УДК 517.537.72

М. М. Зеліско, М. М. Шеремета

ПРО ВПЛИВ АРГУМЕНТІВ КОЕФІЦІЄНТІВ РЯДУ ДІРІХЛЕ НА ЙОГО ЗРОСТАННЯ

M. M. Zelisko, M. M. Sheremeta. *On influence of coefficients arguments for Dirichlet series on its growth*, Matematychni Studii, **26** (2006) 81–85.

For a Dirichlet series $F(s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\exp\{s\lambda_n\}$ with arbitrary abscissa of absolute convergence, a relation between the growth of $M(\sigma,F)=\sup\{|F(\sigma+it)|:\, t\in\mathbb{R}\}$ and of $M_1(\sigma,F)=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\exp\{\sigma\lambda_n\}$ is investigated.

М. М. Зелиско, М. Н. Шеремета. *О влиянии аргументов коэффициентов ряда Дирихле на его рост* // Математичні Студії. – 2006. – Т.26, №1. – С.81–85.

Для ряда Дирихле $F(s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\exp\{s\lambda_n\}$ с произвольной абсциссой абсолютной сходимости исследована связь между ростом $M(\sigma,F)=\sup\{|F(\sigma+it)|:\, t\in\mathbb{R}\}$ и $M_1(\sigma,F)=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\exp\{\sigma\lambda_n\}$.

1. Вступ. Якщо для цілої функції $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ скінченного порядку ϱ позначимо $M_f(r)=\max\{|f(z)|:\,|z|=r\}$ і $M_{f,1}(r)=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n$, то, як довів Г. Брінкмайер ([1]), правильна непокращувана оцінка $\varlimsup\limits_{r\to+\infty}(\ln M_{f,1}(r)-\ln M_f(r))/\ln r\le\varrho/2$. Отриманню оцінок $M_{f,1}(r)$ зверху через максимальний член $\mu_f(r)=\max\{|a_n|r^n:\, n\ge0\}$, а з огляду на нерівність Коші $\mu_f(r)\le M_f(r)$ і через $M_f(r)$ присвячені праці багатьох математиків. Найближчим до доведеної Г. Брінкмайером нерівності є недавній результат П. В. Філевича ([2]), який вказав необхідну і достатню умову на швидкість зростання $M_f(r)$, за якої $\varlimsup\limits_{r\to+\infty}(\ln M_{f,1}(r)-\ln M_f(r)/\ln\ln M_f(r))\le\alpha\in(0,+\infty)$.

Безпосереднім узагальненням степеневих рядів є ряди Діріхле $F(s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\exp\{s\lambda_n\}$, $s=\sigma+it$, де послідовність $\Lambda=(\lambda_n)$ зростає до $+\infty$ і $\lambda_0=0$. Клас таких рядів з абсцисою абсолютної збіжності $\sigma_a=A\in(-\infty,+\infty]$ позначимо через $S(\Lambda,A)$. Для $F\in S(\Lambda,A)$ і $\sigma<A$ приймемо $M(\sigma,F)=\sup\{|F(\sigma+it)|:\,t\in\mathbb{R}\}$, $M_1(\sigma,F)=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\exp\{\sigma\lambda_n\}$, і нехай $\mu(\sigma,F)=\max\{|a_n|\exp\{\sigma\lambda_n\}\, n\ge0\}$ — максимальний член ряду Діріхле. Метою нашої статті є оцінки різниці $\ln M_1(\sigma,F)-\ln M(\sigma,F)$ за тих чи інших умов на зростання $M(\sigma,F)$ і лічильної функції $n(t)=\sum_{\lambda_n\le t}1$ послідовності Λ.

Для цього через $\Omega(A)$ позначимо клас додатних на $(-\infty,A)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' додатна, неперервно диференційовна і зростає до $+\infty$ на $(-\infty,A)$. Для $\Phi\in\Omega(A)$ нехай φ — функція, обернена до Φ', а $\Psi(\sigma)=\sigma-\Phi(\sigma)/\Phi'(\sigma)$ — функція, асоційована з Φ за Ньютоном. Тоді ([3]) функція Ψ неперервно диференційовна і зростає до A на

2000 *Mathematics Subject Classification:* 30B50, 30D15.

