УДК 519.6:517.958

П. П. Вагін, Р. Б. Малець, Г. А. Шинкаренко

НАПІВДИСКРЕТИЗАЦІЯ ЗА ТОВЩИНОЮ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ У ТОНКОМУ КРИВОЛІНІЙНОМУ ШАРІ

P. P. Vahin, R. B. Malets, H. A. Shynkarenko. *Heat conduction problem thickness semidiscretization of thin curvelinear layer*, Matematychni Studii, **26** (2006) 71–80.

Methods of the reduction of dimensions considerably increase opportunities for numerical modelling in complex problems of the mechanics of solids. For a variational problem of heat conduction in a thin curvilinear layer, an appropriate choice of independent variables allows to construct a subspace of test functions which allows to carry out the separation of variable thickness. The variational problem which is obtained as a result of such a semidiscretization: I) inherits a well-posedness of the formulation from an initial problem; II) gives the best approximation in the space of approximations to the solution of the initial problem (in the sense of the energy norm). An example of semidiscretization with linear dependence of the approximations from variable thickness exhibits details of such analysis.

П. П. Вагин, Р. Б. Малець, Г. А. Шинкаренко. *Полудискретизация по толщине задачи теплопроводности в тонком криволинейном слое* // Математичні Студії. – 2006. – Т.26, №1. – С.71–80.

Методы понижения размерности задачи значительно увеличивают возможности численного моделирования в сложных задачах механики сплошной среды. Для вариационной задачи теплопроводности в тонком криволинейном слое надлежащий выбор независимых пространственных переменных естественно приводит к конструированию подпространства допустимых функций, которое позволяет осуществить отделение переменной толщины. Вариационная задача, которая получается в результате такой полудискретизации: I) наследует корректность формулировки от исходной задачи; II) предоставляет наилучшую аппроксимацию в избранном пространстве аппроксимаций решению исходной задачи (в смысле энергетической нормы). Пример полудискретизаций с линейной зависимостью аппроксимаций от переменной толщины демострирует детали такого анализа.

Вступ. Поряд із істотно тривимірними вузлами більшість реальних інженерних конструкцій містить елементи, які мають один, а то й два просторові виміри, значно менші від решти. Наявність об'єктів різної вимірності значно ускладнює доведення конструктивних параметрів до оптимальних значень як за допомогою традиційних розрахунків, так і комп'ютерного моделювання. Добре відомо, що спроби чисельного аналізу напружено-деформованого стану таких конструкцій на основі тривимірних рівнянь еластостатики приводять до сингулярно збурених крайових задач і часто супроводжуються значним зростанням вимог до комп'ютерних ресурсів та до необхідності переосмислення решти вжитих засобів математичного моделювання.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 65M60, 35K15.

Одним із підходів підвищення ефективності моделювання таких конструкцій є перехід до адекватних спрощених моделей розрахунку тонкостінних елементів на основі теорії пластин та оболонок. В контексті технології методу скінченних елементів такий підхід відомий під назвою d-адаптивності ([3,4]).

У цій статті ми демонструємо можливості d-адаптивності при моделюванні процесів теплопровідності в тонкому тривимірному шарі. Припускається, що цей шар має у певному сенсі нерегулярну форму, яка вимагає для свого опису використання криволінійної ортогональної системи координат ([2]). Далі ми показуємо, як використання простору апроксимацій з лінійною залежністю функцій від змінної товщини дозволяє здійснити напівдискретизацію вихідної варіаційної задачі за просторовою змінною товщини. Виявляється, що одержана модель меншого виміру залишається коректно поставленою задачею, якщо певні інтеграли від даних задачі вдається обчислити точно.

1. Початково-крайова і варіаційна задача тривимірної теплопровідності для тонкого криволінійного шару.

1.1. Постановка початково-крайової задачі. Розглянемо тонкий шар товщини $h = \mathrm{const} > 0$, який займає в евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ обмежену область D з неперервною за Ліпшицем межею S. Серединну поверхню шару Ω віднесемо до ортогональної криволінійної системи координат $\alpha = (\alpha_1,\ \alpha_2)$ і введемо ортогональну до неї змінну α_3 так, щоб $|\alpha_3| \le h/2$ (вважатимемо, що координатні лінії α_1, α_2 збігаються з лініями головних кривин поверхні). Позначимо через Γ межу серединної поверхні Ω. Тоді точки шару визначатимуться множиною $D = \Omega \times (-h/2,\ h/2)$, межа S якої складається з лицьових поверхонь $\Omega_\pm = \Omega \times \{\pm h/2\}$ та бічної поверхні $\Sigma = \Gamma \times (-h/2,\ h/2)$. Надалі такий шар називатимемо *тонким криволінійним шаром.*

