УДК 518:517.948

С. М. Шахно

ПРО РIЗНИЦЕВИЙ МЕТОД З КВАДРАТИЧНОЮ ЗБIЖНIСТЮ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛIНIЙНИХ ОПЕРАТОРНИХ РIВНЯНЬ

S. M. Shakhno. *On the difference method with quadratic convergence for solving nonlinear operator equations*, Matematychni Studii, **26** (2006) 105–110.

The local and semilocal convergence of Kurchatov method of linear interpolation for solving non-linear operator equations in Banach spaces is investigated. The quadratic order of convergence of this method is proved. A priori and a posteriori estimations of the error of the method are obtained.

С. М. Шахно. *О разностном методе с квадратической сходимостью для решения нелинейных операторных уравнений* // Математичнi Студiї. – 2006. – Т.26, №1. – С.105–110.

Исследуется локальная и полулокальная сходимость метода линейной интерполяции Курчатова для решения нелинейных операторных уравнений в банаховых пространствах. Доказан квадратический порядок сходимости и получена априорная и апостериорная оценки погрешности метода.

1. Вступ. Найпростiшим рiзницевим методом розв'язування нелiнiйних рiвнянь є метод хорд. Дослiдження його здiйснювали багато авторiв з рiзних точок зору (див., наприклад, [1, 4, 5]). Порядок збiжностi цього методу дорiвнює 1.618.... Менш дослiдженим є iтерацiйний метод лiнiйної iнтерполяцiї, запропонований В.А.Курчатовим в [3]. Використовуючи, як i метод хорд, два попереднi наближення, метод Курчатова володiє квадратичною швидкiстю збiжностi. Однак дослiдження методу у згаданiй статтi [3] проведене за доволi жорстких умов, зокрема, вимагається обмеженiсть за нормою третьої похiдної вiд нелiнiйного оператора. У данiй статтi, використовуючи принцип мажорант Л.В.Канторовича ([2]) (подiбно до того, як у статтi [5] за допомогою цього принципу проводиться дослiдження методу хорд), дослiджуємо локальну збiжнiсть методу Курчатова; за виконання умови Лiпшиця для подiлених рiзниць другого порядку доводимо напiвлокальну збiжнiсть методу, знаходимо апрiорну та апостерiорну оцiнки похибки методу. Вiдзначимо, що за подiбних умов в [6] дослiджено рiзницевий метод, який використовує iнформацiю з трьох попереднiх iтерацiй, проте порядок збiжностi його нижчий i дорiвнює 1.839.... За домогою цього ж методу у статтi [7] нами дослiджено нелiнiйнi задачi найменших квадратiв.

2. Локальна збiжнiсть методу Курчатова. Нехай задане нелiнiйне операторне рiвняння вигляду

$$F(x) = 0, \tag{1}$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 65J15; 65H10.

де F — нелінійний оператор, визначений у відкритій області D банахового простору X зі значеннями в банаховому просторі Y. Нехай x, y та z — три точки області D.

Лінійний оператор з X в Y, позначуваний $F(x,y)$, називається *поділеною різницею* від F за точками x і y, якщо він задовольняє умову $F(x,y)(x-y) = F(x) - F(y)$.

Поділеною різницею другого порядку від функції F за точками x, y та z називатимемо оператор $F(x,y,z)$, який задовольняє умову $F(x,y,z)(y-z) = F(x,y) - F(x,z)$.

Тут використовуватимемо методику доведення з [6].

Теорема 1. *Нехай F — нелінійний оператор, який визначений у відкритій опуклій області D банахового простору X зі значеннями в банаховому просторі Y. Припустимо, що рівняння (1) має розв'язок $x^* \in D$ і існує оборотна похідна Фреше $F'(x^*)$. Нехай F має в області $V = \{x : \|x - x_*\| < 3r_*\} \subseteq D$ поділені різниці першого та другого порядку, які задовольняють умови Ліпшиця*

$$\|F'(x^*)^{-1}(F(x,y) - F(u,v))\| \le p_*(\|x-u\| + \|y-v\|), \tag{2}$$

$$\|F'(x^*)^{-1}(F(u,x,y) - F(v,x,y))\| \le q_*\|u-v\|, \tag{3}$$

де $r_* = 2/(3p_* + \sqrt{9p_*^2 + 32q_*})$. *Тоді для всіх* $x_0, x_{-1} \in U = \{x : \|x - x_*\| < r_*\}$ *ітераційний процес*

$$x_{n+1} = x_n - (F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1}))^{-1}F(x_n),\ n = 0,1,\ldots \tag{4}$$