$(-\infty, A)$, а функція φ неперервно диференційовна і зростає до A на $(0, +\infty)$. Звідси випливає, що і обернена до Ψ функція Ψ^{-1} також зростає до A на $(-\infty, A)$. Основною у статті є така теорема.

Теорема 1. *Нехай* $A \in (-\infty, +\infty]$, $F \in S(\Lambda, A)$ *і функція* $\Phi \in \Omega(A)$ *така, що* $\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma) \nearrow +\infty$, $\sigma_0 \le \sigma \uparrow A$, *і у випадку, коли* $A < +\infty$,

$$(A - \sigma)\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma) \to +\infty, \quad \sigma \uparrow A. \tag{1}$$

Якщо $\ln\,\mu(\sigma, F) \le \Phi(\sigma)$, $\sigma_0 \le \sigma < A$, *і*

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\ln\,n(t)}{\Phi(\Psi(\varphi(t)))} \le \tau, \tag{2}$$

то

$$\overline{\lim_{\sigma\uparrow A}} \frac{\ln\,M_1(\sigma, F) - \ln\,M(\sigma, F)}{\Phi(\sigma)} \le \frac{\tau q(\tau)}{2}, \tag{3}$$

де $q(\tau) = \lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} \overline{\lim\limits_{\sigma\uparrow A}} \Phi(\sigma + (\tau + \varepsilon)\Phi(\sigma)/\Phi'(\sigma))/\Phi(\sigma)$.

У випадку $A = +\infty$ з умови $\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma) \nearrow +\infty$ $(\sigma_0 \le \sigma \uparrow +\infty)$ випливає, що функція Φ зростає швидше, ніж показникова функція. У п. 3 ми доповнимо теорему 1 результатом, який можна буде використовувати і у випадку, коли функція Φ зростає значно повільніше. Якщо $A = 0$ (загальний випадок $A < +\infty$ зводиться до випадку $A = 0$ заміною s на $s - A$), то умова $\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma) \nearrow +\infty$ $(\sigma_0 \le \sigma \uparrow 0)$ не є обтяжливою у застосуваннях. Проте такою є умова (1), яка має вигляд $|\sigma|\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma) \to +\infty$ $(\sigma \uparrow 0)$ і виконується для функцій Φ, які зростають швидше, ніж степенева функція від $1/|\sigma|$. У п. 3 ми вкажемо, як можна умову $|\sigma|\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma) \to +\infty$ $(\sigma \uparrow 0)$ послабити.

2. Доведення теореми 1. Не втрачаючи загальності, можемо вважати, що $a_0 = 0$. А у цьому випадку правильною є така лема.

Лема 1. *Нехай* $A \in (-\infty, +\infty]$, $\Phi \in \Omega(A)$, $F \in S(\Lambda, A)$ *і* β — *неперервна додатна на* $(-\infty, A)$ *функція така, що* $\beta(\sigma) < A - \sigma$, $\sigma_0 \le \sigma < A$. *Приймемо* $\gamma(\sigma) = \Phi'(\Psi^{-1}(\sigma + \beta(\sigma)))$. *Якщо* $\ln\,\mu(\sigma, F) \le \Phi(\sigma)$, $\sigma_0 \le \sigma < A$, *то для всіх* $\sigma < A$, *досить близьких до* A,

$$M_1(\sigma, F) \le M(\sigma, F)\sqrt{n(\gamma(\sigma))} + \int\limits_{\gamma(\sigma)}^{\infty} e^{-t\beta(\sigma)}dn(t). \tag{4}$$

Доведення. Для всіх $\sigma < A$ правильна ([4, c.131]) рівність $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \exp\{2\sigma\lambda_n\} = \lim\limits_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_T^T |F(\sigma + it)|^2 dt$, звідки $\sum_{n=1}^{k} |a_n|^2 \exp\{2\sigma\lambda_n\} < \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \exp\{2\sigma\lambda_n\} \le M^2(\sigma, F)$. Використовуючи нерівність Коші $(\sum_{n=1}^{k} b_n c_n)^2 \le \sum_{n=1}^{k} b_n^2 \sum_{n=1}^{k} c_n^2$ з $b_n = 1$ і $c_n = |a_n|\exp\{\sigma\lambda_n\}$, звідси отримуємо $M_1(\sigma, F) \le (k\sum_{n=1}^{k} |a_n|^2 \exp\{2\sigma\lambda_n\})^{1/2} + \sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n|\exp\{\sigma\lambda_n\}$, тобто,

$$M_1(\sigma, F) \le \sqrt{k}M(\sigma, F) + \sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n|\exp\{\sigma\lambda_n\}. \tag{5}$$