Нехай $A_i = A_i(\alpha_1,\ \alpha_2)$ і $k_i = k_i(\alpha_1,\ \alpha_2)$ — коефіцієнти першої квадратичної форми та головні кривини поверхні Ω відповідно. Правильні наступні рівності для параметрів Ляме ([1])

$$H_i = A_i\,(1 + \alpha_3 k_i)\,, \quad i \in \{1, 2\}, \quad H_3 = 1. \tag{1}$$

Припускатимемо, що розподіл температури $\theta = \theta(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ t)$ в шарі описується рівнянням ([5,6])

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \mu \Delta \theta = w \quad \text{в} \quad D \times (0,\ T]\,. \tag{2}$$

Тут $\Delta\theta := \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial \theta}{\partial \alpha_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{H_1 H_3}{H_2}\frac{\partial \theta}{\partial \alpha_2}\right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial \theta}{\partial \alpha_3}\right)\right]$, w — інтенсивність внутрішніх джерел тепла; t — змінна часу, $t \in (0,\ T]$, $0 < T < +\infty$; $\mu = \frac{\lambda}{c_v \rho}$ — коефіцієнт температуропровідності, λ — коефіцієнт теплопровідності матеріалу, c_v — коефіцієнт теплоємності за сталого тиску, ρ — густина матеріалу.

Для визначеності вважатимемо, що на межі області D справджуються наступні крайові умови теплообміну з довкіллям

$$-\mu\, n\,.\nabla\theta = q^{\pm} \quad \text{на} \quad \Omega_\pm \times (0,\ T]\,, \tag{3}$$

$$-\mu\, n\,.\nabla\theta = \tilde{q} \quad \text{на} \quad \Sigma \times (0,\ T]\,, \tag{4}$$

де $\nabla f = \left\{\frac{1}{H_1}\frac{\partial f}{\partial \alpha_1},\ \frac{1}{H_2}\frac{\partial f}{\partial \alpha_2},\ \frac{1}{H_3}\frac{\partial f}{\partial \alpha_3}\right\}$, $q^{\pm}$ та $\tilde{q}$ — задані густини теплових потоків, n — одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні області D, $n\,.\nabla\theta$ — скалярний добуток векторів в $\mathbb{R}^3$.

Доповнимо рівняння (2) та крайові умови (3) початковою умовою

$$\theta|_{t=0} = \theta^0 \quad \text{в} \quad D. \tag{5}$$

Отже, початково-крайова задача теплопровідності для тонкого криволінійного шару формулюється у наступному вигляді:

$$\begin{cases} \text{знайти функцію } \theta = \theta\,(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ t) \text{ визначену в } D \times (0, T] \text{ і таку,} \\ \text{що задовольняє рівняння (2);} \\ \text{крайові умови (3), (4) та початкову умову (5).} \end{cases} \tag{6}$$

1.2. Варіаційне формулювання задачі. Введемо позначення $u\,(t) := u(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ t)$, $u'\,(t) := \frac{\partial}{\partial t} u$ та функціональні простори $G := L^2\,(D)$, $W := H^1\,(D)$ і сформулюємо відповідну до (6) варіаційну задачу теплопровідності:

$$\begin{cases} \text{задано } \theta^0 \in G, \quad w \in L^2\,(0,\ T;\ G)\,; \\ \text{знайти } \theta \in L^2\,(0,\ T;\ W) \text{ таку, що } (\forall t \in (0,\ T]) : \\ m\,(\theta'\,(t)\,,\ \varphi) + a\,(\theta\,(t)\,,\ \varphi) =< l\,(t)\,,\ \varphi >, \\ (\forall \varphi \in W) : \quad m\,(\theta\,(0) - \theta^0,\ \varphi) = 0 \quad . \end{cases} \tag{7}$$

Тут білінійні та лінійна форми визначаються виразами

$$m(\theta, \varphi) := \int\limits_D \theta\, \varphi\, H_1 H_2 H_3\, d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3, \tag{8}$$

$$a(\theta, \varphi) := \int\limits_D \mu\, \nabla\theta\, .\nabla\varphi\, H_1 H_2 H_3\, d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3, \tag{9}$$

$$< l,\, \varphi >:= m\,(w, \varphi) + \int\limits_{\Omega_+} q^+ \varphi\, H_1 H_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \int\limits_{\Omega_-} q^- \varphi\, H_1 H_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \int\limits_{\Sigma} \tilde{q} \varphi\, d\Sigma \quad \forall \theta, \varphi \in W. \tag{10}$$

З огляду на структуру області інтегрування D ми можемо записати інтеграли в рівностях (8)-(10) у більш зручному для подальшого вигляді

$$m\,(\theta,\ \varphi) = \int\limits_{\Omega} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \int\limits_{-h/2}^{h/2} \theta\, \varphi\, (1 + \alpha_3 k_1)\,(1 + \alpha_3 k_2)\ d\alpha_3. \tag{11}$$

Добре відомо, що варіаційна задача теплопровідності (7) коректно поставлена (див., напр. [9]).

