УДК 517.51, 515.12

В. В. Михайлюк

ПРОСТОРИ НАМІОКИ І СИЛЬНО БЕРІВСЬКІ ПРОСТОРИ

V. V. Mykhaylyuk. *Namioka spaces and strongly Baire spaces*, Matematychni Studii, **26** (2006) 55–64.

A notion of strongly Baire space is introduced. Its definition is a transfinite development of some equivalent reformulation of the Baire space definition. It is shown that every strongly Baire space is a Namioka space and every $\beta-\sigma$-unfavorable space is a strongly Baire space.

В. В. Михайлюк. *Пространства Намиоки и сильно бэровские пространства* // Математичні Студії. – 2006. – Т.26, №1. – С.55–64.

Введено понятие сильно бэровского пространства, определение которого является трансфинитным развитием одной из равносильных переформулировок определения бэровского пространства. Показано, что каждое сильно бэровское пространство является пространством Намиоки, а каждое $\beta-\sigma$-неблагоприятное пространство — сильно бэровским.

1. Вступ. Дослідження множини точок сукупної неперервності нарізно неперервних функцій, тобто функцій неперервних відносно кожної змінної зокрема, беруть свій початок з класичної праці Р. Бера [1] і були продовжені в роботах багатьох математиків. Новим поштовхом до розвитку подальших досліджень в цьому напрямку став результат Наміоки ([2]) про масивність множини точок сукупної неперервності нарізно неперервної функції на добутку двох множників, один з яких задовольняє умову компактності.

Топологічний простір X називається *сильно зліченно повним*, якщо існує послідовність $(\mathcal{U}_n)_{n=1}^{\infty}$ відкритих покриттів простору X така, що для довільної центрованої послідовності $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ замкнених в X множин F_n такої, що для кожного $n\in\mathbb{N}$ існує $U\in\mathcal{U}_n$ таке, що $F_n\subseteq U$, перетин $\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$ непорожній.

Теорема 1.1. (Наміока). *Нехай X — сильно зліченно повний, Y — компактний простір і $f\colon X\times Y\to\mathbb{R}$ — нарізно неперервна функція. Тоді існує всюди щільна в X G_δ-множина $A\subseteq X$ така, що функція f неперервна в кожній точці множини $A\times Y$.*

Наступні поняття були введені в [3].

Відображення $f\colon X\times Y\to\mathbb{R}$ *має властивість Наміоки*, якщо існує щільна в X G_δ-множина $A\subseteq X$ така, що $A\times Y\subseteq C(f)$, де через $C(f)$ ми позначаємо множину точок сукупної неперервності відображення f.

Берівський простір X називається *простором Наміоки*, якщо для довільного компактного простору Y кожна нарізно неперервна функція $f\colon X\times Y\to\mathbb{R}$ має властивість Наміоки.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 54C10.

В [4] було виявлено, що при вивченні просторів Наміоки можуть бути корисними класи просторів, пов'язані з топологічними іграми.

Нехай $\mathcal{P}$ — система підмножин топологічного простору X. Означимо $G_{\mathcal{P}}$-гру на X, в якій беруть участь гравці α і β. На першому кроці спочатку гравець β вибирає відкриту в X непорожню множину U_0, а гравець α — відкриту в X непорожню множину $V_1 \subseteq U_0$ і множину $P_1 \in \mathcal{P}$. Далі гравець β вибирає відкриту непорожню множину $U_1 \subseteq V_1$, а гравець α вибирає відкриту непорожню множину $V_2 \subseteq U_1$ і множину $P_2 \in \mathcal{P}$ і так далі. На n-му кроці гравець β вибирає відкриту непорожню множину $U_{n-1} \subseteq V_{n-1}$, а гравець α — відкриту непорожню множину $V_n \subseteq U_{n-1}$ і множину $P_n \in \mathcal{P}$. Гравець α виграє, якщо $(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n) \cap (\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n}) \neq \emptyset$. Інакше виграє β.

Топологічний простір X називатимемо *α-сприятливим у $G_{\mathcal{P}}$-грі*, якщо гравець α має виграшну стратегію у цій грі, тобто якщо існує правило, яке забезпечує виграш гравцю α у випадку, коли α грає згідно з цим правилом. Відповідно топологічний простір X називатимемо *β-несприятливим у $G_{\mathcal{P}}$-грі*, якщо гравець β не має виграшної стратегії у цій грі. Зрозуміло, що кожний α-сприятливий топологічний простір X є β-несприятливим.

У випадку, коли $\mathcal{P} = \{X\}$, $G_{\mathcal{P}}$-гра — це класична гра Шоке і, як відомо (див. [3]), β-несприятливість у такій грі рівносильна беровості простору X. Якщо ж $\mathcal{P}$ — система всіх скінченних (чи одноточкових) підмножин простору X, то $G_{\mathcal{P}}$-гра називається *σ-грою.*

Ж. Сан-Ремо в [3] вперше помітив, що при застосуванні методу топологічних ігор часто замість сильнішої умови α-сприятливості досить вимагати слабшу умову — β-несприятливість. Він узагальнив результат Христенсена, показавши, що $\beta - \sigma$-несприятливий є наміоковим.

Подальший розвиток цієї техніки привів до розгляду інших топологічних ігор, які базуються на ширших системах $\mathcal{P}$ підмножин простору X.

Нехай T — топологічний простір і $\mathcal{K}(T)$ — сукупність усіх компактних підмножин топологічного простору T. Тоді простір T називається *$\mathcal{K}$-зліченно визначеним*, якщо існують підмножина S топологічного простору $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ і відображення $\varphi\colon S \to \mathcal{K}(T)$ такі, що довільної відкритої в T множини $U \subseteq T$ множина $\{s \in S : \varphi(s) \subseteq U\}$ відкрита в S і $T = \bigcup_{s\in S} \varphi(s)$; і – *$\mathcal{K}$-аналітичним*, якщо існує таке відображення φ для множини $S = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Множину A в топологічному просторі X називатимемо *обмеженою*, якщо для довільної неперервної функції $f\colon X \to \mathbb{R}$ множина $f(A) = \{f(a) : a \in A\}$ обмежена.