В [3] доведено, що для того щоб $\ln\,\mu(\sigma, F) \le \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \in [\sigma_0, A)$, необхідно і досить, щоб $\ln\,|a_n| \le -\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всіх $n \ge n_0$. Тому, для всіх досить близьких до A значень $\sigma < A$ маємо $\sum_{\lambda_n>\gamma(\sigma)} |a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} \le \sum_{\lambda_n>\gamma(\sigma)} \exp\{-\lambda_n(\Psi(\varphi(\lambda_n) - \sigma)\} \le \sum_{\lambda_n>\gamma(\sigma)} \exp\{-\lambda_n(\Psi(\varphi(\gamma(\sigma)) - \sigma)\} = \sum_{\lambda_n>\gamma(\sigma)} \exp\{-\lambda_n\beta(\sigma))\} \le \int_{\gamma(\sigma)}^{\infty} e^{-t\beta(\sigma)}dn(t)$ і з (5) отримуємо (4). Лему 1 доведено.

Доведемо теорему 1. З (2) маємо $\ln n(t) \le (\tau + \varepsilon/2)\Phi(\Psi(\varphi(t)))$ для кожного $\varepsilon > 0$ та всіх $t \ge t_0(\varepsilon)$. Виберемо $\beta(\sigma) = (\tau + \varepsilon)\Phi(\sigma)/\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma))$. Тоді $\beta(\sigma) < A - \sigma$ для всіх $\sigma \in [\sigma_0, A)$. Справді, якщо $A = +\infty$, то ця нерівність очевидна, а якщо $A \in (-\infty, +\infty)$, з умови (1) маємо $\beta(\sigma) < (\tau + \varepsilon)\Phi(\sigma)/\Phi'(\sigma) < A - \sigma$.

Оскільки $\Psi'(\sigma) = \Phi(\sigma)\Phi''(\sigma)/(\Phi'(\sigma))^2$ і $\Psi(\sigma) < \sigma$, то з огляду на неспадання функції Φ'/Φ маємо

$$\left(\frac{\Phi(\Psi(\sigma))}{\Phi'(\sigma)}\right)' = \frac{\Phi''(\sigma)\Phi(\sigma)\Phi(\Psi(\sigma))}{(\Phi'(\sigma))^3}\left(\frac{\Phi'(\Psi(\sigma))}{\Phi(\Psi(\sigma))} - \frac{\Phi'(\sigma)}{\Phi(\sigma)}\right) \le 0,$$

тобто функції $\Phi(\Psi(\sigma))/\Phi'(\sigma)$ і $\beta(\sigma)$ є незростаючими. Отже, $\beta(\sigma) \ge \frac{(\tau+\varepsilon)\Phi(\sigma+\beta(\sigma))}{\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma+\beta(\sigma)))}$, а також за умовою (2) $\ln n(t) = o(t)$, $t \to +\infty$. Тому для $\sigma \ge \sigma_0$ отримуємо

$$\int\limits_{\gamma(\sigma)}^{\infty} e^{-t\beta(\sigma)}dn(t) \le \beta(\sigma)\int\limits_{\gamma(\sigma)}^{\infty} n(t)e^{-t\beta(\sigma)}dt \le \beta(\sigma)\int\limits_{\gamma(\sigma)}^{\infty} e^{-t(\beta(\sigma)+(\tau+\varepsilon/2)\Phi(\Psi(\varphi(t)))/t)}dt \le$$

$$\le \beta(\sigma)\int\limits_{\gamma(\sigma)}^{\infty} \exp\left\{-t\left(\beta(\sigma) - \frac{(\tau+\varepsilon/2)\Phi(\sigma+\beta(\sigma))}{\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma+\beta(\sigma)))}\right)\right\}dt \le$$

$$\le \beta(\sigma)\int\limits_{\gamma(\sigma)}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\varepsilon}{2(\tau+\varepsilon)}\beta(\sigma)t\right\}dt \le \frac{2(\tau+\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Отже, з (4) дістаємо $M_1(\sigma, F) \le M(\sigma, F)\exp\{(\tau+\varepsilon/2)\Phi(\Psi(\varphi(\gamma(\sigma))))/2\} + 2(\tau+\varepsilon)/\varepsilon = M(\sigma, F)\exp\{(\tau+\varepsilon/2)\Phi(\sigma+\beta(\sigma))/2\} + 2(\tau+\varepsilon)/\varepsilon$, звідки