2. Напівдискретизація варіаційної задачі за змінною товщини.
2.1. Простір апроксимацій. З огляду на малість товщини h шару виберемо підпростір W_1 простору допустимих функцій W такої структури

$$W_1 := \left\{ \varphi \in W : \quad \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \varphi_1(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \varphi_2(\alpha_1, \alpha_2), \quad \varphi_1, \varphi_2 \in H^1\,(\Omega) \right\}. \tag{12}$$

Специфікою підпростору W_1, яку ми систематично експлуатуватимемо, є відокремлення незалежної змінної α_3. Приймаючи W_1 за простір апроксимацій схеми Гальоркіна, розглянемо наступне наближення для розв'язку вихідної варіаційної задачі:

$$\begin{cases} \text{знайти } \theta_h \in L^2\left(0,T;W\right) \text{ таку, що } \ (\forall t \in (0,T]): \\ m\left(\theta_h'\left(t\right),\varphi\right) + a\left(\theta_h\left(t\right),\varphi\right) = < l\left(t\right),\varphi >, \\ (\forall \varphi \in W_1): \ m\left(\theta_h\left(0\right) - \theta^0, \varphi\right) = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Оскільки розв'язок θ_h має структуру

$$\theta_h(t) = \theta_1(\alpha_1,\alpha_2,t) + \alpha_3\theta_2(\alpha_1,\alpha_2,t) \in W_1, \tag{14}$$

то задача (13) потрібна для визначення вектор-функції двох просторових змінних $\vec{\theta} = \{\theta_i(\alpha_1,\alpha_2,t)\}_{i=1}^2$ і, по-суті, є зв'язною системою варіаційних рівнянь. Отже, особливістю нашого підходу є заміна тривимірної (за просторовими змінними) задачі деякою двовимірною задачею, яку називатимемо *напівдискретною (за змінною α_3) моделлю варіаційної задачі.* Підставою для такої термінології є розвинення (14), яке показує, що відшукання температури θ тонкого шару можна замінити знаходженням вектора $\vec{\theta} = \{\theta_i(\alpha_1,\alpha_2,t)\}_{i=1}^2$, компоненти якого є функціями від часу t і лише від двох просторових змінних (α_1,α_2) на серединній поверхні Ω шару D.

2.2. Структура форм напівдискретної задачі. Деталізуємо структуру напівдискретної варіаційної задачі (13) з врахуванням специфіки простору W_1. З цією метою ми введемо простори векторних функцій

$$H := \left[L^2\left(\Omega\right)\right]^2 \quad \text{і} \quad V := \left[H^1\left(\Omega\right)\right]^2$$

і такі позначення для деяких характеристик геометричних даних

$$\chi_i := \frac{\left(1+\alpha_3 k_1\right)\left(1+\alpha_3 k_2\right)}{\left(1+\alpha_3 k_i\right)^2}, \tag{15}$$

$$\beta^n := \int\limits_{-h/2}^{h/2} \alpha_3^n\left(1+\alpha_3 k_1\right)\left(1+\alpha_3 k_2\right) d\alpha_3, \tag{16}$$

$$\gamma_i^n := \int\limits_{-h/2}^{h/2} \alpha_3^n \chi_i d\alpha_3, \quad i \in \{1,2\}, \quad n \in \{0,1,2\}. \tag{17}$$

Лема 1. (про напівдискретизовану білінійну форму енергії температурного поля). *Нехай оператор $\Pi\colon W_1 \to V$ діє за правилом $\varphi \in W_1 \to \Pi\varphi = \vec{\varphi} \in V$.*

Тоді білінійна форма $m\left(\cdot,\cdot\right): G \times G \to \mathbb{R}$, визначена в (8), допускає на просторі W_1 наступне зображення

$$(\forall \theta,\varphi \in W_1): \ m\left(\theta,\varphi\right) = \sum_{i,j=1}^{2} m_{ij}\left(\vec{\theta},\vec{\varphi}\right), \tag{18}$$

де $m_{ij}\left(\vec{\theta},\vec{\varphi}\right) := \int_\Omega \beta^{i+j-2}\theta_i\varphi_j A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2, \ \vec{\theta},\vec{\varphi} \in V$.

Лема 2. (про напівдискретизовану форму дисипації температурного поля). *Білінійна форма $a(\cdot,\cdot)\colon V\times V\to\mathbb{R}$, визначена в (9), допускає наступне подання*

$$a\left(\theta,\varphi\right)=\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}\left(\vec{\theta},\vec{\varphi}\right),\qquad\vec{\theta}=\left(\theta_1,\theta_2\right),\qquad\vec{\varphi}=\left(\varphi_1,\varphi_2\right),\qquad\theta,\varphi\in W_1,\qquad(19)$$