Подальші узагальнення результату Сан-Ремо можна подати у вигляді наступної теореми.

Теорема 1.2. *Довільний β-несприятливий у $G_{\mathcal{P}}$-грі простір X є простором Наміоки, якщо:*

(i) $\mathcal{P}$ — система всіх компактних підмножин простору X (Талагран [5]);
(ii) $\mathcal{P}$ — система всіх $\mathcal{K}$-аналітичних підмножин простору X (Дебс [6]);
(iii) $\mathcal{P}$ — система всіх обмежених підмножин простору X (О.Маслюченко [7]);
(iv) $\mathcal{P}$ — система всіх $\mathcal{K}$-зліченно-визначених підмножин простору X (Рибаков [8]).

Легко бачити, що $(iv) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$ та $(iii) \Rightarrow (i)$.

У зв'язку з цим цікавою була б характеризація наміокових просторів через їх внутрішню топологічну структуру, тобто без використання топологічних ігор (аналогічно, як в класичному означенні берівського простору). В цій роботі ми вивчаємо поняття сильно берівського простору, яке вводиться у вигляді, що є трансфінітним розвитком одного із рівносильних переформулювань означення беровості, і показуємо, що кожний $\beta - \sigma$-несприятливий простір є сильно берівським, а кожний сильно берівський простір — наміоковим. Крім того, ми вивчаємо достатні умови на топологічний простір X, які забезпечують метризовність кожного компакту $Y \subseteq C_p(X)$.

2. Сильно берівські простори і властивість Наміоки. В даному пункті ми введемо поняття сильно берівського простору і доведемо основні результати, які встановлюють зв'язки сильно берівських просторів з просторами Наміоки і $\beta - \sigma$-несприятливими просторами.

Нехай α — довільний ординал. Казатимемо, що узагальнена послідовність множин $(B_\xi : \xi < \alpha)$ *охоплює* послідовність множин $(A_\xi : \xi < \alpha)$, якщо

(i) $A_\xi \subseteq B_\xi$ для кожного $\xi < \alpha$;

(ii) $A_\beta \subseteq \bigcup_{\xi<\beta} B_\xi$ для кожного граничного ординала $\beta < \alpha$.

Топологічний простір X називатимемо *сильно берівським*, якщо для довільних ординала α, зростаючої послідовності $(A_\xi : \xi < \alpha)$ замкнених в X множин A_ξ і зростаючої послідовності $(B_\xi : \xi < \alpha)$ замкнених в X множин B_ξ, яка охоплює послідовність $(A_\xi : \xi < \alpha)$, має місце включення

$$\operatorname{int}\left(\bigcup_{\xi<\alpha} A_\xi\right) \subseteq \overline{\bigcup_{\xi<\alpha} \operatorname{int}(B_\xi)},$$

де через $\operatorname{int}(C)$ ми позначаємо внутрішність множини C. При $\alpha = \omega_0$ ми одержимо, що $\operatorname{int}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \subseteq \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{int}(A_n)}$ для довільної послідовності $(A_n)_{n=1}^\infty$ замкнених в X множин A_n, що рівносильно беровості простору X. Тобто дане поняття є трансфінітним підсиленням беровості, що обумовило вибір відповідної назви.

Ми будемо використовувати наступні два твердження з [9], перше з яких ілюструє властивість типу залежності від певної кількості координат неперервних функцій на компактах, друге — зв'язок між такою залежністю і властивістю Наміоки для нарізно неперервних функцій, а разом вони привели до розгляду послідовностей, які фігурують в означенні сильно берівського простору.

Твердження 2.1. *Нехай $Y \subseteq \mathbb{R}^T$ — компактний простір, Z — метричний простір, $f\colon Y \to Z$ — неперервне відображення, $\varepsilon \geq 0$ і множина $S \subseteq T$ такі, що $|f(y')-f(y'')|_Z \leq \varepsilon$ для довільних $y', y'' \in Y$ з $y'|_S = y''|_S$. Тоді для довільного $\varepsilon' > \varepsilon$ існують скінченна множина $S_0 \subseteq S$ і $\delta > 0$ такі, що $|f(y') - f(y'')|_Z \leq \varepsilon'$ для довільних $y', y'' \in Y$ з $|y'(s) - y''(s)| < \delta$ для кожного $s \in S_0$.*

Теорема 2.2. *Нехай X — берівський простір, $Y \subseteq \mathbb{R}^T$ — компактний простір, $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ — нарізно неперервна функція. Тоді наступні твердження рівносильні:*

(i) f має властивість Наміоки;

(ii) для довільної відкритої в X непорожньої множини U і числа $\varepsilon > 0$ існують відкрита в X непорожня множина $U_0 \subseteq U$ і не більш ніж зліченна множина $S_0 \subseteq T$ такі, що $|f(x, y') - f(x, y'')| \leq \varepsilon$ для довільних $x \in U_0$ і $y', y'' \in Y$ з $y'|_{S_0} = y''|_{S_0}$.

Теорема 2.3. *Довільний сильно берівський простір є наміоковим.*

Доведення. Нехай X — сильно берівський простір, $Y \subseteq \mathbb{R}^T$ — компактний простір, $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ — нарізно неперервна функція, U — відкрита в X непорожня множина і $\varepsilon > 0$. Згідно з теоремою 2.2 досить довести, що існують не більш ніж зліченна множина $S_0 \subseteq T$ і відкрита в X непорожня множина $U_0 \subseteq U$ такі, що $|f(x,y') - f(x,y'')| \le \varepsilon$ для довільних $x \in U_0$ і $y', y'' \in Y$ з $y'|_{S_0} = y''|_{S_0}$.

