Первая часть теоремы доказана.

Вторая часть доказывается на основании той же формулы Коши с выбором произвольных точек $z_k \in E$ внутри каждого контура C_k. Тогда

$$|f_1(z)| \leq \frac{1}{2\pi}\sum_k \left|\int_{C_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta\right| = \frac{1}{2\pi}\sum_k \left|\int_{C_k} \frac{f(\zeta) - f(z_k)}{\zeta - z} d\zeta\right| \leq$$

$$\leq \frac{L}{2\pi\delta} \sup\left\{|f(\zeta) - f(z_k)| : \ \zeta \in \bigcup_k C_k\right\}.$$

Если функция f всюду внутри C непрерывна, то при стремлении к нулю максимального из диаметров C_k мы по условию можем считать L ограниченной, а потому, как и выше, получим $f_1 \equiv 0$ и, что функция f — голоморфная всюду внутри C, что противоречит условию теоремы. □

Сделаем несколько замечаний относительно доказанной теоремы. Было доказано, что существуют нульмерные множества конечной положительной длины ([5]), — например, построенный нами выше обобщенный канторов квадрат при $\alpha = 1/4$, — которые тем не менее обладают тем же свойством, что и множество длины нуль в этой теореме: *любая аналитическая и ограниченная в их окрестности функция аналитически продолжается на все это множество* — оно устранимо как возможная особенность для ограниченных функций. Поэтому длина множества явилась лишь первым, хотя и весьма наглядным приближением к характеристике особых множеств аналитических функций. Ниже мы приведем в определенном смысле полное завершение формулировки теоремы Пенлевэ. Из теоремы Пенлевэ также сразу следует, что если аналитическая в окрестности особого множества E функция продолжается на него непрерывно, то каждая порция E имеет бесконечную длину. Мы уже видели, что для нульмерного множества E ($\dim E = 0$), положительной плоской меры такие функции существуют, но тот факт, что в этом случае $l(E) = \infty$ легко доказать и несредственно. Ниже мы приведем (без доказательства) конструкции примеров аналитических всюду непрерывных функций для случая, когда множеством особых точек для них служит канторов квадрат при $\alpha > 1/4$. наконец, в связи с этой же теоремой Пенлевэ возникает вопрос о существовании ограниченных функций вблизи особых множеств конечной, и тогда уже положительной, длины. Приведем простейший пример такой функции, принадлежащий Данжуа ([4]).

Пусть E нульмерное совершенное множество положительной лебеговой меры, лежащее на оси Ox. Рассмотрим функцию

$$\psi(z) = \int_E \frac{dx}{x - z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus E.$$

Если $x - z = |x - z|e^{i\varphi} = Re^{i\varphi}$, то $\psi(z) = \int_E \frac{\cos\varphi}{R} dx - i\int_E \frac{\sin\varphi}{R} dx$. Выражение $\int_E \frac{\sin\varphi}{R} dx$ есть угол, под которым из точки z видно множество E (интеграл Гаусса, потенциал двойного шара), поэтому $|\mathrm{Im}\ \psi(z)| \leq \pi$. Уже из этого следует, что $\psi \not\equiv \mathrm{const}$, хотя это можно вывести сразу из соотношений $\lim_{z\to\infty} z\psi(z) = \lim_{z\to\infty} z\int_E \frac{dx}{x-z} = -\int_E dx = -\mathrm{meas}\ E \neq 0$. Из ограниченности $\mathrm{Im}\,\psi(z)$ следует, что функция $f(z) = e^{i\psi(z)}$ ограничена во всей плоскости. Как и выше, не трудно доказать, что каждая точка E является для функции f особой.

Рассмотрим более подробно устранимые особенности для ограниченных аналитических функций. Еще в 1940-е годы Л.Альфорс ввел следующее понятие *аналитической емкости* компакта $E \subset \mathbb{C}$

$$\gamma(E) = \sup\{|f'(\infty)|\},$$

где верхняя грань берется по всем аналитическим функциям $f:\ \mathbb{C}\setminus E \to \mathbb{C}$ таким, что $|f(z)| \le 1$ ($z \in \mathbb{C}\setminus E$), а $f'(\infty) = \lim_{z\to\infty} z(f(z) - f(\infty))$. Для произвольного множества $F \subset \mathbb{C}$ полагаем $\gamma(F) = \sup\{\gamma(E):\ E \subset F,\ E\text{-}компакт\}$.[1] Тогда же Л.Альфорс доказал, что *для того, чтобы E было устранимым для ограниченных функций, необходимо и достаточно, чтобы аналитичесская емкость* $\gamma(E) = 0$. Однако, этот результат не давал геометрической характеристики устранимых множеств, так как и определение γ было чисто аналитическим. Аналитическая емкость была переоткрыта в 1950-х годах А.Г.Витушкиным при решении задачи равномерной аппроксимации аналитических функций рациональными функциями ([6]). Он доказал, что аналитическая емкость играет основную роль в подобного рода задачах. Но опять-таки основные трудности здесь возникают из-за *отсутствия полной характеризации аналитической емкости в метрических или геометрических терминах.* Уже теорема Пенлевэ показала, что в подобной характеризации должны участвовать какие-то меры на компакте E. Так оно впоследствии и оказалось.

