УДК 517.51

В. Г. Герасимчук, В. К. Маслюченко, О. В. Маслюченко

ПРО НАРІЗНО ТОЧКОВО ЛІПШИЦЕВІ ФУНКЦІЇ

V. H. Herasymchuk, V. K. Maslyuchenko, O. V. Maslyuchenko. *On separately pointwise Lipschitz functions*, Matematychni Studii, **26** (2006) 65–70.

Some results on joint continuity and local Lipschitz property of separately pointwise Lipschitz functions are obtained. In particular, we prove that the discontinuity point set of any function of several variables defined on a product of complete metric spaces which is continuous with respect to some variable and separately pointwise Lipschitz with respect to the other variables is nowhere dense.

В. Г. Герасимчук, В. К. Маслюченко, О. В. Маслюченко. *О раздельно точечно липшицевых функциях* // Математичні Студії. – 2006. – Т.26, №1. – С.65–70.

Получены результаты о совокупной непрерывности и локальной липшицевости раздельно точечно липшицевых функций. В частности, мы доказываем, что множество точек разрыва функции нескольких переменных, определенной на произведении полных метрических пространств, непрерывной по одной переменной и раздельно точечно липшицевой по другим, нигде не плотно.

1. Перші кроки у напрямку вивчення множини точок розриву $D(f)$ нарізно диференційовних функцій n змінних було зроблено у праці [1]. Зокрема, там було встановлено, що для неперервної відносно першої змінної і нарізно диференційовної відносно решти змінних функції $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Множина $D(f)$ ніде не щільна в $\mathbb{R}^n$ і для кожного $x_n \in \mathbb{R}$ множина $D_{x_n} = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in D(f)\}$ ніде не щільна в $\mathbb{R}^{n-1}$. У попередній праці [2] для функцій двох змінних вимога диференційовності часто замінювалася умовою ліпшицевості, що приводило до загальніших результатів. Тому постало природне завдання: узагальнити результати праці [1], замінивши диференційовність на ліпшицевість. Це й здійснюється в даній статті, в якій крім множини точок розриву нарізно ліпшицевих функцій f вивчається і множина тих точок, в яких f буде локально ліпшицевою за сукупністю змінних (див. відповідно теореми 2 і 4).

2. Нагадаємо основні означення, введені у статті [2]. Нехай X і Y — метричні простори з метриками $|\cdot - \cdot|_X$ і $|\cdot - \cdot|_Y$ відповідно і $f\colon X \to Y$ — відображення. Кажуть, що f є *ліпшицевим у точці* $a \in X$, якщо існують окіл U точки a в X і число γ, такі, що $|f(x) - f(a)|_Y \le \gamma |x - a|_X$, як тільки $x \in U$. Якщо f ліпшицеве в кожній точці простору X, то казатимемо, що воно є *точково ліпшицевим.* Відображення f називається *ліпшицевим на множині* A в X, якщо існує така константа γ, що $|f(x') - f(x'')|_Y \le \gamma |x' - x''|_X$ для всіх $x', x'' \in A$. Якщо f ліпшицеве на X, то f називається просто *ліпшицевим.* Далі,

2000 *Mathematics Subject Classification:* 54C30, 54C10.

f — *локально ліпшицеве на множині* A, якщо для кожної точки $x \in A$ існує її окіл U_x в X, такий, що f є ліпшицевим на U_x. Зокрема, f є *локально ліпшицевим у точці* $x \in A$, якщо воно є таким на одноточковій множині $\{x\}$. Нарешті f називають *локально ліпшицевим*, якщо воно є таким на всьому просторі X.

Топологічний простір X називається *берівським*, якщо в ньому кожна відкрита непорожна множина є множиною другої категорії, тобто не подається у вигляді об'єднання послідовності ніде не щільних в X множин. Добре відомо, що простір X буде берівським тоді і тільки тоді, коли для кожної послідовності замкнених в X множин F_n, такої, що $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ відкрита множина $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{int} F_n$ є всюди щільною в X.

3. Наш перший результат — про множину точок локальної ліпшицевості нарізно ліпшицевих у кожній точці функції від двох змінних.