де

$$a_{ij}\left(\vec{\theta},\vec{\varphi}\right):=\int\limits_{\Omega}\mu\sum_{k=1}^{2}\gamma_k^{i+j-2}\frac{\partial\theta_i}{\partial\alpha_k}\frac{\partial\varphi_j}{\partial\alpha_k}\frac{A_1A_2}{A_k^2}d\alpha_1d\alpha_2+$$
$$+\delta_{2i}\delta_{2j}\int\limits_{\Omega}\mu\beta^0\theta_i\varphi_jA_1A_2d\alpha_1d\alpha_2,\qquad i,j\in\{1,2\},\quad\vec{\theta},\vec{\varphi}\in V,\qquad(20)$$

δ_{ij} *— символ Кронекера.*

Лема 3. (про напівдискретизований функціонал інтенсивності джерел тепла). *Якщо дані задачі теплопровідності тонкого шару допускають розвинення вигляду*

$$\begin{aligned}&w\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,t\right)\cong w_1\left(\alpha_1,\alpha_2,t\right)+\alpha_3w_2\left(\alpha_1,\alpha_2,t\right),\\&\tilde{q}\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,t\right)\cong\tilde{q}_1\left(\alpha_1,\alpha_2,t\right)+\alpha_3\tilde{q}_2\left(\alpha_1,\alpha_2,t\right),\end{aligned}\qquad(21)$$

то функціонал l задачі (6) подається у такому вигляді

$$<l,\,\varphi>=\sum_{i,j=1}^{2}\left[m_{ij}\left(\vec{w},\vec{\varphi}\right)+<l_{ij},\vec{\varphi}>\right]+\sum_{i=1}^{2}<l_i,\vec{\varphi}>,\quad\varphi\in W_1,\qquad(22)$$

де на додаток до раніше введених позначень

$$<l_{ij},\vec{\varphi}>:=\int\limits_{\Gamma}\beta^{i+j-2}\tilde{q}_i\varphi_jA_1A_2d\gamma,\quad\forall\vec{\varphi}\in\left[L^2\left(\Gamma\right)\right]^2,\qquad(23)$$

$$<l_i,\vec{\varphi}>:=\int\limits_{\Omega}\left[q^+\xi_++\left(-1\right)^{i-1}q^-\xi_-\right]\,\left(\frac{h}{2}\right)^{i-1}\varphi_iA_1A_2d\alpha_1d\alpha_2,\qquad(24)$$

$$\xi_\pm:=1\pm\left(k_1+k_2\right)\frac{h}{2}+k_1k_2\left(\frac{h}{2}\right)^2.\qquad(25)$$

Доведення. Доведення лем ґрунтуються на розвиненні довільних допустимих функцій $\theta,\ \varphi\in W_1$ за правилами (18) в околі серединної поверхні Ω шару D і підставленні у (8), (9) та (10) відповідно. Тоді, використовуючи позначення (14)-(16), безпосередніми обчисленнями переконуємося у правильності висловлених тверджень. □

2.3. Напівдискретизована задача теплопровідності. Тепер ми готові сформулювати основний результат.

Твердження 1. (про формулювання напівдискретної варіаційної задачі теплопровідності). *Нехай на додаток до умов лем (1)-(3) початковий розподіл температури* θ^0 *такий, що*

$$\theta^0(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \theta_1^0(\alpha_1,\alpha_2) + \alpha_3\theta_2^0(\alpha_1,\alpha_2) \quad \text{в} \quad D, \tag{26}$$

і виконуються наступні умови регулярності

$$\begin{cases} \vec{\theta}^0 = (\theta_1^0,\theta_2^0) \in H := \left[L^2(\Omega)\right]^2, \\ \vec{w} = (w_1,w_2) \in L^2(0,T;H), \\ \vec{\tilde{q}} = (\tilde{q}_1,\tilde{q}_2) \in L^2\left(0,T;\left[L^2(\Gamma)\right]^2\right), \\ q^+, q^- \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right). \end{cases} \tag{27}$$

Тоді варіаційна задача теплопровідності (6) за допомогою напівдискретизації за товщиною зводиться до такого формулювання:

$$\begin{cases} \text{знайти пару } \vec{\theta} = (\theta_1,\theta_2) \in L^2(0,T;V) \text{ таку, що} \\ \sum\limits_{i,j=1}^{2} \left\{ m_{ij}\left(\vec{\theta}'(t),\vec{\varphi}\right) + a_{ij}\left(\vec{\theta}(t),\vec{\varphi}\right) \right\} = \\ \quad = \sum\limits_{i,j=1}^{2} \left\{ m_{ij}\left(\vec{w}(t),\vec{\varphi}\right) + < l_{ij},\vec{\varphi} > \right\} + \sum\limits_{i=1}^{2} < l_i(t),\vec{\varphi} > \quad \forall t \in (0,T], \\ \sum\limits_{i,j=1}^{2} m_{ij}\left(\vec{\theta}(0) - \vec{\theta}^0,\vec{\varphi}\right) = 0 \qquad \forall \vec{\varphi} = (\varphi_1,\varphi_2) \in V. \end{cases} \tag{28}$$