Напомним некоторые нужные нам в дальнейшем изложении определения и факты. Пусть X метрическое пространство и 2^X совокупность всех подмножеств из X. Будем говорить, что φ *мера* на X, если $\varphi:\ 2^X \to \mathbb{R}_+$ и $\varphi(A) \le \sum_{B\in F}\varphi(B)$ для любого счетного семейства $F \subset 2^X$ такого, что $A \subset \bigcup_{B\in F} B$. Следуя Каратеодори, скажем, что множество A *φ-измеримо*, если $\varphi(T) = \varphi(T\cap A) + \varphi(T\setminus A)$ для любого множества T. Оказывается, что если все открытые в X множества φ-измеримы, то φ-мера в классе всех φ-измеримых множеств обладает всеми основными свойствами меры Лебега в $\mathbb{R}^n$: полная аддитивность, переход к пределу под знаком интеграла для монотонных последовательностей, "исчерпание" φ-измеримых множеств замкнутыми множествами изнутри и "зажимание" открытыми множествами извне и т.д. Если X — компакт и $\varphi(X) < +\infty$, то с этими дополнительными свойствами φ называется *радоновой мерой.* Обычным образом вводится понятие φ-измеримых функций, интегралов по φ-мере и т.д. Наконец, вместо знакопостоянных мер, рассматриваем знакопеременные меры, как разности $\varphi^+ - \varphi^-$ неотрицательных мер (далее, вообще, комплексные меры). Наконец, напомним одну важную конструкцию Каратеодори, позволяющую строить основные геометрические меры в метрических пространствах.

Пусть F семейство подмножеств пространства X и φ такая функция на F, что $0 \le \varphi(S) \le +\infty$ для $S \in F$. Построим вспомогательные меры ψ_δ, $0 < \delta \le +\infty$, и затем основную меру ψ следующим образом.

Для множества $A \subset X$ значение $\psi_\delta(A)$ определяется как точная нижняя грань множества чисел $\sum_{S\in G}\varphi(S)$, соотвествующих всем счетным семействам G таким, что $G \subset F \cap \{S:\ \operatorname{diam} S \le \delta\}$ и $A \subset \bigcup_{B\in G} B$. Из неравенства $\psi_\delta(A) \ge \psi_\sigma(A)$, $0 < \delta < \sigma \le +\infty$, вытекает существование предела $\psi(A) = \lim_{\delta\to+0}\psi_\delta(A) = \sup\{\psi_\delta(A):\ \delta > 0\}$ для любого $A \subset X$.

Нетрудно проверить, что ψ_δ, ψ — меры на X и, что все открытые множества из X ψ-измеримы. Меру ψ будем называть результатом применения конструкции Каратеодори и функции φ. Для наших ближайших целей самым важным будет пример функции

[1] Понятие емкости (C-емкость) введено и для класса всюду непрерывных аналитичесских функций.

$\varphi(S) = \alpha(m)2^{-m}(\text{diam } S)^m$, $S \subset X$, где $0 < m \leq 2$ и $\alpha(m) = \Gamma(1/2)^m/\Gamma(m/2+1)$ ($\alpha(1) = 2$, $\alpha(2) = \pi$). Результат применения конструкции Каратеодори и этой функции φ называется *m-мерной хаусдорфовой мерой* на X и обозначается H^m. Отметим, что для длины $l(E)$ множества по Пенлевэ имеют место неравенства $2H^1(E) \geq l(E) \geq H^1(E)$.

Каждый нульмерный совершенный компакт $E \subset \mathbb{C}$ можно рассматривать как канторово множество, каким-то взаимно однозначным образом "рассыпанное" на плоскости; при этом можно получать и множества положительной лебеговой меры, и множества спрямляемых кривых, устранимые и неустранимые множества для различных классов аналитических функций и т.д. Выше мы уже видели, что множества конечной длины могут быть как устранимыми для ограниченных аналитических функций, так и неустранимыми. Это означает, что аналитические функции чутко реагируют на геометрию расположения различных точек своих особенностей и нужно было разгадать эту геометрию. Мы приведем формулировку теоремы, которую можно считать решением проблемы Пенлевэ, т.е. проблемы характеризации устранимых особенностей аналитических функций в геометрических терминах.

Для трех различных точек $x, y, z \in \mathbb{C}$ *их кривизной Менгера* назовем величину $C(x,y,z) = 1/R(x,y,z)$, где $R(x,y,z)$ — радиус окружности, проходящей через эти точки (если точки лежат на одной прямой, то считаем, что $R(x,y,z) = +\infty$, $C(x,y,z) = 0$); если две из них совпадают, то полагаем $C(x,y,z) = 0$.