Для відображення $f\colon X \times Y \to Z$ і точки $p = (x, y) \in X \times Y$ покладемо, як звичайно, $f^x(y) = f_y(x) = f(p)$. Якщо X, Y і Z — метричні простори, то відображення $f\colon X \times Y \to Z$ називається *нарізно точково ліпшицевим*, якщо відображення $f^x\colon Y \to Z$ і $f_y\colon X \to Z$ є точково ліпшицевими для довільних $x \in X$ і $y \in Y$. Кажуть, що $f\colon X \times Y \to Z$ — нарізно ліпшецеве в точці $p = (x, y) \in X \times Y$, якщо відображення f^x ліпшецеве в точці y, а відображення f_y — в точці x.

Аналогічно вводиться поняття *нарізної точкової ліпшицевості* для функцій багатьох змінних. Добуток $P = X \times Y$ метричних просторів X і Y ми наділятимемо метрикою $|\cdot - \cdot|_P$, яка задається формулою $|p - q|_P = |x - u|_X + |y - v|_Y$, де $p = (x, y) \in P$ і $q = (u, v) \in P$.

Теорема 1. *Нехай X, Y і Z — метричні простори, такі, що добуток $P = X \times Y$ — берівський простір, і $f\colon X \times Y \to Z$ — нарізно точково ліпшицеве відображення. Тоді множина $L = L(f)$ всіх тих точок $p \in P$, в яких f локально ліпшицеве за сукупністю змінних, є відкритою і всюди щільною в P.*

Доведення. Розглянемо для кожного номера $n \in \mathbb{N}$ множини

$$A_n = \left\{(x, y) \in P : (\forall u \in X)(|u - x|_X \le \tfrac{1}{n} \Rightarrow |f_y(u) - f_y(x)|_Z \le n|u - x|_x)\right\},$$

$$B_n = \left\{(x, y) \in P : (\forall v \in Y)(|v - y|_Y \le \tfrac{1}{n} \Rightarrow |f^x(v) - f^x(y)|_Z \le n|v - y|_Y)\right\}$$

і $E_n = A_n \cap B_n$. З нарізної ліпшицевості відображення f у кожній точці $p \in P$ випливає, що $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = P$. Оскільки простір P берівський, то об'єднання G відкритих множин $G_n = \mathrm{int}\overline{E}_n$ всюди щільне в P. За теоремою 1 з [2] множина $D(f)$ точок розриву відображення f ніде не щільна в P. Тоді різниця $H = P \setminus \overline{D(f)}$ є відкритою всюди щільною в P множиною. Покладемо $O = G \cap H$. Зрозуміло, що і множина O — відкрита і всюди щільна в P.

Доведемо, що $O \subseteq L$. Оскільки $O = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$, де $O_n = G_n \cap H$, то досить з'ясувати, що $O_n \subseteq L$ для кожного номера n. Розглянемо довільну відкриту непорожну частину W множини O_n з $\mathrm{diam} W \le 1/n$, де діаметр множини W обчислюється стосовно вказаної перед формулюванням теореми 1 метрики на P. Досить довести, що відображення f ліпшицеве на W. Оскільки множина W відкрита в P і $W \subseteq G_n \subseteq \overline{E}_n$, то $W \subseteq \overline{C}_n$, де $C_n = W \cap E_n$. Нехай $p = (x, y) \in C_n$ і $q = (u, v) \in C_n$. Тоді $|x - u|_X \le |p - q|_P \le 1/n$ і $|y - v|_Y \le |p - q|_P \le 1/n$. Оскільки $p, q \in E_n$, то

$$|f(p) - f(q)|_Z \le |f(x, y) - f(u, y)|_Z + |f(u, y) - f(u, v)|_Z \le$$

$$\leq n|x-u|_X + n|y-v|_Y = n|p-q|_P.$$

Нехай тепер p, $q \in W$.Оскільки $W \subseteq \overline{C}_n$, то існують послідовності точок p_k, $q_k \in C_n$, такі, що $p_k \to p$ і $q_k \to q$ в P. За доведеним, маємо, що $|f(p_k) - f(q_k)|_Z \leq n|p_k - q_k|_P$ для кожного k. За побудовою $W \subseteq O \subseteq H$. Отже, відображення f неперервне в точках p і q. Переходячи в останній нерівності до границі при $k \to \infty$, ми отримаємо, що $|f(p) - f(q)|_Z \leq n|p-q|_P$. А це і дає нам ліпшицевість на W з константою n. Оскільки відкритість множини L очевидна, то все доведено. Зауважимо, що насправді $L = O$. $\square$

4. Встановимо тепер результат, який є розвитком теорем 1, 2 з [2] і узагальнює теорему 2 з [1].