коректно визначений і генерована ним послідовність $\{x_n\}_{n\ge 0}$, яка належить до U, збігається до x^* і задовольняє нерівність

$$\|x_{n+1} - x^*\| \le \frac{p_*\|x_n - x^*\| + q_*\|x_n - x_{n-1}\|^2}{1 - 2p_*\|x_n - x^*\| - q_*\|x_n - x_{n-1}\|^2}\|x_n - x^*\|. \tag{5}$$

Доведення. Через A_n позначимо лінійний оператор $A_n = F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1})$. Легко бачити, що якщо $\{x_n, x_{n-1}\} \subset U$, то $\{2x_n - x_{n-1}, x_{n-1}\} \subset V$. Тоді A_n є оборотний і виконується нерівність

$$\begin{gathered}\|[I - (I - F'(x^*)^{-1}A_n))^{-1}\| = \|A_n^{-1}F'(x^*)\| \le \\ \le (1 - p_*(\|x_n - x^*\| + \|x_{n-1} - x^*\|) - q_*\|x_n - x_{n-1}\|^2)^{-1}.\end{gathered} \tag{6}$$

Справді, з формул (2) і (3) отримаємо

$$\begin{gathered}\|I - F'(x^*)^{-1}A_n\| = \|F'(x^*)^{-1}(F(x^*,x^*) - F(x_n,x_n) + \\ +F(x_n,x_n) - F(x_n,x_{n-1}) + F(x_n,x_{n-1}) - F(2x_n - x_{n-1},x_{n-1}))\| \le 2p_*\|x_n - x^*\| + \\ +\|F'(x^*)^{-1}(F(x_n,x_{n-1},x_n) - F(2x_n - x_{n-1},x_{n-1},x_n))(x_n - x_{n-1})\| \le 2p_*\|x_n - x^*\| + \\ +q_*\|x_n - x_{n-1}\|^2.\end{gathered}$$

З означення r_* маємо

$$2p_*r_* + 4q_*r_* = 1 - p_*r_* - 4q_*r_*^2 < 1. \tag{7}$$

Використовуючи теорему Банаха, ми отримуємо формулу (6). Далі можна записати

$$\begin{gathered}\|x_{n+1} - x^*\| = \|x_n - x^* - A_n^{-1}(F(x_n) - F(x^*))\| \\ \le \|A_n^{-1}F'(x^*)\|F'(x^*)^{-1}(F(x_n,x^*) - A_n)\|\|x_n - x^*\|.\end{gathered} \tag{8}$$

За умовами (2) і (3) теореми маємо

$$\|F^{'}(x^*)^{-1}(F(x_n,x^*)-A_n)\| = \|F^{'}(x^*)^{-1}(F(x_n,x^*)-$$
$$-F(x_n,x_n)+F(x_n,x_n)-F(x_n,x_{n-1})+F(x_n,x_{n-1})-F(2x_n-x_{n-1},x_{n-1}))\| \le$$
$$\le p_*\|x_n-x^*\| + \|F^{'}(x^*)^{-1}(F(x_n,x_{n-1},x_n)-F(2x_n-x_{n-1},x_{n-1},x_n))(x_n-x_{n-1})\| \le$$
$$\le p_*\|x_n-x^*\| + q_*\|x_n-x_{n-1}\|^2.$$

З (6) і (8) одержуємо нерівність (5).

Далі, з (5) і (7) ми отримаємо, що $\|x_{n+1}-x^*\| < \|x_n-x^*\| < r_*, \quad n = 0,1,2\ldots$. Тому ітераційний процес є коректно визначений і послідовність, яку він породжує, належить до U. З останньої нерівності і оцінки (5) отримуємо $\lim\limits_{x\to 0}\|x_n-x^*\| = 0$.

□

Наслідок. *Порядок збіжності ітераційної процедури Курчатова квадратичний.*

Доведення. Оскільки згідно з нерівністю (5) швидкість збіжності послідовності $\{x_n\}_{n\ge 0}$ не вища за квадратичну, то існують $C \ge 0$ і $N > 0$ такі, що для всіх $n \ge N$ виконується нерівність $\|x_n-x_{n-1}\|^2 \le \|x_{n-1}-x_*\|^2 \le C\|x_n-x_*\|$. З врахуванням цієї нерівності з (5) випливає, що послідовність $\{x_n\}_{n\ge 0}$ має квадратичний порядок збіжності до x^*. □

3. Напівлокальна збіжність методу Курчатова. Наступна теорема є аналогом теореми 2, встановленої в [5].