Скажем, что положительная радонова мера μ является *мерой линейного роста*, если для некоторой постоянной $C > 0$ для всех $x \in \mathbb{C}$ и $r > 0$ имеем $\mu(B(x,r)) \leq Cr$, где $B(x,r)$ — круг радиуса r с центром в точке x. Для положительной радоновой меры положим $C^2_\mu(x) = \int (C(x,y,z))^2 d\mu(x)d\mu(y)$ и назовем кривизной меры μ величину $C^2(\mu) = \int C^2_\mu(x)d\mu(x)$.
Решает проблему Пенлевэ следующая теорема ([7]).

Теорема 3. *Компактное множество E неустранимо для ограниченных аналитических функций тогда и только тогда, когда на нем существует положительная линейного роста радонова мера с конечной кривизной.*

В этом случае нетривиальная ограниченная аналитическая функция и выражается интегралом $\int_E \frac{d\mu}{\zeta - z}$. Иначе:
компактное множество $E \subset \mathbb{C}$ устранимо для ограниченных аналитических функций в том и только том случае, когда существует конечная положительная радонова мера μ на $\mathbb{C}$ такая, что для каждого $x \in E$ либо $\theta^*_\mu(x) = \infty$, либо $C^2_\mu(x) = \infty$, где $\theta^*_\mu(x)$ означает верхнюю линейную плотность μ в точке x, т.е. $\theta^*_\mu(x) = \overline{\lim}_{r\to 0}\frac{\mu(B(x,r))}{r}$.

Отметим еще один, полученный на этом же пути, уже вполне геометрический результат:
компактное множество E конечной длины (т.е. $H^1(E) < +\infty$) имеет аналитическую емкость нуль тогда и только тогда, когда оно полностью неспрямляемо, т.е. если $H^1(E \cap \Gamma) = 0$ для каждой спрямляемой кривой Γ (см. выше канторов квадрат при $\alpha = 1/4$).

Но вернемся к функциям, продолжающимся непрерывно на множество своих особенностей, — ведь мы с них и начинали, но по дороге вмешалась теорема Пенлевэ и нам пришлось отвлечься на класс ограниченных функций. После примеров Помпейю и Данжуа, связанных с множеством особенностей положительной лебеговой меры, исторически первый пример подобной функции, но с особым множеством плоской нулевой

меры, был построен В.В.Голубевым ([4]); особое множество в нем — классический канторов квадрат P_0^2. Это было, кстати, доказательством (косвенным и весьма трудным) того, что $H^1(P_0^2) = +\infty$. Позже П.Урысон ([8]) привел намного более простую конструкцию примера все для того же P_0^2, которая, как показал Данжуа ([9]), переносится и на все обобщенные канторовы квадраты (для $\alpha > 1/4$). Именно, для каждого n возьмем 4^n квадратов системы Ω_n, в каждом из которых выберем произвольную точку ζ_n вне Ω_{n-1}, $(n \in \{1, 2, \dots, 4^n\})$, и рассмотрим среднее $f_n(z) = 4^{-n} \sum_{k=1}^{4^n} \frac{1}{\zeta_k - z}$.
Данжуа доказывает, что последовательность $(f_n(z))$ вне E сходится равномерно независимо от выбора точек (ζ_k) к одному и тому же пределу $f(z)$, голоморфному вне E, который в случае $\alpha > 1/4$ непрерывно продолжается на E.

Мы увидим далее (*пример Витушкина*), что всюду непрерывная функция f (для нигде не плотных E) не всегда может быть представлена в виде интеграла типа Помпейю-Данжуа $f(z) = \int_E \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta$, даже если заменить $\varphi(\zeta) d\xi d\eta$ любой мерой $d\mu$. Тем не менее, легко доказать ([10]), что любую такую функцию можно представить в виде предела $\lim_{n\to+\infty} \int_{P_n} \frac{\varphi_n(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta$, где плотности ограничены $\sup\{|\varphi_n(\zeta)| : \zeta \in P_n\} < \infty$, P_n состоит из квадратов, покрывающих E, а сходимость — равномерная внутри $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$.

Выше мы строили меру H^m, применяя конструкцию Каратеодори к функции вида $\varphi(r) = Cr^m$. Рассмотрим теперь неубывающую на $[0; +\infty)$ функцию $\varphi(r)$ такую, что $\int_0^1 \frac{\varphi(r)}{r^2} dr < +\infty$ и, пользуясь конструкцией Каратеодори, построим на данном компакте E φ-меру meas_φ. Оказывается ([11]), что если $\mathrm{meas}_\varphi(E) > 0$, то существует всюду непрерывная на плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ аналитическая вне E функция f, для модуля непрерывности которой $\omega(\delta)$ имеем оценку $\omega(\delta) \le C \left(\int_0^\delta \frac{\varphi(r)}{r^2} dr + \delta \int_\delta^1 \frac{\varphi(r)}{r^3} dr \right)$, C — постоянная. Одной из таких функций является функция $f(z) = \int_E \frac{d\mathrm{meas}_\varphi}{\zeta - z}$.