Далі там, де це доцільно, з метою спрощення запису задачі (28) будемо вживати позначення

$$\begin{cases} \mathcal{M}\left(\vec{\theta},\vec{\varphi}\right) := \sum\limits_{i,j=1}^{2} m_{ij}\left(\vec{\theta},\vec{\varphi}\right), \\ \mathcal{A}\left(\vec{\theta},\vec{\varphi}\right) := \sum\limits_{i,j=1}^{2} a_{ij}\left(\vec{\theta},\vec{\varphi}\right), \qquad \vec{\theta},\vec{\varphi} \in V, \\ < \mathcal{L},\vec{\varphi} > := \sum\limits_{i,j=1}^{2} \left\{ m_{ij}\left(\vec{w},\vec{\varphi}\right) + < l_{ij},\vec{\varphi} > \right\} + \sum\limits_{i=1}^{2} < l_i,\vec{\varphi} > . \end{cases} \tag{29}$$

У цих термінах напівдискретну варіаційну задачу теплопровідності (28) можна переписати у вигляді:

$$\begin{cases} \text{знайти } \vec{\theta} \in L^2(0,T;V) \text{ такий, що} \\ (\forall t \in (0,T]): \ \mathcal{M}\left(\vec{\theta}'(t),\vec{\varphi}\right) + \mathcal{A}\left(\vec{\theta}(t),\vec{\varphi}\right) = < \mathcal{L}(t),\vec{\varphi} >, \\ (\forall \vec{\varphi} = (\varphi_1,\varphi_2) \in V): \ \mathcal{M}\left(\vec{\theta}(0) - \vec{\theta}^0,\vec{\varphi}\right) = 0. \end{cases} \tag{30}$$

2.4. Напівдискретна задача теплопровідності: змішані крайові умови. Аналіз нашого алгоритму напівдискретизації варіаційної задачі теплопровідності для тонкого шару (7) показує, що він допускає узагальнення в двох напрямках:

(I) Якщо дані вихідної задачі теплопровідності є достатньо регулярними функціями змінної α_3, то можна скористатись наближенням більш високих порядків

$$\theta(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,t) = \sum_{i=1}^{n} \theta_i(\alpha_1,\alpha_2,t)\,\alpha_3^i, \quad n \geq 2. \tag{31}$$

В результаті безпосереднього використання методики п.2.1 знову прийдемо до відшукання вектора функцій $\vec{\theta} = \{\theta_i(\alpha_1, \alpha_2, t)\}_{i=1}^n$ із варіаційної задачі вигляду (30) із більш складною структурою білінійних форм та лінійного функціоналу.

(II) В багатьох застосуваннях необхідно здійснювати аналіз температури за більш загальних крайових умов, ніж використані нами умови теплообміну за Ньютоном (3). Нижче ми показуємо, як вжита нами в п. 2.1 методика без принципових змін приводить до формулювання напівдискретних задач, і які зміни в структуру задачі (19) вносить наявність крайових умов на температуру.

Наслідок 1. (про напівдискретну задачу теплопровідності з однорідними умовами Діріхле на бічній поверхні шару). *Нехай в початково-крайовій задачі теплопровідності тонкого шару (6) крайова умова (4) замінена однорідною умовою Діріхле*

$$\theta = 0 \qquad \textit{на } \Sigma \times (0, T] \tag{32}$$

і для решти даних задачі виконуються умови регулярності (28) з твердження 1.

Тоді відповідна напівдискретна варіаційна задача (29) містить такі зміни:

$$V := \left\{ \vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2) \in \left[H^1(\Omega)\right]^2 : \ \vec{\varphi} = 0 \quad \textit{на } \Gamma \right\}, \tag{33}$$

$$l_{ij}(t) \equiv 0, \qquad i, j \in \{1, 2\}. \tag{34}$$

Дещо інші зміни в формулювання напівдискретної задачі теплопровідності вносить заміна умови (3) на однорідну умову Діріхле.

Наслідок 2. (про напівдискретну задачу теплопровідності з однорідними умовами Діріхле на бічній та частині лицевої поверхні шару). *Нехай на додаток до умов наслідку 1*

$$\theta = 0 \qquad \textit{на} \quad \Omega_D \times (0, T], \quad \Omega_D \subset \Omega_+, \quad mes\, \Omega_D > 0. \tag{35}$$

Тоді видозмінюються наступні компоненти напівдискретної задачі (29):

$$\begin{gathered} V := \left\{ \vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2) \in \left[H^1(\Omega)\right]^2 : \ \vec{\varphi} = 0 \quad \textit{на} \quad \Gamma \right\}; \\ l_{ij}(t) \equiv 0, \qquad i, j \in \{1, 2\}; \\ \langle l_i, \vec{\varphi} \rangle := \int\limits_{\Omega_+ \setminus \Omega_D} q^+ \xi_+ \left(\frac{h}{2}\right)^{i-1} \varphi_i A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \int\limits_{\Omega} q^- \xi_- \left(-\frac{h}{2}\right)^{i-1} \varphi_i A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \\ \forall \vec{\varphi} \in V, \quad i \in \{1, 2\}. \end{gathered} \tag{36}$$

Наведені тут наслідки ілюструють можливості перенесення алгоритму напівдискретизації на задачі теплопровідності з іншими крайовими умовами, що можуть зустрітись в застосуваннях.