Теорема 2. *Нехай F — нелінійний оператор, який визначений на відкритій опуклій множині D банахового простору X зі значеннями в банаховому просторі Y. Нехай $F(\cdot,\cdot)$ і $F(\cdot,\cdot,\cdot)$ поділені різниці першого і другого порядку від F на множині $V_0 = \{x : \|x - x_0\| \le 3r_0\} \subset D$. Припустимо, що лінійний оператор $A_0 = F(2x_0 - x_{-1}, x_{-1})$, де $x_0, x_{-1} \in U_0 = \{x : \|x - x_0\| \le r_0\}$, є оборотний і задовольняє наступні умови Ліпшиця*

$$\|A_0^{-1}(F(x,y)-F(u,v))\| \le p_0(\|x-u\|+\|y-v\|), \tag{9}$$

$$\|A_0^{-1}(F(x,y,z)-F(u,y,z))\| \le q_0\|x-u\|. \tag{10}$$

Нехай невід'ємні числа a і c, такі що

$$\|x_0-x_{-1}\| \le a, \qquad \|A_0^{-1}F(x_0)\| \le c. \tag{11}$$

Якщо $2q_0a^2 \le 1$, для дійсного полінома $h(t) = -q_0t^3-(p_0+q_0a)t^2+(1-q_0a^2)t$ виконується нерівність

$$c(1-2q_0a^2) \le h(r) = \frac{1}{3}\cdot(p_0+q_0a+2s)\Big(\frac{1-q_0a^2}{p_0+q_0a+s}\Big)^2, \tag{12}$$

де $s = \big\{(p_0+q_0a)^2+3q_0(1-q_0a^2)\big\}^{1/2}$, $r = (1-q_0a^2)/(p_0+q_0a+s)$ і замкнена куля $V_0 \subset D$, де $r_0 \in (0,r]$ є коренем рівняння $h(t) = c(1-2q_0a^2)$, то ітераційний процес (4) коректно визначений і генерована ним послідовність $\{x_n\}_{n\ge 0}$ збігається до розв'язку x^* рівняння (1). Більше того, для всіх $n \in \{-1,0,1,2,\ldots\}$ виконується нерівність

$$\|x_n-x^*\| \le t_n, \tag{13}$$

де

$$t_0 = r_0, \quad t_{-1} = r_0+a, \quad a_0 = p_0+3q_0r_0+q_0a, \quad b_0 = 3q_0r_0^2-2a_0r_0-q_0a^2+1, \tag{14}$$

$$t_{n+1} = t_n\cdot\frac{a_0t_n-q_0(t_n-t_{n-1})^2-2q_0t_n^2}{b_0+2a_0t_n-q_0(t_n-t_{n-1})^2-3q_0t_n^2},\ n\in\{0,1,2,\ldots\}. \tag{15}$$

Доведення. Відзначимо, що послідовність $\{t_n\}_{n\geq 0}$ отримується застосуванням ітераційної процедури (4) до дійсного полінома $f(t) = -q_0 t^3 + a_0 t^2 + b_0 t$. Легко бачити, що ця послідовність монотонно збігається до нуля. Також ми маємо

$$
\begin{gathered}
t_{n+1} - t_{n+2} = \frac{2(t_{n+1} - t_n)}{f(2t_{n+1} - t_n) - f(t_n)} f(t_{n+1}) = \\
= \frac{[-q_0(t_{n+1}^2 + t_{n+1}t_n - 3t_n^2 + 2t_n t_{n-1} - t_{n-1}^2) + a_0(t_{n+1} - t_n)](t_{n+1} - t_n)}{-q_0(4t_{n+1}^2 - 2t_{n+1}t_n + t_n^2) + 2a_0 t_{n+1} + b_0} = \\
= \frac{\{[a_0 - q_0(2t_n + t_{n+1})](t_n - t_{n+1}) + q_0(t_n - t_{n-1})^2\}(t_n - t_{n+1})}{1 - q_0 a^2 - 2p_0(t_0 - t_{n+1}) - q_0[3(t_0 - t_{n+1})(3t_0 + t_{n+1}) - (t_n - t_{n+1})^2]} \geq \\
\geq \frac{p_0(t_n - t_{n+1}) + q_0(t_{n-1} - t_n)^2}{1 - 2p_0(t_0 - t_{n+1}) - q_0 a^2}(t_n - t_{n+1}).
\end{gathered} \tag{16}
$$