Что касается устранимости возможных особых множеств для некоторых классов аналитичесских функций, то можно привести такие утверждения:
1. *Пусть $E \subset \mathbb{C}$ — компакт, неотрицательная функция $\omega(r)$ непрерывна и не убывает при $r \ge 0$, $\mathrm{meas}_\varphi(E) = 0$ для $\varphi(r) = r\omega(r)$. Тогда класс функций $f(z)$, аналитических в $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$ и всюду непрерывных, для которых $\omega_f(\delta) \le \omega(\delta)$ $(\delta \to +0)$ состоит из одних постоянных.*
2. *Для того, чтобы класс аналитических в $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$ функций и удовлетворяющих на E условию Липшица порядка $\alpha \in (0; 1]$ состоял из одних постоянных, необходимо и достаточно, чтобы $H^{1+\alpha}(E) = 0$.*

Конечно, решенная выше проблема Пенлевэ в одну сторону дает критерий устранимости и в случае непрерывного продолжения функции на возможное множество особенностей, но поскольку ограниченность и непрерывность вещи все-таки разные, то на практике с каждой всюду непрерывной функцией приходится иметь дело по-своему.

Если в качестве множества $E \subset \mathbb{C}$ взять простую дугу положительной плоской меры в каждой своей порции, то, по доказанному выше, функция $f(z) = \int_E \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}$ является всюду непрерывной аналитической функцией, причем и здесь нетрудно показать, что каждая точка дуги E является для функции f особой. В ответ на один вопрос Н.Н. Лузина, заданный ему в личной беседе, А. Данжуа ([9]) впервые построил пример всюду непрерывной аналитической функции с особой дугой, являющейся графиком однозначной непрерывной функции $y = \psi(x)$. В настоящее время имеется уже много подобных примеров ([12]). Следует также отметить тот прием, который позволил В.В. Голубеву строить различные функции с особенностями. Сейчас этот прием в просторечии называют *снятием меры с прообраза.* Именно, если мы хотим например построить функцию с заданным наперед особым множеством E, то, беря гомеоморфизм φ некоторого линейного или плоского множества E_0 положительной меры на множестве E, рассматриваем интеграл $f(z) = \int_{E_0} \frac{d\mu(\zeta)}{\varphi\zeta - z}$. Как и выше, легко доказывается, что этот интеграл отличен от постоянной, каждая точка E является особой и т.д. Именно подобным приемом В.В. Голубев построил свой пример всюду непрерывной аналитической функции с особым множеством $E = P_0 \times P_0$: он рассматривает график функции $u = \theta(x) + \theta(y)$ над единичным квадратом (здесь $\theta(x)$ — лестница Кантора), часть его над E имеет положительную площадь в каждой своей порции и с этой части снимаем эту меру на E, пишем нужный интеграл и т.д. А. Данжуа, фактически следуя той же идее, строит пример всюду непрерывной функции с особой однозначной дугой в виде $f(z) = \int_0^1 \frac{d\xi}{\xi + i\psi(\xi) - z}$, где $\zeta = \xi + i\psi(\xi)$ — гомеоморфизм отрезка $[0; 1]$ на часть графика нигде не дифференцируемой функции Вейерштрасса $y = \psi(x)$. Конечно же, написать подобные аналитические представления — это только начало. Намного сложнее доказать, что представленная им функция обладает теми или иными свойствами, например, непрерывной продолжимостью на особое множество, — в этом убеждают работы В.В. Голубева, А. Данжуа и других, где эти доказательства сопряжены со сложными и тонкими оценками и построениями. Отметим еще, что А.Данжуа, развивая идею с однозначной дугой, строит пример всюду непрерывной аналитической функции, особое множество которой есть график $L: \ y = \psi(x)$ на всем протяжении оси Ox. Другими словами, фактически построены две аналитические функции — одна функция выше L, другая аналитическая функция ниже L, обе принимают на L равные непрерывные значения и тем не менее не являются аналитическими продолжениями одна для другой. Конечно, что кроме всего прочего, это один из ярких контрпримеров к возможному усилению теоремы об аналитическом продолжении через неспрямляемую дугу.