$$\varlimsup_{\sigma\uparrow A} \frac{\ln(M_1(\sigma,F)/\ln M(\sigma,F))}{\Phi(\sigma)} \le \frac{\tau_+\varepsilon}{2}\varlimsup_{\sigma\uparrow A}\frac{\Phi(\sigma+(\tau+\varepsilon)\Phi(\sigma)/\Phi'(\sigma))}{\Phi(\sigma)}.$$

Спрямовуючи $\varepsilon \to 0$, звідси отримуємо (3) . Теорему 1 доведено.

3. Зауваження і доповнення. У випадку цілих рядів Діріхле ($A = +\infty$) теорема 1 вказує на зв'язок між зростанням $M_1(\sigma, F)$ та $M(\sigma, F)$, якщо функція $\Phi \in \Omega(+\infty)$ така, що $\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma) \nearrow$ $(\sigma \to +\infty)$. Останню ж умову задовольняють швидко зростаючі функції, як наприклад, $\Phi(\sigma) = \exp\{\sigma^\alpha\}$, $\alpha > 1$, і $\Phi(\sigma) = \exp_k \sigma$, $k \ge 2$, де $\exp_1 \sigma = e^\sigma$, $\exp_k \sigma = \exp_{k-1} e^\sigma$. З теореми 1 неважко отримати таке твердження.

Наслідок 1. *Якщо* $F \in S(\Lambda, +\infty)$, $\ln \mu(\sigma, F) \le \exp\{\sigma^\alpha\}$, $\alpha > 1$, *для всіх* $\sigma \ge \sigma_0$ *і* $\varlimsup\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln n(t)(\ln t)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}{t} \le \frac{\tau}{e\alpha}$, *то* $\varlimsup\limits_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln M_1(\sigma,F) - \ln M(\sigma,F)}{\exp\{\sigma^\alpha\}} \le \frac{\tau}{2}e^\tau$.

У випадку $A = +\infty$ теорему 1 не можна застосувати наприклад, коли $\Phi(\sigma) = e^{\varrho\sigma}$ $(\varrho > 0)$, $\Phi(\sigma) = \sigma^p$ $(p > 1)$ чи $\Phi(\sigma) = \sigma \ln\ \sigma$. Проте умови теореми 1 дозволяють і лічильній функції $n(t)$ показників цілого ряду Діріхле зростати досить швидко. Якщо ж $n(t)$ зростає не дуже швидко, то, використовуючи лему 1, можна отримати твердження, які і для вказаних вище не дуже швидко зростаючих функцій можуть привести до бажаних результатів. Одне з таких тверджень містить наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай* $F \in S(\Lambda, +\infty)$ *і функція* $\Phi \in \Omega(+\infty)$ *така, що* $\frac{\Phi'(\sigma)}{\Phi(\sigma)\ln \Phi'(\sigma)} = O(1)$ *при* $\sigma \to +\infty$. *Якщо* $\ln \mu(\sigma, F) \le \Phi(\sigma)$, $\sigma \ge \sigma_0$, *і* $\varlimsup\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln n(t)}{\ln t} \le \tau$, *то*

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln M_1(\sigma, F) - \ln M(\sigma, F)}{\ln \Phi'(\Psi^{-1}(\sigma))} \le \frac{\tau}{2}. \tag{6}$$

Доведення. За умовою маємо $n(t) \le t^\eta$ для будь-якого $\eta > \tau$ і всіх $t \ge t_0(\eta)$. Тому, для всіх досить великих значень σ виконується $\int\limits_{\gamma(\sigma)}^{+\infty} e^{-t\beta(\sigma)}dn(t) \le \int\limits_{\gamma(\sigma)}^{+\infty} e^{-t\beta(\sigma)}dt^\eta \le \eta\Gamma(\eta)(\beta(\sigma))^{-\eta}$, де Γ — гамма-функція Ейлера. Якщо виберемо $\beta(\sigma) = (\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma)))^{-1/2}$, то з (4) для всіх досить великих значень σ отримаємо $M_1(\sigma, F) \le M(\sigma, F)\sqrt{\gamma(\sigma)^\eta} + \eta\Gamma(\eta)(\beta(\sigma))^{-\eta} = M(\sigma, F)(\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma + \beta(\sigma))))^{\eta/2} + O\left((\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma)))^{\eta/2}\right) = (1 + o(1))(\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma + \beta(\sigma))))^{\eta/2}$, звідки