3. Коректність напівдискретної задачі теплопровідності для тонкого шару. Тут з метою спрощення технічних деталей ми обмежимось варіаційною задачею теплопровідності з наслідку 1. За наявності крайової умови Діріхле (32) на бічній поверхні Σ шару D простір допустимих функцій W варіаційної задачі теплопровідності (7) має наступну структуру

$$W := \left\{ \varphi \in H^1(D) : \varphi = 0 \quad \text{на} \ \ \Sigma \right\}. \tag{37}$$

Добре відомо [9], що в цьому випадку білінійна форма $a(\cdot,\cdot) : W \times W \to \mathbb{R}$ є скалярним добутком на W і породжує енергетичну норму

$$|\varphi|_W := (a(\varphi,\varphi))^{\frac{1}{2}}, \qquad \varphi \in W, \tag{38}$$

яка еквівалентна до звичайної норми $\|\cdot\|_{1,D}$ простору $H^1(D)$. Позначимо через W' простір, спряжений до гільбертового простору W.

Нарешті наділимо простір G нормою

$$|\varphi|_G := (m(\varphi,\varphi))^{\frac{1}{2}}, \qquad \varphi \in G. \tag{39}$$

Теорема 1. (про коректність напівдискретної задачі теплопровідності). *Нехай дані варіаційної задачі теплопровідності (7) задовольняють наступні умови:*

(I) білінійна форма $m(.,.) : G \times G \to \mathbb{R}$ симетрична, неперервна та G – еліптична;

(II) білінійна форма $a(\cdot,\cdot) : W \times W \to \mathbb{R}$ симетрична, неперервна та W – еліптична;

(III) $l \in L^2(0,T;W')$.

Тоді напівдискретна за товщиною задача теплопровідності коректно поставлена; тобто, існує єдиний розв'язок $\vec{\theta} \in L^2(0,T;V) \bigcap L^\infty(0,T;H)$ рівнянь задачі (30), при цьому будуть вірними апріорні оцінки:

$$\mathcal{M}\left(\vec{\theta}(t),\vec{\theta}(t)\right) + \int\limits_0^t \mathcal{A}\left(\vec{\theta}(\tau),\vec{\theta}(\tau)\right)dt \le \mathcal{M}\left(\vec{\theta}^0,\vec{\theta}^0\right) + \int\limits_0^t \|l(\tau)\|\, d\tau, \qquad \forall\tau \in (0,T]. \tag{40}$$

Доведення. За умов (I)-(III) варіаційна задача (7) коректно поставлена (див. напр. [9]) і при цьому

$$|\theta(t)|_G^2 + \int\limits_0^t |\theta(\tau)|_W^2\, d\tau \le \left|\theta^0\right|_G^2 + \int\limits_0^t \|l(\tau)\|^2\, d\tau, \qquad \tau \in (0,T]. \tag{41}$$

Введемо простір

$$W_1 = \{\varphi \in W : \varphi = \varphi_1 + \alpha_3\varphi_2 \quad \forall\vec{\varphi} = (\varphi_1,\varphi_2) \in V\} \subset W. \tag{42}$$

Зауважимо, що структура простору W_1 визначає бієктивне відображення $I\colon W_1 \to V$ за правилом $\forall\varphi \in W_1 \to I\varphi := \vec{\varphi} \in V$ і при цьому згідно з (30)

$$|\varphi|_W^2 = a(\varphi,\varphi) = \mathcal{A}(\vec{\varphi},\vec{\varphi}), \quad |\varphi|_G^2 = m(\varphi,\varphi) = \mathcal{M}(\vec{\varphi},\vec{\varphi}), \qquad \forall\varphi \in W. \tag{43}$$

Якщо при цьому ввести норми

$$\begin{aligned} |\varphi|_V &:= (\mathcal{A}(\vec{\varphi},\vec{\varphi}))^{\frac{1}{2}}, && \vec{\varphi} \in V, \\ |\varphi|_H &= (\mathcal{M}(\vec{\varphi},\vec{\varphi}))^{\frac{1}{2}}, && \vec{\varphi} \in H. \end{aligned} \tag{44}$$

то відображення $I\colon W_1 \to V$ визначить ізоморфізм просторів W_1 та V.

Нарешті, оскільки задача (7) коректно поставлена, то внаслідок щойно встановленого ізоморфізму варіаційна задача (31) має єдиний розв'язок $\vec{\theta} = (\theta_1,\theta_2)$.