В процессе исследования функций с особенностями возник *вопрос о существовании* не только всюду непрерывных, но и *однолистных аналитических функций вблизи множества особенностей E*. Для построенных нами канторовых квадратов такие функции не существуют — это следует из того, что проекции их на оси координат имеют меру нуль и из локальной суммируемости производной с квадратом (последнее — из-за однолистности). Первые примеры однолистных функций с особенностями были построены в работе [13] (хотя и несколько неаккуратно). Корректные построения в этом направлении появились в 1978 г. ([14]). Первый пример здесь дает всюду непрерывную на плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ функцию, особое множество которой есть нульмерный компакт, взаимно однозначно проектирующийся на обе оси координат. Второй пример — однолистная во всей плоскости функция, особое множество E которой есть нульмерный компакт, взаимно однозначно проектирующийся на ось Ox (на обе оси — для однолистных функций — уже невозможно), причем эта проекция может быть нулевой относительно произвольно взятой счетной последовательности измеряющих функций (φ_k). При этом образ E — плоской положительной меры. Идея построения состоит в в рассмотрении подходящей последовательности конформных отображений многосвязных областей, аппроксимирующих $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$, на соответствующие области в другой плоскости.

Наконец возник *вопрос: насколько гладкой может быть функция на множестве своих особенностей.* Оказалось, что для любого компакта положительной меры существует всюду непрерывная аналитическая вне него функция $f \in \mathrm{Lip}\,(\mathbb{C})$, т.е. удовлетворяющая условию Липшица на всей плоскости: $|f(z_1) - f(z_2)| \le L|z_1 - z_2|, 0 < L < +\infty$. Здесь просто может оказаться, что не все точки данного компакта будут для f особыми (в случае, когда компакт нигде не плотен). Первые примеры появились в [15, 16]. Более совершенным является построение С.В.Хрущева ([17]), которое мы приведем ниже.

Вообще, факт существования липшицевых аналитических отображений с особенностями неожиданностью не является. Например, если $y = \theta(x)$ — классическая канторова лестница, то обратное отображение к гомеоморфизму $w = x + \theta(x) + iy$ единичного квадрата $I \times I$ есть липшицево отображение, составленоое вне особого множества из функций вида $z = w + c$ (в различных компонентах — различные c). Если вместо $\theta(x)$ взять всюду дифференцируемую канторову лестницу, то липшицевым будет и прямое отображение. Но дело в том, что на эти примеры можно смотреть как на исскуственную склейку (пусть даже дифференцируемую) различных аналитических функций. Условие Липшица явилось неожиданностью именно для нульмерных особенностей. Отметим, что для липшицевых функций имеет место формула Грина $f(z) = \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_D \frac{f_{\overline{\zeta}}}{\zeta - z} d\xi d\eta$, и мы видим, что и здесь возникают интегралы типа Помпейю-Данжуа (с неограниченной "плотностью" $f_{\overline{\zeta}}$).

Докажем следующую теорему ([17]).

Теорема 4. *Какой бы ни был компакт (в частности, нульмерный) $E \subset \mathbb{C}$ положительной плоской меры, существует всюду непрерывная функция f, аналитическая вне E, отличная от тождественно постоянной и удовлетворяющая условию Липшица на всей плоскости, т.е. $f \in Lip(\mathbb{C})$.*

Доказательство. Известно, что непрерывная на $\mathbb{C}$ функция f является липшицевой, если обобщенный градиент $(f_z, f_{\overline{z}})$ (в смысле обобщенных производных [18]) принадлежит пространству $L_\infty(\mathbb{C}) \times L_\infty(\mathbb{C})$. Рассмотрим замкнутое подпространство $L_\infty(E) \subset L_\infty(\mathbb{C})$, состоящее из всех измеримых существенно ограниченных функций, равных нулю почти всюду в $\mathbb{C} \setminus E$. Если $\varphi \in L_\infty(E)$, $\varphi \not\equiv 0$, то как мы уже знаем, функция $f(z) = \int_E \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta$ ограничена, всюду непрерывна и голоморфна вне E. Более того, $f \not\equiv 0$, так как $f_{\overline{z}}(z) = \varphi(z)$. Для доказательства теоремы достаточно подобрать функцию φ таким образом, чтобы $f_z \in L_\infty(\mathbb{C})$. Пусть для краткости $K(z) = z^{-2}$. Тогда ([18]) $f_z(z) = \text{v.p.} \int_E \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta = (K * \varphi)(z)$. Рассмотрим вспомогательное банахово пространство $L_1(E) \times L_1(C) = \{(f, g) : \|(f, g)\|_1 \equiv \int_E |f| d\xi d\eta + \int_{\mathbb{C}} |g| d\xi d\eta\} < \infty\}$. Стандартная двойственность $\langle (f, g), (\varphi, \psi) \rangle = \int_E f\varphi d\xi d\eta + \int_{\mathbb{C}} g\psi d\xi d\eta$ осуществляет изометрию пространства, сопряженного с $L_1(E) \times L_1(C)$, на пространство $L_\infty(E) \times L_\infty(C) = \{(\varphi, \psi) : \|(\varphi, \psi)\|_\infty \equiv \max\{\operatorname{ess\,sup}\{|\varphi(\zeta)| : \zeta \in \mathbb{C}\};\ \operatorname{ess\,sup}\{|\psi(\zeta)| : \zeta \in \mathbb{C}\}\} < \infty\}$. Рассмотрим линейное подпространство $\mathcal{M} = \{(K \star f\big|_E, f) : f \in L_1(\mathbb{C}), K \star f\big|_E \in L_1(E)\}$ пространства $L_1(E) \times L_1(C)$ и докажем замкнутость $\mathcal{M}$. Пусть последовательность (f_n) — такая, что $\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_{L_1(\mathbb{C})} = 0$, $\lim_{n \to +\infty} \|K \star f_n - K \star f\|_{L_1(E)} = 0$. Так как K — ядро Кальдерона-Зигмунда, то существует положительная постоянная c такая, что $\text{meas}\{\zeta \in \mathbb{C} : |K \star h(\zeta)| > y\} \le \frac{c}{y} \|h\|_1$ для любого числа $y > 0$ и для любой функции $h \in L_1(\mathbb{C})$ ([19]). Полагая здесь $h = f_n - f$, получаем, что последовательность $(K \star f_n)$ сходится к функции $(K \star f)$ по мере на множестве E и, следовательно, $K \star f = g \in L_1(E)$.

