УДК 517.95

М. М. Бокало, І. Б. Паучок

ПРО КОРЕКТНІСТЬ ЗАДАЧІ ФУР'Є ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ ЗІ ЗМІННИМИ ПОКАЗНИКАМИ НЕЛІНІЙНОСТІ

M. M. Bokalo, I. B. Pauchok. *On the well-posedness of a Fourier problem for nonlinear parabolic equations of higher order with variable exponents of nonlinearity*, Matematychni Studii, **26** (2006) 25–48.

The well-posedness of a Fourier problem for one class of nonlinear parabolic equations of higher order in unbounded domains with respect to space variables, has been investigated. The exponents of nonlinearity are variable and the solutions are taken from the corresponding generalized Lebesgue spaces. In the definition of well-posedness classes of the problem no conditions are imposed on the behaviour of its elements at infinity with respect to both time and space variables.

М. М. Бокало, И. Б. Паучок. *О корректности задачи Фурье для нелинейных параболических уравнений высших порядков с переменными показателями нелинейности* // Математичні Студії. – 2006. – Т.26, №1. – С.25–48.

Для одного класса нелинейных параболических уравнений высших порядков, заданных в неограниченных по пространственным переменным областях, исследована корректность задачи Фурье. Показатели нелинейности уравнений — переменные и решения выбираются из соответствующих обобщенных пространств Лебега. В определении классов корректности отсутствуют условия на поведение их элементов на бесконечности как по временной, так и по пространственным переменным.

Вступ. У випадку, коли параболічні рівняння задані в необмежених областях, виникає ([1]) нова, порівняно з випадком обмежених областей ([2,3]), *проблема*: з'ясування умов на поведінку розв'язку та зростання вихідних даних на нескінченності, які забезпечують однозначну розв'язність відповідних крайових задач. Уже для найпростішого з параболічних рівнянь — рівняння теплопровідності для єдиності розв'язку задачі Коші необхідно накласти певні умови на поведінку розв'язку, а для існування — обмеження на зростання вільного члена на нескінченності ([1]). Але, існують нелінійні параболічні рівняння, для яких таких умов не потрібно ([4–12]). Тут ми розглядатимемо саме таку ситуацію.

У 1984 році перший з авторів довів ([4]), що розв'язок задачі Фур'є (задачі без початкових умов) для рівнянь типу нестаціонарної фільтрації, модельним прикладом яких є рівняння

$$u_t - \triangle(|u|^{p-2}u) = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (-\infty, T), \quad p > 2,$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 35D05, 35G30, 35K35, 35K55, 35K60.

($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область), єдиний без будь-яких обмежень на його поведінку при $t \to -\infty$. У цьому ж році з'явилась стаття Х. Брезіса [5], основним результатом якої є такий факт: *задача Коші для рівняння*

$$u_t - \triangle u + |u|^{p-2}u = f(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T),$$

коли $p > 2$, *має єдиний розв'язок, незважаючи на поведінку* f *та* u *при* $|x| \to +\infty$. Пізніше Ф.Берніс ([7]) довів подібне твердження стосовно рівняння

$$u_t + (-\triangle)^m u + |u|^{p-2}u = f(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T), \tag{1}$$

де $m, n \in \mathbb{N}$, а $p > 2$, якщо $n \le 2m$, і $2 < p \le \frac{2n}{n-2m}$, якщо $n > 2m$. У статті [9] цей результат перенесено на задачу Фур'є для рівнянь типу (1) в області $Q = \Omega \times (-\infty, T)$, коли Ω — необмежена область і задані крайові умови типу Діріхле. У даній роботі подібний результат отримано для загальніших рівнянь і неоднорідних граничних умов.

1. Основні позначення. Введемо потрібні нам позначення і поняття. Нехай n, m — натуральні числа. Через $\mathbb{Z}_+^n$ позначатимемо множину мультиіндексів розмірності n, тобто множину, елементами якої є $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, де α_i — ціле невід'ємне число, $i \in \{1, \dots, n\}$. Покладемо $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ для $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ ($|\alpha|$ називається довжиною мультиіндексу α).

Нехай $\mathbb{L}$ — підмножина множини натуральних чисел $\mathbb{N}$. Кажуть, що на множині $\{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n : |\alpha| \in \mathbb{L}\}$ введено лексикографічний порядок, якщо вважається, що $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ передує $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, де α, β — елементи заданої множини, коли або $|\alpha| < |\beta|$, або $|\alpha| = |\beta|$ і $\alpha_k > \beta_k$, де $k = \min\{j : \alpha_j \ne \beta_j\}$.