Припустимо, що це не так, тобто для довільної не більш ніж зліченної множини $S \subseteq T$ і відкритої в X непорожньої множини $U' \subseteq U$ існують $x \in U'$ і $y', y'' \in Y$ з $y'|_S = y''|_S$ такі, що $|f(x,y') - f(x,y'')| > \varepsilon$. Нехай ω — перший ординал потужності $|T|$, $T = \{t_\alpha : \alpha < \omega\}$ і $(\varepsilon_n)_{n=0}^\infty$ — довільна строго зростаюча послідовність чисел $\varepsilon_n > 0$, яка прямує до ε.

Для кожного $\alpha < \omega$ позначимо через $A_\alpha^{(1)}$ множину всіх $x \in \overline{U}$ таких, що $|f(x,y') - f(x,y'')| \le \varepsilon_0$ для довільних $y', y'' \in Y$ з $y'(t_\xi) = y''(t_\xi)$ при $\xi < \alpha$ і через $B_\alpha^{(1)}$ множину всіх $x \in \overline{U}$ таких, що $|f(x,y') - f(x,y'')| \le \varepsilon_1$ для довільних $y', y'' \in Y$ з $y'(t_\xi = y''(t_\xi)$ при $\xi \le \alpha$. З неперервності f відносно змінної x випливає, що всі множини $A_\alpha^{(1)}$ і $B_\alpha^{(1)}$ замкнені, причому $A_\alpha^{(1)} \subseteq B_\alpha^{(1)}$ для кожного $\alpha < \omega$ і послідовності $(A_\alpha^{(1)} : \alpha < \omega)$ і $(B_\alpha^{(1)} : \alpha < \omega)$ зростають. Крім того, з твердження 2.1 випливає, що для кожного граничного ординала $\alpha < \omega$ і довільної точки $x \in A_\alpha^{(1)}$ існує ординал $\xi < \alpha$ такий, що $x \in B_\xi^{(1)}$, тобто $A_\alpha^{(1)} \subseteq \bigcup_{\xi<\alpha} B_\xi^{(1)}$. Отже, послідовність $(B_\alpha^{(1)} : \alpha < \omega)$ охоплює послідовність $(A_\alpha^{(1)} : \alpha < \omega)$. Зауважимо, що з твердження 2.1 випливає також, що $U \subseteq \bigcup_{\alpha<\omega} A_\alpha^{(1)}$. Оскільки простір X сильно берівський, то $\bigcup_{\alpha<\omega} \operatorname{int}(B_\alpha^{(1)}) \ne \emptyset$. Тому існує ординал $\beta_1 < \omega$ і відкрита в X непорожня множина $U_1 \subseteq U$ такі, що $\overline{U_1} \subseteq B_\beta^{(1)}$. Зауважимо, що β_1 незліченний ординал. Адже інакше не більш ніж зліченна множина $S = \{t_\alpha : \alpha \le \beta_1\}$ і відкрита множина U_1 такі, що $|f(x,y') - f(x,y'')| \le \varepsilon_1 \le \varepsilon$ для довільних $x \in U_1$ і $y', y'' \in Y$ з $y'|_S = y''|_S$, що суперечить нашому припущенню.

Покладемо $S_1 = \{t_\alpha : \alpha \le \beta_1\}$. Нехай γ_1 — перший ординал потужності $|S_1|$ і $S_1 = \{s_\alpha^{(1)} : \alpha < \gamma_1\}$. Зрозуміло, що $\gamma_1 \le \beta_1$. Зазначимо, що $|f(x,y') - f(x,y'')| \le \varepsilon_1$ для довільних $x \in \overline{U}_1$ і $y', y'' \in Y$ з $y'|_{S_1} = y''|_{S_1}$. Для кожного $\alpha < \gamma_1$ позначимо через $A_\alpha^{(2)}$ множину всіх $x \in \overline{U}_1$ таких, що $|f(x,y') - f(x,y'')| \le \varepsilon_2$ для довільних $y', y'' \in Y$ з $y'(s_\xi^{(1)}) = y''(s_\xi^{(1)})$ при $\xi < \alpha$ і через $B_\alpha^{(2)}$ множину всіх $x \in \overline{U}_1$ таких, що $|f(x,y') - f(x,y'')| \le \varepsilon_3$ для довільних $y', y'' \in Y$ з $y'(s_\xi^{(1)}) = y''(s_\xi^{(1)})$ при $\xi \le \alpha$. Всі множини $A_\alpha^{(2)}$ і $B_\alpha^{(2)}$ при $\alpha < \gamma_1$ замкнені, а з твердження 2.1 випливає, що послідовність $(B_\alpha^{(2)} : \alpha < \gamma_1)$ охоплює послідовність $(A_\alpha^{(2)} : \alpha < \gamma_1)$ і $U_1 \subseteq \bigcup_{\alpha<\gamma_1} A_\alpha^{(2)}$. Оскільки простір X сильно берівський, то існує ординал $\beta_2 < \gamma_1$ і відкрита в X непорожня множина $U_2 \subseteq U_1$ такі, що $\overline{U}_2 \subseteq B_{\beta_2}^{(2)}$. Аналогічно, як для ординала β_1, можна показати, що β_2 незліченний ординал.