Теорема 2. *Нехай X_1 — топологічний простір, $X_2, \ldots, X_{n+1}$, Z — метричні простори, для яких добуток $P = X_1 \times \cdots \times X_{n+1}$ берівський, і $f\colon P \to Z$ — відображення, яке неперервне відносно першої змінної і нарізно точково ліпшицеве відносно решти змінних. Тоді:*

а) множина $D(f)$ ніде не щільна в P;

б) для кожного $y \in X_{n+1}$, множина

$$D_y(f) = \{x \in X = X_1 \times \cdots \times X_n : (x,y) \in D(f)\}$$

ніде не щільна в X.

Доведення. а). Застосуємо індукцію відносно n. Для $n = 0$ твердження теореми очевидне. При $n = 1$ твердження теореми доведено в [2, теореми 1, 2], втім ми його встановимо і тут при здійсненні індуктивного кроку. Припустимо, що $n \geq 1$ і твердження теореми справжується для функцій від n змінних. Доведемо, що воно виконується і для функцій від $n+1$ змінної, як і у формулюванні теореми.

Покладемо $Y = X_{n+1}$ і розглянемо множини

$$B_m = \{(x,y) \in X \times Y : (\forall v \in Y)(|v-y|_Y \leq \tfrac{1}{m} \Rightarrow |f^x(v) - f^x(y)|_Z \leq m|v-y|_Y)\},$$

$G_m = \mathrm{int}\overline{B}_m$ і $G = \bigcup_{m=1}^{\infty} G_m$. Оскільки для кожного $x \in X$ відображення $f^x\colon Y \to Z$ за умовою є точково ліпшицевим, то $\bigcup_{m=1}^{\infty} B_m = X \times Y = P$. З беровості простору P випливає, що відкрита множина G всюди щільна в P.

Покажемо, що множина $D(f)$ ніде не щільна в P. Нехай H — відкрита непорожна підмножина в P. Оскільки $\overline{G} = P$, то $H \cap G \neq \emptyset$. Отже, існує такий номер m, що $H \cap G_m \neq \emptyset$. Нехай $a = (a_1, \ldots, a_{n+1}) \in H \cap G_m$. З відкритості множини $H \cap G_m$ в $X_1 \times \cdots \times X_{n+1}$ випливає, що для $i = 1, \ldots, n+1$ існують відкриті околи U_i точок a_i в X_i, такі, що $U = U_1 \times \cdots \times U_{n+1} \subseteq H \cap G_m$ і $\mathrm{diam} U_{n+1} \leq 1/m$. Покладемо $B = U \cap B_m$. Ясно, що $U \subseteq \overline{B}$ бо $G_m \subseteq \overline{B}_m$.

Зафіксуємо $v \in U_{n+1}$. Якщо $(x,y) \in B$, то $y \in U_{n+1}$. Отже, $|v-y|_Y \leq 1/m$. А значить,

$$|f(x,v) - f(x,y)|_Z \leq m|v-y|_Y,$$

адже $(x,y) \in B_m$. Розглянемо функцію $h\colon P \to \mathbb{R}$, яка задається формулою

$$h(x,y) = |f(x,v) - f(x,y)|_Z - m|v-y|_Y.$$

Зрозуміло, що h є нарізно неперервною функцією від $n+1$ змінних. Оскільки добуток $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ є берівським разом з P і простори $X_2, \ldots, X_{n+1}$ задовольняють першу аксіому зліченості (як метричні простори), то за теоремою 6 з [3] функція h квазінеперервна. Зі сказаного вище випливає, що $h(B) \subseteq (-\infty; 0]$. Але $U \subseteq \overline{B}$, отже, на основі характеристичної властивості квазінеперервності $h(U) \subseteq \overline{h(B)} \subseteq (-\infty; 0]$. Тому

$$|f(x,v) - f(x,y)|_Z \leq m|v-y|_Y,$$

як тільки $x \in U_1 \times \cdots \times U_n$ і $v, y \in U_{n+1}$.