Всі функції, які тут розглядатимуться, є дійснозначними. Якщо $v(z)$, $z \in \widetilde{D}$, — деяка функція, то під $v|_D$ розумітимемо її звуження на множину $D \subset \widetilde{D}$.

Через $\mathbb{R}^n$ позначатимемо n- вимірний евклідів простір, тобто лінійний простір, складений з елементів вигляду $x = (x_1, \dots, x_n)$, де $x_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, з нормою $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$.

Нехай Ω — необмежена область у просторі $\mathbb{R}^n$ з кусково-гладкою межею $\Gamma \overset{\text{def}}{=} \partial\Omega$. Не зменшуючи загальності, припустимо, що $0 \in \Omega$. Для довільного $R > 0$ позначимо через Ω_R зв'язну компоненту множини $\Omega \cap \{x : |x| < R\}$ таку, що $0 \in \Omega_R$, а $\Gamma_R \overset{\text{def}}{=} \partial\Omega_R \cap \Gamma$.

Покладемо $L_{q,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) = \{v(x),\, x \in \Omega : v|_{\Omega_R} \in L_q(\Omega_R)\ \forall\, R > 0\}$, де $q \in [1, \infty]$. На просторі $L_{q,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ вводиться стандартна лінійна структура і сім'я півнорм за правилом: $\|\cdot\|_{L_q(\Omega_R)}$, $R > 0$, з якою він стає локально опуклим простором, якщо ототожнити функції, які однакові майже скрізь. Отож, збіжність послідовності елементів простору $L_{q,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ означає, що для кожного $R > 0$ послідовність звужень на Ω_R членів заданої послідовності є збіжною в $L_q(\Omega_R)$.

Для кожного $R > 0$ визначимо простір $H^m(\Omega_R)$ як замикання простору $C^m(\overline{\Omega}_R)$ (m раз неперервно диференційовних в Ω_R функцій, які разом з похідними до порядку m включно допускають неперервне продовження на $\overline{\Omega}_R$) за нормою $\|v\|_{H^m(\Omega_R)} \overset{\text{def}}{=} \left(\int_{\Omega_R} \sum_{|\alpha| \le m} \big| D^\alpha v(x) \big|^2 \, dx \right)^{1/2}$, де $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$.

Замикання простору $C_0^m(\Omega_R)$ (який складається з функцій простору $C^m(\overline{\Omega}_R)$, носії яких лежать в Ω_R) за нормою $H^m(\Omega_R)$ позначимо через $\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega_R)$.

На просторі $C^m(\overline{\Omega})$ введемо топологію лінійного опуклого простору за допомогою системи півнорм: $\|\cdot\|_{H^m(\Omega_R)}$, $R>0$. Замикання простору $C^m(\overline{\Omega})$ за введеною топологією (як підпростору простору $L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$) позначимо через $H^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$. Очевидно, що послідовність $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ елементів цього простору є збіжною до $v\in H^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ в цьому просторі, якщо $\|v_k-v\|_{H^m(\Omega_R)}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0$ для кожного $R>0$. Зауважимо, що $v\big|_{\Omega_R}\in H^m(\Omega_R)$ для будь-якого $R>0$, якщо $v\in H^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$.

Нехай $C^m_c(\overline{\Omega})$ — підпростір простору $C^m(\overline{\Omega})$, який складається з функцій, носії яких є компактами в $\overline{\Omega}$, а $C^m_0(\Omega)$ — підпростір простору $C^m_c(\overline{\Omega})$, елементами якого є фінітні функції, тобто функції, носії яких є компактами в Ω. Очевидно, що простір $C^m_c(\overline{\Omega})$ є щільним в $H^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$. Позначимо через $\overset{\circ}{H}{}^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ замикання простору $C^m_0(\Omega)$ за топологією простору $H^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$. Простір, який складається із звужень елементів простору $\overset{\circ}{H}{}^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ на Ω_R, позначатимемо через $H^m_{\Gamma_R}(\Omega_R)$, $R>0$.