Покладемо $S_2 = \{s_\alpha^{(1)} : \alpha < \beta_2\}$. Нехай γ_2 — перший ординал потужності $|S_2|$ і $S_2 = \{s_\alpha^{(2)} : \alpha < \gamma_2\}$. Зрозуміло, що $\gamma_2 \le \beta_2$. Для кожного $\alpha < \gamma_2$ позначимо через $A_\alpha^{(3)}$ множину всіх $x \in \overline{U}_2$ таких, що $|f(x,y') - f(x,y'')| \le \varepsilon_4$ для довільних $y', y'' \in Y$ з $y'(s_\xi^{(2)}) = y''(s_\xi^{(2)})$ при $\xi < \alpha$ і через $B_\alpha^{(3)}$ множину всіх $x \in \overline{U}_2$ таких, що $|f(x,y') - f(x,y'')| \le \varepsilon_5$ для довільних $y', y'' \in Y$ з $y'(s_\xi^{(2)}) = y''(s_\xi^{(2)})$ при $\xi \le \alpha$. Як і раніше з твердження 2.1 випливає, що послідовність $(B_\alpha^{(3)} : \alpha < \gamma_2)$ охоплює послідовність $(A_\alpha^{(3)} : \alpha < \gamma_2)$ і $U_2 \subseteq \bigcup_{\alpha<\gamma_2} A_\alpha^{(3)}$. Тому існують незліченний ординал $\beta_3 < \gamma_2$ і відкрита непорожня множина $U_3 \subseteq U_2$ такі, що $\overline{U}_3 \subseteq B_{\beta_3}^{(3)}$.

Продовжуючи цей процес до нескінченності отримаємо послідовність ординалів $\beta_1 \geq \gamma_1 > \beta_2 \geq \gamma_2 > \beta_3 \geq \gamma_3 > \ldots$, що неможливо. $\square$

Теорема 2.4. *Довільний $\beta - \sigma$-несприятливий простір сильно берівський.*

Доведення. Нехай топологічний простір X не є сильно берівським. Тобто існує ординал ω та зростаючі послідовності $(A_\alpha : \alpha < \omega)$ і $(B_\alpha : \alpha < \omega)$ замкнених в X множин A_α і B_α такі, що послідовність $(B_\alpha : \alpha < \omega)$ охоплює послідовність $(A_\alpha : \alpha < \omega)$ і $U_0 = \mathrm{int}(\bigcup_{\alpha<\omega} A_\alpha) \setminus \overline{\bigcup_{\alpha<\omega} \mathrm{int}(B_\alpha)} \neq \emptyset$.

Зрозуміло, що ω граничний ординал. Згідно з [10, теорема 10, с.282] ординал ω конфінальний деякому початковому ординалу ω', який найменший з усіх порядкових чисел, конфінальних ω. Якщо $\omega' = \omega_0$, то X не є берівським. Тобто X β-сприятливий у грі Шоке простір, зокрема, X $\beta - \sigma$-сприятливий.

Розглянемо випадок, коли $\omega' > \omega_0$. Опишемо виграшну стратегію τ для гравця β у σ-грі. Нехай $\alpha_0 < \omega$, U_0 — перший хід гравця β, $V_1 \subseteq U_0$ — довільна відкрита в X непорожня множина і $x_1 \in X$. Якщо $x_1 \in U_0$, то $x_1 \in \bigcup_{\alpha<\omega} A_\alpha$. Тому існує ординал $\alpha_1 < \omega$ такий, що $x_1 \in A_{\alpha_1}$. Якщо ж $x_1 \notin U_0$, то покладемо $\alpha_1 = 1$. Замкнена множина B_{α_1} ніде не щільна в U_0. Тому відкрита множина $U_1 = \tau(U_0, V_1, x_1) = V_1 \setminus B_{\alpha_1}$ непорожня.

Нехай $V_2 \subseteq U_1$ — довільна відкрита в X непорожня множина і $x_2 \in X$. Якщо $x_2 \in U_0$, то виберемо ординал α_2 такий, що $\alpha_1 < \alpha_2 < \omega$ і $x_2 \in A_{\alpha_2}$. Якщо ж $x_2 \notin U_0$, то позначимо $\alpha_2 = \alpha_1 + 1$. Тепер покладемо $U_2 = \tau(U_0, V_1, x_1, U_1, V_2, x_2) = V_2 \setminus B_{\alpha_2}$.

Продовжуючи цей процес до нескінченності ми одержимо строго зростаючу послідовність $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ ординалів α_n, послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ точок $x_n \in X$ і спадні послідовності $(U_n)_{n=0}^{\infty}$ і $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ відкритих в X непорожніх множин U_n і V_n відповідно такі, що $V_n \subseteq U_{n-1}$, $U_n = V_{n-1} \setminus B_{\alpha_n}$, де $\alpha_n = \alpha_{n-1} + 1$, якщо $x_n \notin U_0$, і $\alpha_n > \alpha_{n-1}$ таке, що $x_n \in A_{\alpha_n}$, якщо $x_n \in U_0$.

Покажемо, що $(\bigcap_{n=0}^{\infty} U_n) \bigcap \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}} = \emptyset$. Позначимо $\gamma = \sup \alpha_n$. Оскільки $\omega' > \omega_0$, то $\gamma < \omega$. Розглянемо множини $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}, x_n \notin U_0\}$ і $B = \{x_n : n \in \mathbb{N}, x_n \in U_0\}$. Зауважимо, що $A \cap U_0 = \emptyset$. Тому $\overline{A} \cap (\bigcap_{n=0}^{\infty} U_n) = \emptyset$. Оскільки послідовність $(A_\alpha : \alpha < \omega)$ зростаюча, то згідно з вибором ординалів α_n маємо $B \subseteq A_\gamma$. Нагадаємо, що послідовність $(B_\alpha : \alpha < \omega)$ охоплює послідовність $(A_\alpha : \alpha < \omega)$. Тому для граничного ординала γ маємо

$$\overline{B} \subseteq A_\gamma \subseteq \bigcup_{\alpha<\gamma} B_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{\alpha_n}.$$

З іншого боку, згідно з побудовою $U_n \cap B_{\alpha_n} = \emptyset$. Тому $(\bigcap_{n=0}^{\infty} U_n) \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{\alpha_n}) = \emptyset$. Таким чином, $\overline{B} \cap (\bigcap_{n=0}^{\infty} U_n) = \emptyset$.