При цьому бажана апріорна оцінка (40) є безпосереднім наслідком застосування тотожностей (43) до енергетичної нерівності (41). □

4. Початково-крайова задача напівдискретної теплопровідності. У цьому підрозділі ми демонструємо загальну структуру відповідної до (29) початково-крайової задачі напівдискретної теплопровідності. Вона отримана з рівнянь задачі (29) стандартним шляхом із використанням формул інтегрування частинами і має наступний вигляд:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{знайти такі } \quad \theta_1, \theta_2, \text{ що задовольняють систему рівнянь:} \\ \sum\limits_{i=1}^{2}\left\{\beta^{i-1}\theta_i' - \frac{2\mu}{A_1A_2}\sum\limits_{j=1}^{2}\gamma_j^{i-1}\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\left(\frac{A_1A_2}{A_j^2}\frac{\partial\theta_i}{\partial\alpha_j}\right)\right\} = \sum\limits_{i=1}^{2}\beta^{i-1}w_i + \xi_+q^+ + \xi_-q^-, \\ \sum\limits_{i=1}^{2}\left\{\beta^{i}\theta_i' - \frac{2\mu}{A_1A_2}\sum\limits_{j=1}^{2}\left[\gamma_j^{i}\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\left(\frac{A_1A_2}{A_j^2}\frac{\partial\theta_i}{\partial\alpha_j}\right) - \delta_{2i}\delta_{2j}\frac{A_1A_2}{2}\beta^{j-2}\theta_i\right]\right\} = \\ = \sum\limits_{i=1}^{2}\beta^{i}w_i + \frac{h}{2}\left(\xi_+q^+ - \xi_-q^-\right) \quad \text{в} \quad \Omega\times(0,T], \\ \text{початкові} \\ \theta_1|_{t=0} = \theta_1^0, \qquad \theta_2|_{t=0} = \theta_2^0, \quad \text{в} \quad \Omega \\ \text{та крайові умови} \\ \frac{2\mu}{A_1A_2}\sum\limits_{i,j=1}^{2}\gamma_j^{i-1}\frac{\partial\theta_i}{A_j\partial\alpha_j}\cos(n,\alpha_j) = \sum\limits_{i=1}^{2}\beta^{i-1}\tilde{q}_i, \\ \frac{2\mu}{A_1A_2}\sum\limits_{i,j=1}^{2}\gamma_j^{i}\frac{\partial\theta_i}{A_j\partial\alpha_j}\cos(n,\alpha_j) = \sum\limits_{i=1}^{2}\beta^{i}\tilde{q}_i \quad \text{на} \quad \Gamma, \end{array}\right. \tag{45}$$

де (n, α_j) — кут між нормаллю до Γ та напрямком α_j.

Нижче ми наводимо два класичні приклади задач теплопровідності, які показують особливості нашого способу напівдискретизації за товщиною.

4.1. Теплопровідна пластина. Якщо теплопровідний шар $D = \Omega \times (-h/2, h/2)$ є пластиною постійної товщини h з серединною поверхнею Ω, то його геометрія добре описується в декартовій прямокутній системі координат (x_1, x_2, x_3). Приймаючи $\alpha_i \equiv x_i$, знайдемо, що параметри Ляме та кривини набувають особливо простих значень $A_i \equiv 1$, $k_i \equiv 0$ $(i \in \{1,2\})$, У цьому випадку величини β^n і γ_i^n легко обчислюються: $\beta^0 = \gamma_i^0 = h$, $\beta^1 = \gamma_i^1 = 0$, $\beta^2\gamma_i^2 = \frac{h^2}{12}$ $(i \in \{1,2\})$ і напівдискретна модель (45) значно спрощується і формулюється так:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{знайти } \vec{\theta} = \{\theta_i(\alpha_1, \alpha_2, t)\} \text{ такий, що} \\ \theta_1' - 2\mu\Delta\theta_1 = w_1 + \frac{q^+ + q^-}{h}, \\ \theta_2' - 2\mu\Delta\theta_2 + \frac{12}{h^2}\mu\theta_2 = w_2 + \frac{12}{h^2}\frac{(q^+ - q^-)}{h} \qquad \text{в} \quad \Omega\times(0,T], \\ 2\mu\nabla\theta_i.n = \tilde{q}_i \qquad \text{на} \quad \Gamma\times(0,T], \\ \theta_i|_{t=0} = \theta_i^0 \qquad \text{в} \quad \Omega \quad (i \in \{1,2\}). \end{array}\right. \tag{46}$$

Особливістю цієї задачі є той факт, що система рівнянь напівдискретної моделі ділиться на незалежні початково-крайові задачі для кожної компоненти вектора $\vec{\theta}$, які розв'язуються стандартною підходом методу скінченних елементів. Подібне одержано в [7,8].