Нехай $T\in\mathbb{R}$. Покладемо $Q\overset{\mathrm{def}}{=}\Omega\times(-\infty,T)$, $\Sigma\overset{\mathrm{def}}{=}\Gamma\times(-\infty,T)$, $Q_R\overset{\mathrm{def}}{=}\Omega_R\times(T-R,T)$, $\Sigma_R\overset{\mathrm{def}}{=}\Gamma_R\times(T-R,T)$,$R>0$. Введемо простори

$$H^{m,0}(Q_R)=L_2\big(T-R,T;H^m(\Omega_R)\big),\qquad \overset{\circ}{H}{}^{m,0}(Q_R)=L_2\big(T-R,T;\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega_R)\big),$$
$$H^{m,0}_{\Sigma_R}(Q_R)=L_2\big(T-R,T;H^m_{\Gamma_R}(\Omega_R)\big),\quad R>0;$$
$$L_{q,\mathrm{loc}}(\overline{Q})=\big\{v(x,t),(x,t)\in Q: v|_{Q_R}\in L_q(Q_R)\quad\forall R>0\big\},\quad q\in[1,+\infty],$$
$$H^{m,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})=\big\{v(\cdot,t)\in H^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\text{ для м.в. } t\in(-\infty,T):\ D^\alpha v\in L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{Q}),\quad|\alpha|\le m\big\}\equiv$$
$$\equiv L_{2,\mathrm{loc}}\Big((-\infty,T];H^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\Big),$$
$$\overset{\circ}{H}{}^{m,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})=\big\{v\in H^{m,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}):v(\cdot,t)\in\overset{\circ}{H}{}^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\text{для м.в. } t\in(-\infty,T)\big\}\equiv$$
$$\equiv L_{2,\mathrm{loc}}\Big((-\infty,T];\overset{\circ}{H}{}^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\Big),\qquad H^{m,1}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})=\big\{v\in H^{m,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}):v_t\in L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{Q})\big\},$$
$$\overset{\circ}{H}{}^{m,1}_{\mathrm{c}}(Q)=\big\{v\in\overset{\circ}{H}{}^{m,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})\cap H^{m,1}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}):v(\,\cdot\,,T)=0,\quad\operatorname{supp}v-\ \text{ компакт в }\ \overline{Q}\big\}.$$

У просторах $L_{q,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $H^{m,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $\overset{\circ}{H}{}^{m,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ і $H^{m,1}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ визначається структура локально опуклого простору, а отже, збіжність послідовностей, так само як в $L_{q,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$(чи $H^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$). Покладемо $C\big((-\infty,T];L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\big)\overset{\mathrm{def}}{=}\Big\{v(x,t),(x,t)\in Q:(t\to v(\,\cdot\,,t)|_{\Omega_R})\in C((-\infty,T];L_2(\Omega_R))\ \forall R>0\Big\}$. Скажемо, що послідовність $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ збіжна до v в $C\big((-\infty,T];L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\big)$, якщо для кожного $R>0$ послідовність $\{v_k|_{Q_R}\}$ збіжна до $\{v|_{Q_R}\}$ в $C\big([T-R,T];L_2(\Omega_R)\big)$.

Нехай $p\in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\Omega)$, причому $p(x)\ge1$ для майже всіх $x\in\Omega$. На просторі $C(\overline{Q}_R)$, де $R>0$ — довільне число, введемо норму $\|v\|_{L_{p(\,\cdot\,)}(Q_R)}\overset{\mathrm{def}}{=}\inf\{\lambda>0:\rho_{p,R}(v/\lambda)\le1\}$, де $\rho_{p,R}(v)\overset{\mathrm{def}}{=}\iint\limits_{Q_R}|v(x,t)|^{p(x)}\,dx\,dt$. Поповнення лінійного простору $C(\overline{Q}_R)$ за цією нормою позначимо через $L_{p(\,\cdot\,)}(Q_R)$. Цей простір називається узагальненим простором Лебега і є лінійним підпростором простору $L_1(Q_R)$ (див.[14]). Позначимо через $L_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ замикання простору $C(\overline{\Omega})$ (неперервних на $\overline{\Omega}$ функцій) за топологією, породженою системою півнорм: $\|\cdot\|_{L_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_R)}$, $R>0$. Нехай $L_{p(\,\cdot\,)}(Q)=\big\{v\in L_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{Q}):\sup_{R>0}\|v\|_{L_{p(\,\cdot\,)}(Q_R)}<\infty\big\}$.

2. Формулювання задачі і основних результатів. Нехай M — підмножина множини $\{0,1,\dots,m\}$ така, що $\{0,m\}\subset M$, а $M_0\overset{\mathrm{def}}{=}M\backslash\{0\}$. Позначимо через N_M — кількість мультиіндексів $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, довжини яких $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ є елементами множини M, а через $\mathbb{R}^{N_M}$ — множину векторів $\xi = (\xi_{\overline{0}}, \ldots, \xi_\alpha, \ldots)$ вимірності N_M, компоненти яких пронумеровані мультиіндексами вимірності n, які мають довжини з M і впорядковані лексикографічно. Тут і далі $\overline{0}$ — мультиіндекс $\big($з $\mathbb{Z}^n_+\big)$, складений з нулів. Покладемо $|\xi| = \Big(\sum_{|\alpha|\in M} |\xi_\alpha|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$, $\xi \in \mathbb{R}^{N_M}$.