Доведемо за допомогою індукції, що ітераційний процес (4) є коректно визначений і що

$$
\|x_n - x_{n+1}\| \leq t_n - t_{n+1}. \tag{17}
$$

Використовуючи (11), (12), (14) і той факт, що

$$
t_0 - t_1 = t_0 \cdot \left(1 - \frac{a_0 t_0 - q_0(t_0 - t_{-1})^2 - 2q_0 t_0^2}{b_0 + 2a_0 t_0 - q_0(t_0 - t_{-1})^2 - 3q_0 t_0^2}\right) = \frac{h(r_0)}{1 - 2q_0 a^2} = c,
$$

ми доводимо, що (17) виконується для $n \in \{-1, 0\}$. Нехай k невід'ємне число і для всіх $n \leq k$ виконується (17). Якщо $A_{k+1} = F(2x_{k+1} - x_k, x_k)$, то відповідно до (9) і (10) маємо

$$
\begin{gathered}
\|I - A_0^{-1}A_{k+1}\| = \|A_0^{-1}(A_0 - A_{k+1})\| = \\
= \|A_0^{-1}(F(2x_0 - x_{-1}, x_{-1}) - F(x_0, x_{-1}) + F(x_0, x_{-1}) - F(x_0, x_0) + F(x_0, x_0) - \\
- F(x_{k+1}, x_0) + F(x_{k+1}, x_0) - F(x_{k+1}, x_k) + F(x_{k+1}, x_k) - F(2x_{k+1} - x_k, x_k)\| = \\
= \|A_0^{-1}(F(2x_0 - x_{-1}, x_{-1}, x_0) - F(x_0, x_{-1}, x_0))(x_0 - x_{-1}) + (F(x_0, x_0) - F(x_{k+1}, x_0)) + \\
+ (F(x_{k+1}, x_0) - F(x_{k+1}, x_k)) + (F(x_{k+1}, x_k) - F(2x_{k+1} - x_k, x_k)))\| \leq \\
\leq q_0 a^2 + p_0(\|x_0 - x_{k+1}\| + \|x_0 - x_k\| + \|x_k - x_{k+1}\|) \leq \\
\leq q_0 a^2 + 2p_0(t_0 - t_{k+1}) < q_0 a^2 + 2p_0 t_0 \leq q_0 a^2 + 2p_0 r \leq q_0 a^2 + 2p_0 \frac{1 - q_0 a^2}{2p_0} = 1.
\end{gathered}
$$

За теоремою Банаха маємо, що A_{k+1} є оборотний і

$$
\|A_{k+1}^{-1}A_0\| \leq (1 - q_0 a^2 - p_0(\|x_0 - x_{k+1}\| + \|x_0 - x_k\| + \|x_k - x_{k+1}\|))^{-1}. \tag{18}
$$

Тепер доведемо, що ітераційний процес (4) є коректно визначений для $n = k+1$. Маємо

$$
\begin{gathered}
\|x_{k+1} - x_{k+2}\| = \|A_{k+1}^{-1}F(x_{k+1})\| = \|A_{k+1}^{-1}(F(x_{k+1}) - F(x_k) - A_k(x_{k+1} - x_k))\| \leq \\
\leq \|A_{k+1}^{-1}A_0\| \|A_0^{-1}(F(x_{k+1}, x_k) - A_k)\| \|x_k - x_{k+1}\|.
\end{gathered} \tag{19}
$$

Використовуючи формули (9) і (10), отримаємо

$$
\|A_0^{-1}(F(x_{k+1}, x_k) - A_k)\| = \|A_0^{-1}(F(x_{k+1}, x_k) - F(x_k, x_k) +
$$

$$+F(x_k,x_k)-F(x_k,x_{k-1})+F(x_k,x_{k-1})-F(2x_k-x_{k-1},x_{k-1})\| =$$
$$=\|A_0^{-1}(F(x_{k+1},x_k)-F(x_k,x_k)+(F(x_k,x_{k-1},x_k)-F(2x_k-x_{k-1},x_{k-1},x_k))\times \tag{20}$$
$$\times(x_k-x_{k-1}))\| \le p_0\|x_k-x_{k+1}\|+q_0\|x_{k-1}-x_k\|^2.$$