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln M_1(\sigma, F) - \ln M(\sigma, F)}{\ln \Phi'(\Psi^{-1}(\sigma + \beta(\sigma)))} \le \frac{\eta}{2}. \tag{7}$$

Далі, за теоремою Лагранжа про кінцеві прирости, за допомогою умови $\frac{\Phi'(\sigma)}{\Phi(\sigma)\ln \Phi'(\sigma)} = O(1)$ $(\sigma \to +\infty)$ з огляду на те, що $\Psi'(\sigma) = \Phi(\sigma)\Phi''(\sigma)/\Phi'(\sigma)^2$ нескладно переконуємось, що $\ln\ln \Phi'(\Psi^{-1}(\sigma + \beta(\sigma))) - \ln\ln \Phi'(\Psi^{-1}(\sigma)) = O(\beta(\sigma)) \to 0 \quad (\sigma \to +\infty)$, а отже, $\ln \Phi'(\Psi^{-1}(\sigma + \beta(\sigma))) = (1 + o(1)) \ln \Phi'(\Psi^{-1}(\sigma))$ $(\sigma \to +\infty)$, і з (7), завдяки довільності $\eta > \tau$, отримуємо (6). Теорему 2 доведено. □

Для цілих рядів Діріхле скінченного R-порядку $\varrho_R = \varlimsup\limits_{\sigma\to+\infty} \frac{1}{\sigma} \ln\ln M(\sigma, F)$ з теореми 2 легко випливає таке пряме узагальнення результату Г.Брінкмайера.

Наслідок 2. *Якщо показники цілого ряду Діріхле скінченного* R*-порядку* ϱ_R *задовольняють умову* $\varlimsup\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln n(t)}{\ln t} \le \tau$, *то* $\varlimsup\limits_{\sigma\to+\infty} (\ln M_1(\sigma, F) - \ln M(\sigma, F))/\sigma \le \frac{\tau\varrho_R}{2}$.

Для рядів Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності умову $\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma) \nearrow +\infty\, (\sigma \uparrow 0)$ задовольняють всі гладкі правильно зростаючі до $+\infty$ при $x \to +\infty$ функції. Проте умову $\frac{|\sigma|\Phi'(\sigma)}{\Phi(\sigma)} \to +\infty\, (\sigma \uparrow 0)$ не задовольняють, наприклад, функції $\Phi(\sigma) = \ln(1/|\sigma|)$ і $\Phi(\sigma) = 1/|\sigma|^p\, (p > 0)$. Тому теорему 1 можна використовувати тільки для швидко зростаючих функцій. Наприклад, для функції $\Phi(\sigma) = \exp\{\varrho/|\sigma|\}$, $\varrho > 0$ твердження теореми 1 переформульовується у вигляді такого наслідку.

Наслідок 3. *Якщо* $F \in S(\Lambda, 0)$, $\ln \mu(\sigma, F) \le \exp\{\varrho/|\sigma|\}$, $\varrho > 0$, *для всіх* $\sigma \in [\sigma_0, 0)$ *і* $\varlimsup\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln n(t)}{t} \ln^2 t \le \frac{\tau\varrho}{e}$, *то* $\varlimsup\limits_{\sigma\uparrow 0} \frac{\ln M_1(\sigma,F) - \ln M(\sigma,F)}{\exp\{\varrho/|\sigma|\}} \le \frac{\tau}{2} e^\tau$.