Позначимо через $\mathbb{P}$ множину функцій $\big\{p \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) : \operatorname{ess\,inf}\limits_{x\in\Omega} p(x) > 1\big\}$. Для $p \in \mathbb{P}$ через p^* позначатимемо функцію з $L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ таку, що $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p^*(x)} = 1$ майже скрізь (м.с.) в Ω. Легко бачити, що коли $p \in \mathbb{P}$, то $p^* \in \mathbb{P}$.

Нехай $p \in \mathbb{P}$. Під $\mathbb{A}_p$ розумітимемо множину, елементами якої є впорядковані набори $(a_{\overline{0}}, \ldots, a_\alpha, \ldots) \equiv (a_\alpha)$ з N_M визначених на $Q \times \mathbb{R}^{N_M}$ дійснозначних функцій, які пронумеровані мультиіндексами з $\mathbb{Z}^n_+$, що мають довжини з M та впорядковані лексикографічно, і функції з будь-якого такого набору (a_α) задовольняють умови:

1) для кожного α ($|\alpha| \in M$) функція $a_\alpha(x,t,\xi)$, $(x,t,\xi) \in Q \times \mathbb{R}^N$, є каратеодорівською, тобто для майже всіх $(x,t) \in Q$ функція $a_\alpha(x,t,\,\cdot\,) : \mathbb{R}^{N_M} \to \mathbb{R}$ є неперервною і для всіх $\xi \in \mathbb{R}^{N_M}$ функція $a_\alpha(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\xi) : Q \to \mathbb{R}$ є вимірною за Лебегом;

2) для майже всіх $(x,t) \in Q$ та будь-яких $\xi \in \mathbb{R}^{N_M}$ виконуються нерівності

$$|a_{\overline{0}}(x,t,\xi)| \le h_{\overline{0}}(x,t)\left(|\xi|^{2/p^*(x)} + |\xi_{\overline{0}}|^{p(x)-1}\right) + g_{\overline{0}}(x,t),$$

$$|a_\alpha(x,t,\xi)| \le h_\alpha(x,t)|\xi| + g_\alpha(x,t), \quad |\alpha| \in M_0,$$

де $h_\alpha \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$,$|\alpha| \in M$, $g_{\overline{0}} \in L_{p^*(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $g_\alpha \in L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $|\alpha| \in M_0$.

Нехай $\mathbb{F}_p$ — множина, елементами якої є впорядковані набори $(f_{\overline{0}}, \ldots, f_\alpha, \ldots) \equiv (f_\alpha)$ з N_M визначених на Q дійснозначних функцій, які пронумеровані так само, як елементи множини $\mathbb{A}_p$, і функції з будь-якого такого набору задовольняють умову:

3) $f_{\overline{0}} \in L_{p^*(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $f_\alpha \in L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $\quad |\alpha| \in M_0$.

На просторі $\mathbb{F}_p$ визначається топологія декартового добутку $L_{p^*(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \times L_{2,\,\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \times \cdots \times L_{2,\,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ відповідних топологічних просторів.

На просторі $H^{m,1}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap L_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ введемо таке відношення еквівалентності: функція f вважається еквівалентною з функцією g, якщо f і g мають однакові м.с. (в сенсі $n-1$ вимірної міри) сліди на Σ, тобто $f - g \in \overset{\circ}{H}{}^{m,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$. Відповідний лінійний фактор-простір позначимо через $\mathbb{V}_p$ і введемо на ньому топологію за допомогою системи півнорм: $\|\Phi\|_R \overset{\mathrm{def}}{=} \inf\limits_{\varphi\in\Phi}\big(\|\varphi\|_{H^{m,0}(Q_R)\cap L_{p(\,\cdot\,)}(Q_R)} + \|\varphi_t\|_{L_2(Q_R)}\big)$, $R > 0$, для кожного Φ з $\mathbb{V}_p$.

Легко переконатися, що послідовність $\{\Phi_k\}_{k=1}^\infty$ збіжна до Φ в $\mathbb{V}_p$ тоді і лише тоді, коли існує φ і послідовність $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ такі, що $\varphi \in \Phi$, $\varphi_k \in \Phi_k$, $k \in \mathbb{N}$, і $\varphi_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \varphi$ в $H^{m,1}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap L_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$. Під $\overset{\circ}{\mathbb{V}}_p$, де $p \in \mathbb{P}$, розумітимемо підпростір простору $\mathbb{V}_p$, який складається тільки з нульового елемента, яким є простір $H^{m,1}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap L_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap \overset{\circ}{H}{}^{m,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$.