Отже, $(\bigcap_{n=0}^{\infty} U_n) \cap \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}} = \emptyset$. Значить, стратегія τ є виграшною для гравця β у σ-грі і X $\beta - \sigma$-сприятливий простір. $\square$

3. Властивості сильно берівських просторів.

В цьому пункті ми детальніше дослідимо властивості сильно берівських просторів, пов'язані з калібрами цих просторів. Розпочнемо з очевидного зауваження.

Твердження 3.1. *Нехай $\mathrm{int}(\bigcup_{\xi<\alpha} A_\xi) \subseteq \overline{\bigcup_{\xi<\alpha} \mathrm{int}(A_\xi)}$ для довільної зростаючої послідовності $(A_\xi : \xi < \alpha)$ замкнених в топологічному просторі X множин A_ξ. Тоді X сильно берівський.*

Нагадаємо (див. [11, с.16]), що кардинал $\aleph$ називається *калібром топологічного простору* X, якщо для довільної сім'ї $(U_\alpha : \alpha \in A)$ непорожніх відкритих в X множин U_α з $|A| = \aleph$ існує множина $B \subseteq A$ така, що $|B| = \aleph$ і $\bigcap_{\alpha\in B} U_\alpha \neq \emptyset$.

Твердження 3.2. *Нехай берівський простір X такий, що кожний регулярний незлічений кардинал є калібром простору X. Тоді $\operatorname{int}(\bigcup_{\xi<\alpha} A_\xi) \subseteq \overline{\bigcup_{\xi<\alpha}\operatorname{int}(A_\xi)}$ для довільної зростаючої послідовності $(A_\xi : \xi < \alpha)$ замкнених в X множин A_ξ, зокрема, X сильно берівський.*

Доведення. Нехай $(A_\xi : \xi < \alpha)$ — довільна зростаюча послідовність замкнених в X множин A_ξ. Якщо α не є граничним ординалом, тобто $\alpha = \beta + 1$, то

$$\operatorname{int}(\bigcup_{\xi<\alpha} A_\xi) = \operatorname{int}(A_\beta) \subseteq \overline{\bigcup_{\xi<\alpha}\operatorname{int}(A_\xi)}.$$

Нехай α — граничний ординал. Згідно з [10, теорема 10, с.282] ординал α конфінальний деякому початковому ординалу ω, який найменший з усіх порядкових чисел, конфінальних α. Звідси випливає, що кардинал $\aleph = |\omega|$ — регулярний.

Виберемо строго зростаючу послідовність $(\xi_\gamma : \gamma < \omega$ ординалів ξ_γ таку, що $\sup\limits_{\gamma<\omega} \xi_\gamma = \alpha$. Для кожного $\gamma < \omega$ покладемо $F_\gamma = A_{\xi_\gamma}$. Оскільки послідовність $(A_\xi : \xi < \alpha)$ зростаюча, то послідовність $(F_\gamma : \gamma < \omega)$ також зростаюча, $\bigcup_{\xi<\alpha} A_\xi = \bigcup_{\gamma<\omega} F_\gamma$ і $\bigcup_{\xi<\alpha}\operatorname{int}(A_\xi) = \bigcup_{\gamma<\omega}\operatorname{int}(F_\gamma)$.

Якщо $\omega = \omega_0$, то з беровості простору X випливає, що $\operatorname{int}(\bigcup_{\gamma<\omega_0} F_\gamma) \subseteq \overline{\bigcup_{\gamma<\omega_0}\operatorname{int}(F_\gamma)}$, тобто $\operatorname{int}(\bigcup_{\xi<\alpha} A_\xi) \subseteq \overline{\bigcup_{\xi<\alpha}\operatorname{int}(A_\xi)}$.

Нехай ω незлічений ординал. Припустимо, що $U = \bigcup_{\gamma<\omega}\operatorname{int}(F_\gamma) \not\subseteq \overline{\bigcup_{\gamma<\omega}\operatorname{int}(F_\gamma)}$. Тоді $U \not\subseteq F_\gamma$, тобто $U_\gamma = U \setminus F_\gamma \neq \emptyset$ для кожного $\gamma < \omega$. Оскільки $\aleph$ є калібром простору X, то для сім'ї $(U_\gamma : \gamma < \omega)$ існує точка $x_0 \in X$ така, що множина $\Gamma = \{\gamma < \omega : x_0 \in U_\gamma\}$ має потужність $\aleph$. Оскільки ω початковий ординал потужності $\aleph$, то $\sup\Gamma = \omega$. Зауважимо, що $(U_\gamma : \gamma < \omega)$ спадна послідовність, тому $\bigcap_{\gamma<\omega} U_\gamma = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma \ni x_0$. Отже, $\bigcap_{\gamma<\omega} U_\gamma \neq \emptyset$, тобто $U \not\subseteq \bigcup_{\gamma<\omega} F_\gamma$, зокрема, $x_0 \in U$ і $x_0 \notin \bigcup_{\gamma<\omega} F_\gamma$. А це суперечить тому, що $U = \operatorname{int}(\bigcup_{\gamma<\omega} F_\gamma)$. □

Легко бачити, що для довільного сепарабельного простору X кожний нескінченний регулярний кардинал є калібром простору X. Крім того, згідно з [11, теорема 0.3.13, с. 16] калібр зберігається довільними добутками. Таким чином, має місце наступний результат.