Покладемо $Q = U_1 \times U_{n+1}$ і визначимо функцію $g\colon Q \times U_2 \times \cdots \times U_n \to Z$ формулою

$$g(q, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}),$$

де $q = (x_1, x_{n+1}) \in Q$ і $x_k \in U_k$ при $k \in \{2, \ldots, n\}$. Якщо зафіксувати змінні $x_2, \ldots, x_n$, то функція $\varphi\colon Q \to Z$, $\varphi(q) = g(q, x_2, \ldots, x_n)$, є неперервною відносно першої змінної і задовольняє умову Ліпшиця з константою m відносно другої змінної на добутку Q. Тому за лемою 3 з [2] функція φ неперервна, отже, функція g неперервна відносно першої змінної. Крім того, g є нарізно ліпшицевою в кожній точці з добутку $Q \times U_2 \times \cdots \times U_n$ відносно решти змінних $x_2, ..., x_n$. Оскільки добуток $Q \times U_2 \times \cdots \times U_n$ берівський, адже він гомеоморфний відкритій непорожній підмножині U берівського простору P, то за індуктивним припущенням множина $D(g)$ ніде не щільна в $Q \times U_2 \times \cdots \times U_n$, а значить, множина $D(f)$ ніде не щільна в U. Тому існує відкрита в U непорожна підмножина V, така, що $V \cap D(f) = \emptyset$. Але $U \subseteq H$, отже $V \subseteq H$ і , крім того, множина V відкрита в P. Це і показує, що $D(f)$ — ніде не щільна підмножина P.

б). Зафіксуємо $y \in Y = X_{n+1}$. Функція $f_y\colon X \to Z$, $f_y(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n, y)$, неперервна відносно першої змінної і нарізно ліпшицева в кожній точці відносно решти змінних. Тому за доведеним вище множина $D(f_y)$ ніде не щільна в X. Крім того, f_y квазінеперервна за тією ж теоремою 6 з [3] і $f^x\colon Y \to Z$ є ліпшицевою в кожній точці з простору Y для довільного $x \in X$. Отже, за теоремою 1 з [1] множина $D_y(f)$ ніде не щільна в X. □

5. Тепер ми збираємося перенести теорему 1 на функції від n змінних. Для цього нам потрібна одна модифікація теореми 1, яку вдалося довести лише при умові сепарабельності простору Y.

Теорема 3. *Нехай X і Y — берівські метричні простори, причому простір Y сепарабельний, Z — метричний простір і $f\colon X \times Y \to Z$ — відображення, яке задовольняє умови:*

(i) для кожного $y \in Y$ відображення $f_y : X \to Z$ точково ліпшицеве;

(ii) для кожного $x \in X$ існує така відкрита всюди щільна множина $H(x)$ в Y, що відображення $f^x\colon Y \to Z$ є локально ліпшицевим на $H(x)$.

Тоді множина $L = L(f)$ відкрита і всюди щільна в P.

Доведення. Оскільки метричний простір Y — сепарабельний, то він має зліченну базу $\mathcal{V} = \{V_m : m \in \mathbb{N}\}$. Нехай U і V — відкриті непорожні множини відповідно в просторах X та Y і, крім того, $W = U \times V$. Покладемо

$$A_{m,n} = \{x \in X : (\forall y', y'' \in V_m)(|f^x(y') - f^x(y'')|_Z \leq n|y' - y''|_Y)\},$$

$U_{m,n} = \mathrm{int}\overline{A}_{m,n}$, і $I(V) = \{m \in \mathbb{N} : \emptyset \neq V_m \subseteq V\}$. Перевіримо, чи

$$\bigcup_{m\in I(V)} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{m,n} = X.$$

Справді, нехай $x \in X$. Оскільки V — відкрита непорожна множина в Y і $H(x)$ — відкрита всюди щільна в Y множина, то їх перетин $H(x) \cap V$ — це відкрита непорожна множина в просторі Y. Тому існує точка $y_0 \in H(x) \cap V$. Функція f^x локально ліпшицева в точці y_0, бо $y_0 \in H(x)$. Звідси випливає, що існують відкритий окіл V_0 точки y_0 в Y і число γ_0, такі, що $V_0 \subseteq H(x) \cap V$ і для довільних $y', y'' \in V_0$ виконується нерівність $|f^x(y') - f^x(y'')|_Z \leq \gamma_0 |y' - y''|_Y$. Зрозуміло, що існують номери m і n, такі, що $y_0 \in V_m \subseteq V_0$ і $n \geq \gamma_0$. В такому разі $m \in I(V)$ і $x \in A_{m,n}$. Отже, потрібна рівність доведена.