Позначимо $\mathbb{U}_p \overset{\mathrm{def}}{=} H^{m,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap L_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap C\big((-\infty,T]; L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\big)$. Скажемо, що послідовність $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ елементів з $\mathbb{U}_p$ збігається в $\mathbb{U}_p$, якщо для будь-якого $R > 0$ послідовність $\{v_k\big|_{Q_R}\}$ збігається в $H^{m,0}(Q_R) \cap L_{p(\,\cdot\,)}(Q_R) \cap C\big([T-R,T]; L_2(\Omega_R)\big)$.

А тепер сформулюємо задачу, яку ми далі будемо досліджувати. Нехай $\widetilde{\mathbb{P}} \subset \mathbb{P}$ і $\widetilde{\mathbb{A}}_p \subset \mathbb{A}_p$, $\widetilde{\mathbb{F}}_p \subset \mathbb{F}_p$, $\widetilde{\mathbb{V}}_p \subset \mathbb{V}_p$, $\widetilde{\mathbb{U}}_p \subset \mathbb{U}_p$ для кожного $p \in \widetilde{\mathbb{P}}$. Задача, яку назвемо *задачею*

$$\mathbf{FP}\big(\widetilde{\mathbb{A}}_p,\, \widetilde{\mathbb{F}}_p,\, \widetilde{\mathbb{V}}_p,\, \widetilde{\mathbb{U}}_p : p \in \widetilde{\mathbb{P}}\big) \text{ (a } \mathbf{F}\text{ourier } \mathbf{P}\text{roblem)}$$

і будемо її вивчати, така: *для кожних* $p \in \widetilde{\mathbb{P}}$ *і* $(a_\alpha) \in \widetilde{\mathbb{A}}_p$, $(f_\alpha) \in \widetilde{\mathbb{F}}_p$, $\Phi \in \widetilde{\mathbb{V}}_p$ *знайти множину* $\mathbf{SFP}\big((a_\alpha), (f_\alpha), \Phi\big)$ *(a set of* **S***olutions of* **F***ourier* **P***roblem) функцій* $u \in \widetilde{\mathbb{U}}_p$ *таких, що* $u \in \Phi$ *і виконується рівність*

$$\iint\limits_Q \Big\{ -u\,\psi_t + \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,t,\delta_M u)\, D^\alpha \psi \Big\}\, dx\, dt = \iint\limits_Q \sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha D^\alpha \psi\, dx\, dt \tag{2}$$

для будь-яких $\psi \in \overset{\circ}{H}{}^{m,1}_c(Q) \cap L_{p(\,\cdot\,)}(Q)$.

Тут і далі через $\delta_M u$ позначається вектор, компонентами якого є похідні $D^\alpha u$, $|\alpha| \in M$, функції u, які впорядковуються так само, як компоненти векторів $\xi \in \mathbb{R}^{N_M}$.

Скажемо, що задача $\mathbf{FP}\big(\widetilde{\mathbb{A}}_p, \widetilde{\mathbb{F}}_p, \widetilde{\mathbb{V}}_p, \widetilde{\mathbb{U}}_p : p \in \widetilde{\mathbb{P}}\big)$ *є розв'язною* (*однозначною, однозначно розв'язною*), якщо для кожного $p \in \widetilde{\mathbb{P}}$ і будь-яких $(a_\alpha) \in \widetilde{\mathbb{A}}_p$, $(f_\alpha) \in \widetilde{\mathbb{F}}_p$, $\Phi \in \widetilde{\mathbb{V}}_p$ множина $\mathbf{SFP}\big((a_\alpha), (f_\alpha), \Phi\big) \subset \widetilde{\mathbb{U}}_p$ є непорожньою (містить не більше одного елемента, є одноелементною).