Твердження 3.3. *Нехай топологічний добуток $X = \prod_{t\in T} X_t$ — берівський простір, причому всі простори X сепарабельні. Тоді X сильно берівський.*

Далі нам буде корисним наступне допоміжне твердження (див. [12, с.185]), яке часто використовується при дослідженні топологічних властивостей добутків.

Лема 3.4. (Шанін) *Нехай $\aleph$ — незлічений регулярний кардинал, $(T_\gamma : \gamma \in \Gamma)$ — довільна сім'я скінченних множин T_γ, причому $|\Gamma| = \aleph$. Тоді існує множина $\Delta \subseteq \Gamma$ і скінченна множина $S \subseteq \bigcup_{\gamma\in\Gamma} T_\gamma$ такі, що $|\Delta| = \aleph$ і $T_\beta \cap T_\gamma = S$ для довільних різних $\beta, \gamma \in \Delta$.*

Твердження 3.5. *Нехай $(X_t : t \in T)$ — сім'я сепарабельних метричних просторів $(X_t, |\cdot - \cdot|_t)$, $X \subseteq \prod_{t\in T} X_t$ — берівський простір, щільний в просторі $Y = \prod_{t\in T} X_t$ з топологією рівномірної збіжності на T. Тоді X сильно берівський простір.*

Доведення. Нехай $\aleph$ — незліченний регулярний кардинал, $(V_\gamma : \gamma \in \Gamma)$ — довільна сім'я непорожніх відкритих в X базисних множин V_γ, причому $|\Gamma| = \aleph$ і $(U_\gamma : \gamma \in \Gamma)$ — така сім'я непорожніх відкритих в $\prod_{t\in T} X_t$ базисних множин $U_\gamma = \prod_{t\in T} U_\gamma^{(t)}$, що $V_\gamma = U_\gamma \bigcap \prod_{t\in T} X_t$ для кожного $\gamma \in \Gamma$. Покладемо $T_\gamma = \{t \in T : U_\gamma^{(t)} \neq X_t\}$ для кожного $\gamma \in \Gamma$. Врахувавши регулярність кардинала $\aleph$ і лему 3.4, ми можемо вважати, що всі скінченні множини T_γ мають однакову потужність і $T_\gamma \cap T_\beta = S$ для довільних різних $\gamma, \beta \in \Gamma$ і деякої скінченної множини $S \subseteq T$. Для кожного $\gamma \in \Gamma$ виберемо точки $x_\gamma^{(t)} \in X_t$ при $t \in T_\gamma$ і число $\delta_\gamma > 0$ такі, що $\{x_t \in X_t : |x_t - x_\gamma^{(t)}|_t < \delta_\gamma\} \subseteq U_\gamma^{(t)}$. Оскільки $\aleph$ незліченний регулярний кардинал, то існують $n \in \mathbb{N}$ і $\Gamma' \subseteq \Gamma$ такі, що $|\Gamma'| = \aleph$ і $\delta_\gamma \geq \frac{2}{n}$ для кожного $\gamma \in \Gamma'$. В сепарабельному метричному просторі $\tilde{X} = \prod_{s\in S} X_s$ знайдемо точку $\tilde{x} \in \tilde{X}$ таку, що $|\tilde{x}(s) - x_\gamma^{(s)}|_s < \frac{1}{n}$ для довільного $s \in S$ і $\gamma \in \Gamma''$, де $\Gamma'' \subseteq \Gamma'$ — деяка множина з $|\Gamma''| = \aleph$.

Покладемо $T' = \bigcup_{\gamma\in\Gamma''} S_\gamma$, де $S_\gamma = T_\gamma \setminus S$. Зауважимо, що $T' = \emptyset$ або $|T'| = \aleph$. Якщо $T' = \emptyset$, тобто $T_\gamma = S$ для кожного $\gamma \in \Gamma''$, то виберемо довільну точку $y_0 \in Y$ таку, що $y_0(s) = \tilde{x}(s)$ для кожного $s \in S$. Оскільки множина X щільна в просторі Y, то існує точка $x_0 \in X$ така, що $|x_0(t) - y_0(t)|_t < \frac{1}{n}$ для кожного $t \in T$. Тоді для довільних $\gamma \in \Gamma''$ і $t \in T_\gamma$ маємо

$$|x_0(t) - x_\gamma^{(t)}|_t \leq |x_0(t) - y_0(t)|_t + |y_0(t) - x_\gamma^{(t)}|_t =$$

$$= |x_0(t) - y_0(t)|_t + |\tilde{x}(t) - x_\gamma^{(t)}|_t < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \leq \delta_\gamma.$$

Отже, $x_0(t) \in U_\gamma^{(t)}$ для довільних $\gamma \in \Gamma''$ і $t \in T_\gamma$, тобто $x_0 \in V_\gamma$ для кожного $\gamma \in \Gamma''$.

Нехай $|T'| = \aleph$. Виберемо точку $y_0 \in Y$ таку, що $y_0(s) = \tilde{x}(s)$ для кожного $s \in S$ і $y_0(s) = x_\gamma^{(s)}$ для довільних $\gamma \in \Gamma''$ і $s \in S_\gamma$. Тоді, аналогічно, як в попередньому випадку, для деякої точки $x_0 \in X$ такої, що $|x_0(t) - y_0(t)|_t < \frac{1}{n}$ для кожного $t \in T$, маємо $x_0 \in V_\gamma$ для кожного $\gamma \in \Gamma''$.