Нехай $G = \bigcup_{m\in I(V)} \bigcup_{n=1}^{\infty} U_{m,n}$. Оскільки простір X берівський, то відкрита множина G всюди щільна в X. Тому $G \cap U \neq \emptyset$. Отже, існують m і n, такі, що $U_{m,n} \cap U \neq \emptyset$ і $m \in I(V)$. Покладемо $\widetilde{U} = U_{m,n} \cap U$, $\widetilde{V} = V_m$ і $\widetilde{W} = \widetilde{U} \times \widetilde{V}$. Ясно, що $\widetilde{W}$ — відкрита непорожна множина в P і $\widetilde{W} \subseteq W$. Нехай $\tilde{f} = f|_{\widetilde{W}}$ і $A = \widetilde{U} \cap A_{m,n}$. Зрозуміло, що відображення $\tilde{f}_y$ є ліпшицевим у кожній точці $x \in \widetilde{U}$ для кожного $y \in \widetilde{V}$ і відображення $\tilde{f}^x$ є ліпшицевим на $\widetilde{V}$ з константою n для кожного $x \in A$, причому $\widetilde{U} \subseteq \overline{A}$. З леми 3 з праці [2] випливає, що відображення $\tilde{f} \colon \widetilde{U} \times \widetilde{V} \to Z$ нарізно точково ліпшицеве на $\widetilde{W}$. Тоді за теоремою 1 множина $L_W = L(\tilde{f})$ відкрита і щільна $\widetilde{W}$, адже, $\widetilde{W}$ як добуток берівського простору $\widetilde{U}$ на берівський простір $\widetilde{V}$, що задовольняє другу аксіому зліченності, сам буде берівським [4, с. 57].

Нехай $\mathcal{W} = \{W = U \times V : \ U, V \neq \emptyset, \ U -$ відкрита в X і $V -$ відкрита в $Y\}$ і $O = \bigcup_{W\in\mathcal{W}} L_W$. Зрозуміло, що $O \subseteq L$ і $\overline{O} = P$, звідки і випливає твердження теореми. □

Нехай $X_1, \ldots, X_n$ — метричні простори і $|.-.|_{X_i}$ — метрика на просторі X_i. Добуток $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ ми наділяємо метрикою, яка визначається рівністю $|x' - x''|_X = \sum_{i=1}^{n} |x'_i - x''_i|_{X_i}$, де $x' = (x'_1, ..., x'_n) \in X$ і $x'' = (x''_1, ..., x''_n) \in X$. Використовуючи твердження цієї теореми і теореми 3, за індукцією отримуємо

Теорема 4. *Нехай X_1 — берівський метричний простір, $X_2, ..., X_{n+1}$ — берівські метричні сепарабельні простори, Z — метричний простір, $P = X_1 \times \cdots \times X_{n+1}$ і $f \colon P \to Z$ — нарізно точково ліпшицеве відображення. Тоді множина $L = L(f)$ всіх тих точок $p \in P$, в яких f буде локально ліпшицевим за сукупністю змінних, є відкритою і всюди щільною в P.*

ЛІТЕРАТУРА

1. Герасимчук В.Г., Маслюченко В.К. *До питання про розриви нарізно диференційовних функцій багатьох змінних* // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Математика. – 2003. – Вип.160. – С. 23–29.

2. Герасимчук В.Г., Маслюченко В.К., Михайлюк В.В. *Різновиди ліпшицевості і множини точок розриву нарізно диференційовних функцій* // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Математика. – 2002. – Вип. 134. – С. 22–29.

3. Маслюченко В.К. *Простори Гана і задача Діні* // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1998. – Т.41, №4. – С. 39–45.

4. Haworth R.C, Mc.Coy R.A. *Baire Spaces* // Diss. Math. – 1977. – V.141. – P. 3–77.

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича
vmaslyuchenko@ukr.net

Надійшло 9.06.2005