Нехай $\widetilde{\mathbb{A}}_p$, $\widetilde{\mathbb{F}}_p$, $\widetilde{\mathbb{V}}_p$, $\widetilde{\mathbb{U}}_p$ — топологічні простори для кожного $p \in \widetilde{\mathbb{P}}$. Скажемо, що задача $\mathbf{FP}\big(\widetilde{\mathbb{A}}_p, \widetilde{\mathbb{F}}_p, \widetilde{\mathbb{V}}_p, \widetilde{\mathbb{U}}_p : p \in \widetilde{\mathbb{P}}\big)$ є *коректною*, якщо вона є однозначно розв'язною і для кожного $p \in \widetilde{\mathbb{P}}$ та будь-яких елементів $(a_\alpha) \in \widetilde{\mathbb{A}}_p$, $(f_\alpha) \in \widetilde{\mathbb{F}}_p$, $\Phi \in \widetilde{\mathbb{V}}_p$ і послідовностей $\{(a_{\alpha,k})\}_{k=1}^\infty \subset \widetilde{\mathbb{A}}_p$, $\{(f_{\alpha,k})\}_{k=1}^\infty \subset \widetilde{\mathbb{F}}_p$, $\{\Phi_k\}_{k=1}^\infty \subset \widetilde{\mathbb{V}}_p$ таких, що $(a_{\alpha,k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} (a_\alpha)$ в $\widetilde{\mathbb{A}}_p$, $(f_{\alpha,k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} (f_\alpha)$ в $\widetilde{\mathbb{F}}_p$, $\Phi_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \Phi$ в $\widetilde{\mathbb{V}}_p$, маємо $u_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u$ в $\widetilde{\mathbb{U}}_p$, де $u_k \in \mathbf{SFP}\big((a_{\alpha,k}), (f_{\alpha,k}), \Phi_k\big)$, $k \in \mathbb{N}$, $u \in \mathbf{SFP}\big((a_\alpha), (f_\alpha), \Phi\big)$.

Очевидно, що задача $\mathbf{FP}\big(\widetilde{\mathbb{A}}_p, \widetilde{\mathbb{F}}_p, \widetilde{\mathbb{V}}_p, \widetilde{\mathbb{U}}_p : p \in \widetilde{\mathbb{P}}\big)$ формально може бути потрактована як задача Фур'є для певного класу $\big(p \in \widetilde{\mathbb{P}}, (a_\alpha) \in \widetilde{\mathbb{A}}_p, (f_\alpha) \in \widetilde{\mathbb{F}}_p, \Phi \in \widetilde{\mathbb{V}}_p\big)$ рівнянь вигляду

$$u_t + \sum_{|\alpha|\in M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(x,t,\delta_M u) = \sum_{|\alpha|\in M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha(x,t), \quad (x,t) \in Q,$$

з крайовими умовами $\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\big|_\Sigma = \widetilde{\varphi}_j$, $j \in \{0, \ldots, m-1\}$, де ν — одиничний вектор зовнішньої нормалі до Σ, $\widetilde{\varphi}_j$ — слід $\frac{\partial^j \varphi}{\partial \nu^j}$ на Σ, $j \in \{0, \ldots, m-1\}$, φ — довільний представник класу Φ.

Уточнимо досліджувану нами проблему стосовно коректності сформульованої задачі. З результатів роботи [9] випливає, що у випадку $M = \{0, m\}$ для будь-якого $p \in \mathbb{P}^0 = \big\{p \in \mathbb{P} : p(x) = p_0$ для майже всіх $(x,t) \in Q$, де $p_0 \in (2; 2(n+1)\backslash n)\big\}$ задача $\mathbf{FP}\big(\mathbb{A}^0_p,\, \mathbb{F}_p,\, \mathbb{V}_p,\, \mathbb{U}_p : p \in \mathbb{P}^0\big)$, де $\mathbb{A}^0_p = \{(a_\alpha) : a_{\overline{0}}(x,t,\xi) = |\xi_{\overline{0}}|^{p_0-2}\xi_{\overline{0}},\ \ a_\alpha(x,t,\xi) = \xi_\alpha$, $|\alpha| = m\}$, — коректна. Тут нас цікавитиме питання, як узагальнити цей результат на випадок довільних $M \subset \mathbb{N}$, тобто вказати множину $\mathbb{P}^*$, $\mathbb{P}^0 \subset \mathbb{P}^* \subset \mathbb{P}$, і топологічні простори $\big\{\widetilde{\mathbb{A}}_p, \widetilde{\mathbb{V}}_p : p \in \mathbb{P}^*\big\}$ такі, що $\mathbb{A}^0_p \subset \widetilde{\mathbb{A}}_p$, і задача $\mathbf{FP}\big(\widetilde{\mathbb{A}}_p, \mathbb{F}_p, \widetilde{\mathbb{V}}_p, \mathbb{U}_p : p \in \mathbb{P}^*\big)$ є однозначно розв'язною або коректною.