4.2. Сферична оболонка. Нехай теплопровідний шар D є порожнистою кулею з серединною сферою Ω радіуса R і товщини h. Тоді його зручно описати за допомогою сферичних координат $\alpha_3 = \rho \in \left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right)$, $\alpha_1 = \psi \in (-\pi, \pi)$, $\alpha_2 = \vartheta \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Значення параметрів Ляме та кривин наступні: $A_1 = R$, $A_2 = R\sin\psi$, $A_3 = 1$, $k = k_i = \frac{1}{R}$

$(i \in \{1, 2\})$, і напівдискретна задача теплопровідності (45) приводиться до вигляду:

$$\begin{cases} \text{знайти такі } \theta_1, \theta_2, \text{ що задовольняють рівняння} \\ \left(1 + \frac{h^2}{12R^2}\right)\theta_1' + \frac{h^2}{6R}\theta_2' - \frac{2\mu}{R^2\cos^2\psi}\left\{\frac{\partial^2\theta_1}{\partial\psi^2} + \frac{\partial^2\theta_1}{\partial\vartheta^2} - tg\psi\frac{\partial\theta_1}{\partial\psi}\right\} = \\ \quad = \left(1 + \frac{h^2}{12R^2}\right)w_1 + \frac{h^2}{6R}w_2 + \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{R} + \frac{h}{4R^2}\right)q^+ + \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{R} + \frac{h}{4R^2}\right)q^-, \\ \frac{\theta_1'}{2} + 2\theta_2' - \frac{\mu}{R^2\cos^2\psi}\left\{\frac{\partial^2\theta_2}{\partial\psi^2} + \frac{\partial^2\theta_2}{\partial\vartheta^2} - tg\psi\frac{\partial\theta_2}{\partial\psi}\right\} + \mu\left(\frac{6}{h^2} + \frac{1}{2R^2}\right) = \\ \quad = \frac{w_1}{R} + \frac{w_2}{2} + 3\left\{\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{hR} + \frac{1}{4R^2}\right)q^+ + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{hR} - \frac{1}{4R^2}\right)q^-\right\}, \\ \text{початкові умови з (46) та крайові умови} \\ \frac{2\mu}{R^3\cos^2\psi}\partial_2\theta_1 = \left(1 + \frac{h^2}{12R^2}\right)\tilde{q}_1 + \frac{h^2}{6R}\tilde{q}_2, \\ \frac{2\mu}{R^3\cos^2\psi}\partial_2\theta_2 = \frac{\tilde{q}_1}{R} + \frac{\tilde{q}_2}{2}. \end{cases} \tag{47}$$

Неважко побачити, що запропонована методика без труднощів може бути розповсюджена на деякі інші класи задач механіки і фізики.

ЛІТЕРАТУРА

1. Вагін П.П., Іванова Н.В., Шинкаренко Г.А. *Постановка, розв'язуваність та апроксимація варіаційних задач статики зсувних оболонок* // Матем. методи та фіз.-мат. поля. 1999. – Т.42, №2. - С. 53–61.
2. Вагін П.П., Малець Р.Б., Шинкаренко Г.А. Моделювання нелінійного деформування зсувних оболонок при термосиловому навантаженні // Львів. ун-т. – Львів, 1998. – 29 с. – Деп. в ДНТБ України 13.04.98 №186-Ук98.
3. Дяконюк Л.М., Савула Я.Г. *Комп'ютерне моделювання теплоперенесення у шарі з тонким покриттям* // Вісник Львів. ун-ту, серія мех.-мат. – 1998. – Вип. 50. – С. 93–95.
4. Кревс В., Савула Я. *Ієрархічні моделі та метод декомпозиції області у D-адаптивних моделях теплопровідності* // Вісник Львів. ун-ту, серія прикл. матем. та інформ. – 2000. – Вип. 2. – С. 142–150.
5. Кревс В.В., Савула Я.Г. *Про ієрархічну модель теплопровідності тонкого шару* // Вісник Львів. ун-ту, серія мех.-мат. – 1999. – Вип. 52. – С. 83–96.
6. Подстригач Я.С., Швец Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. - Киев: Наукова думка, 1978. – 344 с.
7. Савула Я.Г. *Математична модель теплоперенесення через тривимірне тіло з тонким плоским покриттям* // Вісник Львів. ун-ту, серія мех.-мат. – 1995. – Вип. 42. – С. 3–7.
8. Савула Я.Г., Сипа І.М., Струтинський І.В. *Математичні моделі теплопровідності для тіл з тонкими покриттями і включеннями* // Вісник Львів. ун-ту, серія мех.-мат. – 1992. – Вип. 37. – С. 39–45.
9. Шинкаренко Г. А. Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач. – Київ: НМК ВО, 1991. – 88 с.

Львівський національний університет імені Івана Франка
vahin@franko.lviv.ua
kis@franko.lviv.ua

Надійшло 26.03.2003
Після переробки 3.07.2004
Після переробки 15.05.2005