Отже, кожний незліченний регулярний кардинал $\aleph$ є калібром берівського простору X і згідно з твердженням 3.2 X сильно берівський. □

Наслідок 3.6. *Довільний берівський простір $X \subseteq [0,1]^T$, щільний в просторі $Y = [0,1]^T$ з топологією рівномірної збіжності на T, є сильно берівським.*

Твердження 3.7. *Нехай X — сильно берівський простір, Y — топологічний простір, $f\colon X \to Y$ — неперервне сюр'єктивне відображення таке, що для довільної ніде не щільної в Y множини B множина $f^{-1}(B)$ ніде не щільна в X. Тоді Y також сильно берівський простір.*

Доведення. Нехай α — довільний граничний ординал, $(A_\xi : \xi < \alpha)$ і $(B_\xi : \xi < \alpha)$ — зростаючі послідовності замкнених в Y множин A_ξ і B_ξ такі, що $(B_\xi : \xi < \alpha)$ охоплює $(A_\xi : \xi < \alpha)$. Покажемо, що

$$\operatorname{int}\left(\bigcup_{\xi<\alpha} A_\xi\right) \subseteq \overline{\bigcup_{\xi<\alpha} \operatorname{int}(B_\xi)}.$$

Візьмемо довільну точку $y_0 \in \operatorname{int}(\bigcup_{\xi<\alpha} A_\xi)$ і довільний замкнений в Y окіл V точки y_0. Для кожного $\xi < \alpha$ покладемо $\tilde{A}_\xi = f^{-1}(A_\xi \cap V)$, $\tilde{B}_\xi = f^{-1}(B_\xi \cap V)$. Зрозуміло, що

$\tilde{A}_\xi$ і $\tilde{B}_\xi$ замкнені в X множини, причому $\tilde{A}_\xi \subseteq \tilde{B}_\xi$ для кожного $\xi < \alpha$. Крім того, для довільного граничного ординала $\beta < \alpha$ маємо

$$\tilde{A}_\beta = f^{-1}(A_\beta \cap V) \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{\xi<\beta}(B_\xi \cap V)\right) = \bigcup_{\xi<\beta} f^{-1}(B_\xi \cap V) = \bigcup_{\xi<\beta} \tilde{B}_\xi.$$

Отже, послідовність $(\tilde{B}_\xi : \xi < \alpha)$ охоплює послідовність $(\tilde{A}_\xi : \xi < \alpha)$. Оскільки відображення f неперервне і множина $\bigcup_{\xi<\alpha}(A_\xi \cap V)$ є околом точки y_0, то множина $f^{-1}(\bigcup_{\xi<\alpha}(A_\xi \cap V)) = \bigcup_{\xi<\alpha} \tilde{A}_\xi$ є околом кожної точки $x \in f^{-1}(y_0)$, зокрема, $\mathrm{int}(\bigcup_{\xi<\alpha} \tilde{A}_\xi) \neq \emptyset$. Врахувавши, що X сильно берівський, одержимо, що $\bigcup_{\xi<\alpha} \mathrm{int}(\tilde{B}_\xi) \neq \emptyset$, тобто існує $\gamma < \alpha$ таке, що $\mathrm{int}(\tilde{B}_\gamma) \neq \emptyset$. Множина $\tilde{B}_\gamma$ не є ніде не щільною в X, тому з умови твердження випливає , що множина $B_\gamma \cap V$ не є ніде не щільною в Y. Оскільки $B_\gamma \cap V$ замкнена множина, то $\mathrm{int}(B_\gamma \cap V) \neq \emptyset$. Отже, $\mathrm{int}(B_\gamma) \cap V \neq \emptyset$ і $y_0 \in \overline{\bigcup_{\xi<\alpha} \mathrm{int}(B_\xi)}$. □

4. Метризовні компакти в просторі неперервних функцій. В даному пункті ми дослідимо достатні умови на топологічний простір X, які забезпечують метризовність кожного компакту $Y \subseteq C_p(X)$.

Нагадаємо, що топологічний простір X має властивість зліченності ланцюжків, якщо довільна диз'юнктна система відкритих в X непорожніх множин не більш, ніж зліченна.

Теорема 4.1. *Нехай X — сильно берівський простір з умовою зліченності ланцюжків, зокрема, берівський простір, для якого кожний регулярний незліченний кардинал є калібром. Тоді довільний компакт $Y \subseteq C_p(X)$ метризовний.*

Доведення. Зауважимо спочатку, що для цілком регулярного простору X це випливає з теореми 2.3 і [13, теорема 2 і твердження 5].

У загальному випадку для наміокового простору X з умовою зліченності ланцюжків і компакту $Y \subseteq C_p(X)$, використовуючи теорему 2.2, легко побудувати не більш, ніж зліченну множину $A \subseteq X$ таку, що $y'|_A \neq y''|_A$ для довільних різних $y', y'' \in Y$. Звідси випливає метризовність простору Y. □

З іншого боку, має місце наступний результат, який є аналогом теореми 3.1 з [14], де встановлено аналогічний зв'язок між вагою компактного простору X і калібром простору $C_p(X)$.

Теорема 4.2. *Нехай X — топологічний простір, $Y \subseteq C_p(X)$ — неметризовний компакт і $\aleph = \mathrm{cof}(w(Y)) > \aleph_0$. Тоді $\aleph$ не є калібром простору X.*

Доведення. Нехай T — деяка множина з $|T| = w(Y)$, $Z \subseteq \mathbb{R}^T$ — такий компакт, що існує гомеоморфізм $\varphi\colon Z \to Y$.