Виходячи з аналізу результатів статті [9], можна висловити припущення: *множина* $\mathbb{P}^*$ *складається з елементів* $p \in \mathbb{P}$ *таких, що* $p_0 \overset{def}{=} \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} p(x) > 2$, $\quad p_1 \overset{def}{=} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} p(x) < \infty$.
Для кожного $p \in \mathbb{P}^*$ введемо множину $\mathbb{A}^*_p$ наборів функцій $(a_\alpha) \in \mathbb{A}_p$, які задовольняють такі дві умови:

4) існують сталі $B_1 > 0$ і $B_2 \geq 0$ такі, що для кожного $\alpha, |\alpha| \in M_0$, майже всіх $(x,t) \in Q$ і будь-яких ξ і η з $\mathbb{R}^{N_M}$ виконується нерівність $|a_\alpha(x,t,\xi) - a_\alpha(x,t,\eta)| \leq \Big(B_1 \sum_{|\alpha| \in M_0} |\xi_\alpha - \eta_\alpha|^2 + B_2 |\xi_{\overline{0}} - \eta_{\overline{0}}|^2\Big)^{1/2}$ (B_1 та B_2 залежать від (a_α));

5) існують (залежні від (a_α)) сталі $K_1 > 0$, $K_2 \geq 0$, $K_3 > 0$ такі, що для майже всіх $(x,t) \in Q$ та будь-яких ξ і η з $\mathbb{R}^{N_M}$ виконується нерівність

$$\sum_{|\alpha| \in M} (a_\alpha(x,t,\xi) - a_\alpha(x,t,\eta))(\xi_\alpha - \eta_\alpha) \geq K_1 \sum_{|\alpha| \in M_0} |\xi_\alpha - \eta_\alpha|^2 + K_2 |\xi_{\overline{0}} - \eta_{\overline{0}}|^2 + K_3 |\xi_{\overline{0}} - \eta_{\overline{0}}|^{p(x)},$$

причому, якщо виконується одна з двох умов: $B_2 > 0$ або $p_1 \geq \frac{2(n+1)}{n}$, то $K_2 > 0$.

Скажемо, що послідовність $\big\{(a_{\alpha,k})\big\}_{k=1}^{\infty}$ збіжна до (a_α) в $\mathbb{A}_p^*$, якщо елементи $(a_{\alpha,k})$, $k \in \mathbb{N}$, і елемент (a_α) задовольняють умови **4**) і **5**) з одними і тими ж сталими B_1, B_2, K_1, K_2, K_3 і для кожного $R > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{ess} \sup_{(x,t)\in Q_R} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^{N_M}} \left(\frac{|a_{\overline{0},k}(x,t,\xi) - a_{\overline{0}}(x,t,\xi)|}{|\xi|^{2/p^*(x)} + |\xi_{\overline{0}}|^{p(x)-1} + 1} + \sum_{|\alpha| \in M_0} \frac{|a_{\alpha,k}(x,t,\xi) - a_\alpha(x,t,\xi)|}{|\xi| + 1} \right) = 0.$$

Позначимо через $\mathbb{A}_p^{**}$ підмножину множини $\mathbb{A}_p^*$, яка складається з елементів $(a_\alpha) \in \mathbb{A}_p^*$, які задовольняють додаткову умову:

6) для довільних $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{N_M}$ і майже всіх $(x,t) \in Q$ $\big|a_{\overline{0}}(x,t,\xi) - a_{\overline{0}}(x,t,\eta)\big| \leq \widetilde{h}_{\overline{0}}(x,t)\Big(\big(|\xi| + |\eta|\big)^{(p(x)-2)/p(x)} |\xi - \eta| + \big(|\xi_{\overline{0}}| + |\eta_{\overline{0}}|\big)^{p(x)-2} |\xi_{\overline{0}} - \eta_{\overline{0}}|\Big)$, де $\widetilde{h}_{\overline{0}} \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$.

Теорема. *Правильними є такі твердження.*
1) Задача $\mathbf{FP}\big(\mathbb{A}_p^*, \mathbb{F}_p, \mathbb{V}_p, \mathbb{U}_p : p \in \mathbb{P}^*\big)$ *є однозначно розв'язна і для будь-яких* $p \in \mathbb{P}^*$ *і* $(a_\alpha) \in \mathbb{A}_p^*$, $(f_\alpha) \in \mathbb{F}_p$, $\Phi \in \mathbb{V}_p$ *функція* $u \in \mathbf{SFP}\big((a_\alpha), (f_\alpha), \Phi\big)$ *задовольняє оцінку*

$$\max_{t\in[T-R_0,T]} \int\limits_{\Omega_{R_0}} |u(x,t)|^2\,dx + \iint\limits_{Q_{R_0}} \Big[\sum_{|\alpha| \in M_0} |D^\alpha u(x,t)|^2 + K_2 |u(x,t)|^2 + |u(x,t)|^{p(x)} \Big]\,dx\,dt \leq$$