Пусть D_0 — множество всех бесконечно дифференцируемых функций на плоскости с компактным носителем и пусть $\mathcal{M}_0$ замыкание в $L_1(E) \times L_1(C)$ множества тех пар $(K \star f,\ f)$ из $\mathcal{M}$, для которых $f \in D_0$. Тогда $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$. Обозначим символом $\mathcal{M}_0^\perp$ аннулятор подпространства $\mathcal{M}_0$ в пространстве $L_\infty(E) \times L_\infty(\mathbb{C})$.

Лемма 2. *Элемент (φ, ψ) пространства $L_\infty(E) \times L_\infty(\mathbb{C})$ принадлежит $\mathcal{M}_0^\perp$ в том и только том случае, когда $\psi = -K \star \varphi$.*

Доказательство леммы легко следует из следующего тождества $0 = \int_E \varphi(K\star f)d\xi d\eta + \int_{\mathbb{C}} \psi f d\xi d\eta = \int_{\mathbb{C}} f(\psi + K\star\varphi)d\xi d\eta$ $(f \in D_0)$.

Теперь, так как $(1,0) \in \mathcal{M}$, то по теореме Хана-Банаха существует элемент $(\varphi,\psi) \in L_\infty(E)\times L_\infty(\mathbb{C})$ такой, что: а) $\int_E \varphi d\xi d\eta = 1$; б) $(\varphi,\psi) \in \mathcal{M}_0^\perp$.

Из а) следует, что $\varphi \not\equiv 0$, а б) вместе с леммой 2 влекут равенство $\psi = -K\star\varphi$. Следовательно, φ — ненулевая функция пространства $L_\infty(E)$ такая, что $K\star\varphi \in L_\infty(\mathbb{C})$, а это и требовалось. □

Отметим, что из существования функции с условием Липшица легко следует и существование однолистных функций с теми же особенностями. В самом деле, если $f \in \mathrm{Lip}\,(\mathbb{C})$ с константой L, то функция $F(z) = f(z) + 2Lz$ осуществляет гомеоморфизм расширенных плоскостей. Отличие этих однолистостей от приведенных ранее в том, что здесь как в образе, так и в прообразе, множества особых точек имеют положительную плоскую меру.

Приведем еще одно утверждение (но уже без доказательства), принадлежащее С. В. Хрущеву, которое показывает, что класс липшицевых функций с особенностями на достаточно “хорошем фиксированном множестве” E, meas $E > 0$, содержит достаточно много элементов. Пусть $\alpha \in L_\infty(E)$ и $0 < \varepsilon < 1/2$, тогда существует функция $\varphi \in L_\infty(E)$ такая, что

$$\sup\left\{\left|\int_E \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta\right| :\ z \in \mathbb{C}\setminus E\right\} \le C\ln(1/\varepsilon)\|\varphi\|_\infty,$$

$$\mathrm{meas}\{\zeta \in E:\ \varphi(\zeta) \ne \alpha(\zeta)\} \le \mathrm{const}\cdot\varepsilon.$$

Здесь следует уточнить нашу фразу о “хороших” множествах. Дело в том, что еще Данжуа подозревал, что ограниченность производной вне E может не обеспечивать условия Липшица всюду в окрестности E. Он ввел следующее понятие извилистости (sinuositè) нульмерного компакта. Пусть $E \subset D$ $(\subset \mathbb{C})$ и $z_1, z_2 \in D\setminus E$ — произвольные точки; соединим их простой спрямляемой кривой $l(z_1,z_2)$ и рассмотрим величину $\sigma(z_1,z_2) = \inf\{l(z_1,z_2)/|z_1 - z_2|\}$, где inf берется по всем спрямляемым кривым, соединяющим точки z_1, z_2. *Извилистостью множества* E Данжуа называет $\sigma(E) = \sup\{\sigma(z_1,z_2) :\ z_1, z_2 \in D\setminus E\}$. Данжуа несложно доказывает, что если извилистость множества E ограничена, то ограниченность производной f' вне E влечет непрерывную продолжимость самой функции f на E, а вместе и условие Липшица.