Розглянемо нарізно неперервну функцію $f\colon X \times Z \to \mathbb{R}$, $f(x,z) = \varphi(z)(x)$. Нехай ω — перший ординал потужності $\aleph$ і $(T_\alpha : \alpha < \omega)$ — така зростаюча послідовність множин $T_\alpha \subseteq T$, що $\bigcup_{\alpha<\omega} T_\alpha = T$ і $|T_\alpha| < |T|$ для кожного $\alpha < \omega$. Для кожного $\alpha < \omega$ покладемо $A_\alpha = \{x \in X : f(x,z') = f(x,z'')$ для довільних $z', z'' \in Z$ з $z'|_{T_\alpha} = z''|_{T_\alpha}\}$. З неперервності f відносно x випливає, що всі множини A_α замкнені в X. Оскільки f неперервна відносно другої змінної, то для кожного $x \in X$ існує не більш, ніж зліченна множина $S \subseteq T$ така, що $f(x,z') = f(x,z'')$ для довільних $z', z'' \in Z$ з $z'|_S = z''|_S$. Тому $X = \bigcup_{\alpha<\omega} A_\alpha$, тобто $\bigcap_{\alpha<\omega} U_\alpha = \emptyset$, де $U_\alpha = X \setminus A_\alpha$. Врахувавши, що послідовність $(U_\alpha : \alpha < \omega)$ спадна і ω — початковий ординал потужності $\aleph$, одержимо, що $\bigcap_{\alpha\in I} U_\alpha = \emptyset$ для довільної множини ординалів $I \subseteq [0,\omega)$ з $|I| = \aleph$. Отже, $\aleph$ не є калібром простору X. □

Природно виникає наступне запитання, яке є певним аналогом запитання 3.6 з [14].

Запитання 4.3. Нехай X — топологічний простір, для якого кожний незліченний регулярний кардинал є калібром. Чи обов'язково кожний компактний простір $Y \subseteq C_p(X)$ метризовний?

Зауважимо, що аналогічно до [14, теорема 3.7] з теореми 4.2 можна вивести, що відповідь на дане питання позитивна при умові $\aleph_2 = 2^{\aleph_1}$.

Твердження 4.4. *Нехай Y — такий компактний простір, що для довільної множини $B \subseteq Y$ з $|B| \leq \aleph_1$ компактна множина $\overline{B}$ метризовна. Тоді Y метризовний.*

Доведення. Досить довести, що Y — сепарабельний. Припустимо, що Y не є сепарабельним. Тоді легко побудувати послідовність $(y_\xi : \xi < \aleph_1)$ точок $y_\xi \in Y$ таку, що $y_\alpha \notin \overline{\{y_\xi : \xi < \alpha\}}$ для кожного $\alpha < \aleph_1$. Оскільки простір $Z = \overline{\{y_\xi : \xi < \aleph_1\}}$ метризовний, то з щільної в Z множини $\{y_\xi : \xi < \aleph_1\}$ можна виділити не більш, ніж зліченну, щільну підмножину. А це суперечить вибору точок y_ξ. □

Теорема 4.5. *Нехай $\aleph_i$ — перший незліченний кардинал з $\operatorname{cof}(\aleph_i) = \aleph_0$. Припустимо, що $\aleph_i > 2^{\aleph_1}$. Тоді для довільного топологічного простору X, для якого кожний регулярний кардинал $\aleph \in [\aleph_1, 2^{\aleph_1}]$ є його калібром, довільний компакт $Y \subseteq C_p(X)$ метризовний.*

Доведення. Для довільного компактного простору $Y \subseteq C_p(X)$ з $d(Y) \leq \aleph_1$ маємо $w(Y) \leq 2^{\aleph_1}$. З теореми 4.2 і припущення $\aleph_i > 2^{\aleph_1}$ випливає, що $w(Y) = \aleph_0$, тобто Y метризовний. Залишилось використати твердження 4.4. □

Схожими міркуваннями доводиться наступний результат.

Теорема 4.6. *Нехай $\aleph_i$ — перший незліченний кардинал з $\operatorname{cof}(\aleph_i) = \aleph_0$ і X — такий топологічний простір, що $d(X) < \aleph_i$ і кожний регулярний кардинал $\aleph$ є калібром простору X. Тоді довільний компакт $Y \subseteq C_p(X)$ метризовний.*

Доведення. Зауважимо, що для довільного компактного простору $Y \subseteq C_p(X)$ і довільної щільної в X множини A відображення $\varphi\colon Y \to C_p(A)$, $\varphi(y) = y|_A$, є гомеоморфним вкладенням. Тому $w(Y) \leq d(X) < \aleph_i$ і згідно з теоремою 4.2 Y метризовний. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Baire R. *Sur les fonctions de variable reelles* // An. Mat. Pura Appl., ser. 3. – P. 1–123.
2. Namioka I. *Separate contimuity and joint continuity* // Pacif. J. Math. – 1974. – 51, №2. – P. 515–531.
3. Saint-Raymond J. *Jeux topologiques et espaces de Namioka* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1983. – **87**, №3. – P.409-504.
4. Christesen J.P.R. *Joint continuity of separately continuous functions* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1981. – **82**, №3. – P. 455–461.
5. Talagrand M. *Espaces de Baire et espaces de Namioka* // Ann. of. Math. – 1985. – **270**, №2. – P. 159–164.

6. Debs G. *Points de continuite d'une function separement continue* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1986. – **97**, №1. – P. 167–176.

7. Маслюченко О.В. Коливання нарізно неперервних функцій і топологічні ігри, Дис. ... канд. фіз.-мат. наук., Чернівецький Національний університет, 2002.

8. Рыбаков В.И. *Ещё один класс пространств Намиоки* // Мат. заметки. – 2003. – Т.73, №2. – С. 263–268.

9. Mykhaylyuk V.V. *Namioka spaces and topological games* (to appear).

10. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. – М.: Мир, 1970. – 416 с.

11. Архангельский А.В. Топологические пространства функций. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1989. – 222 с.

12. Энгелькинг Р. Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 751 с.

13. Vera G. *Baire measurability of separately continuous functions* // Quart. J. Math. Oxford. – 1988. – **39**, №153. – P. 109–116.

14. Arhangel'skii A.V., Tkachuk V.V. *Calibers and point-finite cellularity of the space $C_p(X)$ and some questions of S.Gul'ko and M.Husek* // Topology Appl. – 1986. – №1. – P.65-73.

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича
mathan@chnu.cv.ua

Надійшло 18.11.2005