У випадку, коли $A = 0$, умова $\frac{|\sigma|\Phi'(\sigma)}{\Phi(\sigma)} \to +\infty(\sigma \uparrow 0)$ використовувалась у доведенні теореми 1 тільки для того, щоб для всіх досить близьких до $A = 0$ значень $\sigma < 0$ виконувалась нерівність $\beta(\sigma) < A - \sigma = |\sigma|$, де $\beta(\sigma) = \frac{(\tau+\varepsilon)\Phi(\sigma)}{\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma))}$. Але, якщо означимо $\omega = \varliminf\limits_{\sigma\uparrow 0} \frac{|\sigma|\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma))}{\Phi(\sigma)} = \varliminf\limits_{t\to+\infty} \frac{t|\Psi(\varphi(t))|}{\Phi(\Psi(\varphi(t)))}$ і вимагатимемо, щоб $\tau < \omega$, то за умови $\varepsilon \in (0, (\omega - \tau)/2)$ нерівність $\beta(\sigma) < |\sigma|$ буде правильною для всіх досить близьких до 0 значень $\sigma < 0$.

Отже, якщо $\ln\,\mu(\sigma,F)\le\Phi(\sigma)\in\Omega(0)$ $(\sigma_0\le\sigma<0)$, $\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma)\nearrow+\infty$ $(\sigma_0\le\sigma\uparrow 0)$ і $\varlimsup\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln\,n(t)}{\Phi(\Psi(\varphi(t)))}\le\tau<\omega$, то правильна нерівність (3), де, як видно з доведення теореми 1,

$$q(\tau)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\varlimsup_{\sigma\uparrow 0}\frac{\Phi(\sigma+\beta(\sigma))}{\Phi(\sigma)}=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\varlimsup_{\sigma\uparrow 0}\frac{\Phi(\sigma+(\tau+\varepsilon)\Phi(\sigma)/\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma))}{\Phi(\sigma)}.$$

Цим фактом можна скористатись для того, щоб встановити відповідні твердження у випадках $\Phi(\sigma)=T|\sigma|^{-p}$ $(T,p>0)$ чи $\Phi(\sigma)=T\ln(1/|\sigma|)$ $(T>0)$. Наприклад, правильне наступне твердження.

Твердження 1. *Якщо* $F\in S(\Lambda,0)$, $\ln\,\mu(\sigma,F)\le T|\sigma|^{-p}$ $(T,p>0)$ *для всіх* $\sigma\in[\sigma_0,\,0)$ *і*

$$\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{\ln\,n(t)}{t^{p/(p+1)}}\le\tau T\left(\frac{p}{p+1}\right)^p(pT)^{-p/(p+1)},\quad \tau<\frac{(p+1)^{p+1}}{p^p},$$

то

$$\varlimsup_{\sigma\uparrow 0}|\sigma|^p(\ln\,M_1(\sigma,F)-\ln\,M(\sigma,F))\le\frac{\tau T}{2}\left(1-\frac{\tau p^p}{(p+1)^{p+1}}\right)^{-p}.$$

Зауваження. Множина цілих чисел Λ називається [5, с. 155] множиною Сідона, якщо існує така стала C, що для довільного тригонометричного полінома вигляду $F(s)=\sum_{\lambda\in\Lambda}a_ne^{s\lambda_n}$ виконується нерівність $M_1(\sigma,F)\le CM(\sigma,F)$.

Відома теорема Сідона [5, с. 158] стверджує, що довільна лакунарна за Адамаром послідовність є множиною Сідона. Отже, тоді справджується

$$\varlimsup_{\sigma\to\infty}(\ln M_1(\sigma)-\ln M(\sigma))<\infty\quad\Leftarrow\ (\lambda_n)\text{ — лакунарна за Адамаром},$$

тобто нерівність (3), взагалі кажучи, не є точною.

ЛІТЕРАТУРА

1. Brinkmeier H. *Uber das Mass der Bestimmtheit des Wachstum einer ganzen transzendenten Funktion durch die absoluten Beträge der Koeffizienten ihrer Potenzreihe* // Math. Ann. – 1926. – Bd. 96, Hf. 1. – S. 108–118.
2. Филевич П.В. *Неравенства типа Вимана-Валирона для целых и случайных целых функций конечного логарифмического порядка* // Сиб. матем. журн. – 2001. – Т. 42, №3. – С. 683–692.
3. Шеремета М.Н., Федыняк С.И. *О производной ряда Дирихле* // Сиб. матем. журн. – 1998. – Т. 39, №1. – С. 206–223.
4. Леонтьев А.Ф. Ряды экспонент. – М.: Наука. – 1976. – 536 с.
5. Кахан Ж.-П. Абсолютно сходящиеся ряды Фурье. – М.: Мир, 1976.

Львівський національний університет імені Івана Франка
tftj@franko.lviv.ua

Надійшло 15.03.2006