В последнем утверждении С.В.Хрущева, которое мы привели, речь как раз и идет фактически о нульмерных множествах с ограниченной извилистостью. Такими множествами являются, например, представимые в виде произведения $E_x \times E_y$ линейных множеств.

То, что опасения Данжуа были не напрасны, подтвердил построенный А. Г. Витушкиным (и сам по себе удивительный) пример аналитической функции вне E ([20]), производная которой ограничена и равномерно непрерывна (!), а первообразная неограничена в окрестности каждой точки E, т.е. нет даже ее непрерывного продолжения на особое множество — извилистость в каждой точке бесконечна. Пример А.Г. Витушкина возник, впрочем, по другому поводу. Из теоремы о существовании угловых граничных значений ограниченной аналитической функции легко следует что любая ограниченная аналитическая функция F, $F(\infty) = 0$, с нульмерным множеством E особых точек положительной меры, принадлежащих спрямляемой дуге, представима в виде $F(z) = \int_E \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$, где $\varphi(\zeta)$ есть разность граничных значений F с одной и другой стороны дуги.

В.В. Голубев поставил *вопрос* ([4]): *нельзя ли всякую функцию, однозначную в окрестности особого множества E представить суммой конечного или бесконечного ряда вида*

$$f(z) = \int_E \frac{\varphi_1(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_E \frac{\varphi_2(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \cdots + \int_E \frac{\varphi_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \cdots$$

(здесь f — голоморфная функция вблизи E), *сходящегося всюду вне E*. Тогда, по мысли В.В. Голубева, особое множество аналитической функции входило бы явно в ее преставление, а каждую такую функцию можно было бы рассматривать в определенном смысле как функцию своих особенностей. Одно время показалось, что вопрос этот решается положительно. Однако, ошибка быстро обнаружилась, а А.Г. Витушкин, указанным выше примером показал, что здесь представления таким рядом не существует, даже если понимать написанные интегралы по любой определенной на E мере.

Оглянемся снова на весь класс аналитических функций с совершенным множеством особых точек. Что же получается? Какое внешнее глобальное свойство ни назвать, как-то: ограниченность, непрерывность, однолистость, липшицевость и др., — подобная функция может им обладать в полной окрестности особого множества. *В чем же тогда проявляется особенность этого множества? Как отличить, например, непрерывность функции на этом множестве от непрерывности вне него?*

Конечно, если мы, в случае непрерывной функции, потребуем существования производной f' в каждой точке множества E, то f окажется голоморфной вне области. Но существование производной есть свойство локальное, а высказанное только что утверждение как раз и подсказывает, что именно локальное поведение f в особых точках (и — наверное не обязательно дифференциальное) оказывается отличным от ее поведения в точках регулярных. И, по-видимому, "неприличное" поведение f может оказаться не обязательно во всех особых точках, но обязательно на плотном в E подмножестве. Например, если взять непрерывную функцию f с особым множеством E и $f(\infty) = 0$, то взяв некоторую точку $z_0 \in E$ и функцию $f_1(z) = (z - z_0) f(z)$, получим функцию с особенность в E и моногенной в особой точке z_0.

Приведем несколько критериев ([21]) устранимости возможных особенностей непрерывных аналитических функций, которые все же носят дифференциальный характер.

1. *Пусть функция f в области $D \subset \mathbb{C}$ непрерывна и $E \subset D$ — совершенное множество меры нуль, такое, что f голоморфна в $D \setminus E$ и из каждой точки $z \in E$, исключая не более чем счетное их множество, исходит два линейно независимых луча $t_1(z)$, $t_2(z)$ вдоль которых*

$$\varlimsup_{h \to 0, z+h \in t(z)} \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right| < +\infty, \quad t(z) = t_1(z) \cup t_2(z).$$

Тогда функция f голоморфна в D.

Назовем временно компакт E простым, если локально он либо нульмерен, либо локально связен (например является дугой).

2. *Если функция f в области $D \subset \mathbb{C}$ непрерывна и $E \subset D$ простое и меры нуль, такое, что f аналитична в $D \setminus E$ и через каждую точку $z \in E$, исключая не более чем счетное их множество, проходит прямая $t_0(z)$ вдоль которой*

$$\varlimsup_{h \to 0, z+h \in t_0(z)} \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right| < +\infty.$$

Тогда функция f аналитическая всюду в D.

Приведем критерии для простых компактов произвольной меры. Мы уже упоминали выше, что требование комплексной дифференцируемости на E тривиальным образом приводит к голоморфности функции. Оказывается, что для простых E достаточной для этого будет и $\mathbb{R}$-дифференцируемость (т.е. дифференцируемость в вещественном смысле).