З (18) – (20) випливає, що

$$\|x_{k+1}-x_{k+2}\| \le \frac{(p_0\|x_k-x_{k+1}\|+q_0\|x_{k-1}-x_k\|^2)\|x_k-x_{k+1}\|}{1-p_0(\|x_0-x_{k+1}\|+\|x_0-x_k\|+\|x_k-x_{k+1}\|)-q_0a^2}.$$

Остаточно, використовуючи (16) і (17), ми отримаємо, що $\|x_{k+1}-x_{k+2}\| \le t_{k+1}-t_{k+2}$. Тобто, ми довели, що ітераційний процес (4) є коректно визначений для кожного n. З цього випливає, що $\|x_n-x_k\| \le t_n-t_k$, $(-1 \le n \le k)$. Отже, послідовність $\{x_n\}_{n\ge 0}$ є фундаментальною і тому у просторі X вона є збіжною. Спрямовуючи тепер в останній нерівності k до нескінченності, отримаємо (13). Легко бачити, що x^* є коренем рівняння (1), позаяк, згідно з (20), можна записати $\|A_0^{-1}F(x_{k+1})\| = \|A_0^{-1}(F(x_{k+1},x_k)-A_k)(x_{k+1}-x_k)\| \le p_0\|x_k-x_{k+1}\|^2+q_0\|x_k-x_{k-1}\|^2\|x_k-x_{k+1}\|$. Теорему доведено. □

Наслідок. *Порядок збіжності ітераційної процедури Курчатова – квадратичний.*

Доведення. Оскільки згідно з (15) швидкість збіжності послідовності $\{t_n\}_{n\ge 0}$ до нуля не вища за квадратичну, то існують $C \ge 0$ і $N > 0$, що для всіх $n \ge N$ виконується нерівність $(t_n-t_{n-1})^2 \le t_{n-1}^2 \le Ct_n$. З врахуванням цієї нерівності з (15), випливає, що послідовність $\{t_n\}_{n\ge 0}$ має квадратичний порядок збіжності, а згідно з (13) і послідовність $\{x_n\}_{n\ge 0}$ збігається квадратично. □

Нерівність (13) дає апріорну оцінку похибки методу Курчатова. Наведена нижче теорема, як і теореми 3 і 4 з [5], містить апостеріорну оцінку похибки методу, яка є точнішою за апріорну.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми 2. Позначимо* $e_n = p_0\|x_n-x_{n-1}\|^2 + q_0\|x_{n-1}-x_{n-2}\|^2\|x_{n-1}-x_n\|$, $\quad g_n = 1-2p_0\|x_n-x_0\|-q_0a^2$. *Тоді для всіх* $n \in \mathbb{N}$ *правильна нерівність* $\|x_n-x^*\| \le 2e_n(g_n+(g_n^2-4p_0e_n)^{\frac{1}{2}})^{-1} \le t_n$.

Доведення теореми 3 проводиться подібно до відповідного доведення з [6].

ЛІТЕРАТУРА

1. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – М.: Мир, 1975. – 558 с.

2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984. – 752 с.

3. Курчатов В.А. *Об одном методе линейной интерполяции решения функциональных уравнений* // Докл. АН СССР. Сер. Математика. Физика. – 1971. – Т. 198, №3. – С. 524–526.

4. Трауб, Дж. Итерационные методы решения уравнений / Пер. с англ. Глинкина И. А.: Под ред. Сухарева А.Г. – М.: Мир, 1985.

5. Шахно С.М. *Застосування нелінійних мажорант для дослідження методу хорд розв'язування нелінійних рівнянь.* // Математичні студії. – 2004. – Т.22, №1. – С.79–86.
6. Potra F.A. *On an iterative algorithm of order 1.839... for solving nonlinear operator equations* // Numer. Funct. Anal. and Optimiz. – 1984/85. – V.7, №1. – P.75–106.
7. Shakhno S.M., Gnatyshyn O.P. *On an iterative algorithm of order 1.839... for solving nonlinear least squares problems* // Applied Mathematics and Computation. – 2005. – V. 161, №1. – P. 253–264.

Львівський національний університет імені Івана Франка
Факультет прикладної математики та інформатики

Надійшло 19.10.2004