3. *Если функция f в области $D \subset \mathbb{C}$ непрерывна, $E \subset D$ — простой компакт, такой, что f голоморфна в $D \backslash E$ и f — $\mathbb{R}$-дифференцируема на E, то функция f аналитическая всюду в D.*

4. *Если функция f в области $D \subset \mathbb{C}$ непрерывна, $E \subset D$ простой компакт, такие, что f голоморфна в $D \setminus E$ и через каждую точку $z \in E$, исключая не более чем счетное их множество, проходит прямая $t_0(z)$ вдоль которой f имеет конечную (комплексную) производную, то функция f аналитична всюду в D.*

Уже эти критерии дают определенную возможность представить различие между локальными поведениями аналитической функции в регулярной точке и в подавляющем большинстве точек особых. И все же оказывается, что существуют теоремы, из которых можно почувствовать действительную особенность множества E. Приведем такую теорему ([21]).

Теорема 5. *Пусть E — нигде не плотный компакт и функция $f : \overline{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ непрерывна и голоморфна в $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$. Тогда: 1) $f(\overline{\mathbb{C}} \setminus E) \subset f(E)$, т.е. все свои регулярные значения функция f принимает на множестве E; 2) E — (непустое) совершенное подмножество E_0, $E \subseteq E_0$, на котором находится множество E'_0, всюду второй категории на E_0, каждая точка z которого такова, что значение $f(z)$ бесконечнократно как в регулярном, так и в нерегулярном смысле, т.е. найдутся две последовательности $\{z_n\} \subset \mathbb{C} \setminus E$ и $\{z'_n\} \subset E$ такие, что $z_n \to z$, $z'_n \to z$ и $f(z_n) = f(z'_n) = f(z)$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Borel E. *Sur a region de sommabilité d'une série de Taylor* // C.R. Acad. Sci. Paris. – oct. 1897. – V.348.

2. Pompeiú D. *Sur la continuité des fonctions de variable complexe* // Ann. Fac. Sci. Toulouse. – 1905. – V.7. – P.29.

3. Denjoy A. *Sur les fonctions analitiques uniformes qui restent continues sur un ensemple parfait discontinu de singularités* // C.R. – 1909. – V.148. – P. 1154–1156.

4. Голубев В.В. Однозначные аналитические функции. – М.: Физматгиз, 1961. – 455 с.

5. Витушкин А.Г. *Пример множеств положительной длины, по нулевой аналитической емкости* // ДАН СССР. – 1959. – Т.127, №2. – С. 246–249

6. Витушкин А.Г. *Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближений* // Успехи мат.наук. – 1967. – Т.22, №6. – С. 141—199.

7. Tolsa X. *Painlevés problem semiaddivity of analytic capacity.* – Acta Math. – 2003. – V. 190, №1, 105—149.

8. Урысон П.С. Труды по топологии и другим областям математики. Т.1. – М.: Гостехиздат, 1951. – 512 с.

9. Denjoy A. *Sur la continuité des fonctions analytiques singulièrs* // Bull. Soc. Math. France. – 1932. – V.60. – P.27–105.
10. Федоров В.С. *О разложении всюду непрерывной аналитической функции в ряд по двойным интегралам Lebesquéa* // Мат. сборн. – 1926. – Т.33. – С. 385–394.
11. Долженко Е.П. *О "стирании" особенностей аналитических функций* // Успехи мат.наук. – 1963. – Т.18, №4. – С. 135–142.
12. Kaufman R. *Two problems on removable sets for analytic functions* // Arkiv math. – 1982. – V.20,№1. – P.15–22.
13. Rofhberger F. *On conformal mapping problem of Stoilow and of Wolibner* // Col. Math. – 1967. – V.17, №1. – P.61–69.
14. Бондарь А.В. Локальные геометрические характеристики голоморфных отображений. – Киев: Наук. думка, 1992. – 222 с.
15. Uy N.X. *Totally disconnected non-removable for Lipshitz continnous sonnded analytic functions* // Math. Scand. – 1977. – V.40, №1. – P.113–118.
16. Uy N.X. *Removable sets od analytic functions satisfying a Lipshitz condition* // Arkiv math. – 1979. – V.17, №1. – P.19–27.
17. Хрущев С.В. *Простое доказательство теоремы об устранимых особенностях аналитических функций, удовлетворяющих условию Липшица* // Зап. науч. семин. ЛОМИ. – 1981. – Т.113. – С.199–203.
18. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. – М.: Физматгиз, 1959. – 628 с.
19. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. – М.: Мир, 1973. – 344 с.
20. Витушкин А.Г. *Об одной задаче Данжуа* Изв. АН СССР, сер. матем. – 1964. – Т.28, №4. – С.745–756.
21. Трохимчук Ю.Ю. Устранимые особенности аналитических функций. – Киев: Наук. думка, 1992. – 223 с.
22. Бибербах Л. Аналитическое продолжение. – М.: Наука, 1967. – 240 с.

Институт математики НАН Украины
trokhymchuk@imath.kiev.ua

Поступило 16.12.2005