$$\leq \left(\frac{R}{R-R_0}\right)^{\varkappa} \Bigg[C_1 R^{n+1-\frac{q}{q-2}} + C_2 \iint\limits_{Q_R} \Big\{ \sum_{|\alpha| \in M_0} \Big| f_\alpha(x,t) - a_\alpha\big(x,t,\delta_M \varphi(x,t)\big)\Big|^2 +$$

$$+ \Big| f_{\overline{0}}(x,t) - a_{\overline{0}}\big(x,t,\delta_M\varphi(x,t)\big) - \varphi_t(x,t)\Big|^{p^*(x)} \Big\}\,dx\,dt \Bigg] + \tag{3}$$

$$+ C_3 \Bigg[\max_{t\in[T-R_0,T]} \int\limits_{\Omega_{R_0}} |\varphi(x,t)|^2\,dx + \iint\limits_{Q_{R_0}} \Big\{ \sum_{|\alpha| \in M_0} |D^\alpha \varphi(x,t)|^2 + K_2 |\varphi(x,t)|^2 + |\varphi(x,t)|^{p(x)} \Big\}\,dx\,dt \Bigg],$$

де $\varphi \in \Phi; R_0$, R *— довільні додатні сталі такі, що* $0 < R_0 < R$, $R \geq 1$; $q = p_1$, *якщо* $K_2 = 0$, *і* $q \in (2; p_0] \cup \{p_1\}$ *при* $K_2 > 0$; $\varkappa > \max\Big\{\frac{(2m+1)\,p_0}{p_0-2}, \frac{(2m+1)\,q}{q-2}\Big\}$ *— довільне число;* C_1, C_2, C_3 *— деякі додатні сталі, які залежать тільки від* B_1, B_2, K_1, K_2, K_3 *(з умов* **4**) *і* **5**)), $p_0, p_1, n, m, q, \varkappa$.

2) Задача $\mathbf{FP}\big(\mathbb{A}_p^*, \mathbb{F}_p, \overset{\circ}{\mathbb{V}}_p, \mathbb{U}_p : p \in \mathbb{P}^*\big)$ *— коректна і для її розв'язку правильна оцінка (3).*
3) Задача $\mathbf{FP}\big(\mathbb{A}_p^{**}, \mathbb{F}_p, \mathbb{V}_p, \mathbb{U}_p : p \in \mathbb{P}^*\big)$ *— коректна і для її розв'язку правильна оцінка (3).*

3. Допоміжні твердження. Далі використовуватимемо таке твердження (див.[13]).

Твердження 1. *Нехай* $p \in \mathbb{P}$, $p_0 \overset{\text{def}}{=} \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega_R} p(x) > 1$, $p_1 \overset{\text{def}}{=} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega_R} p(x) < +\infty$. *Тоді для будь-якої функції* $v \in L_{p(\,\cdot\,),\,loc}(Q)$ *і довільного* $R > 0$ *справджуються нерівності*

$$\mathbf{s}_{\frac{1}{p}}\big(\rho_{p,R}(v)\big) \le \|v\|_{L_{p(\cdot)}(Q_R)} \le \mathbf{S}_{\frac{1}{p}}\big(\rho_{p,R}(v)\big), \quad \mathbf{s}_p\Big(\|v\|_{L_{p(\cdot)}(Q_R)}\Big) \le \rho_{p,R}(v) \le \mathbf{S}_p\Big(\|v\|_{L_{p(\cdot)}(Q_R)}\Big),$$

де $\mathbf{S}_p(s) = \max\{s^{p_0}, s^{p_1}\}$, $\mathbf{s}_p(s) = \min\{s^{p_0}, s^{p_1}\}$, $s \ge 0$.

Введемо ще деякі позначення. Нехай T_0, T_1 — довільні числа, $-\infty < T_0 < T_1 < +\infty$, а $G = \Omega \times (T_0, T_1)$, $G_R = \Omega_R \times (T_0, T_1)$, $R > 0$. Простори $L_{p(\,\cdot\,),\text{loc}}(\overline{G})$ і $L_{p^*(\,\cdot\,),\text{loc}}(\overline{G})$ визначаються так само, як, відповідно, $L_{p(\,\cdot\,),\text{loc}}(\overline{Q})$ і $L_{p^*(\,\cdot\,),\text{loc}}(\overline{Q})$. Нехай $\overset{\circ}{H}{}^{m,1}_{\text{c}}(G) \overset{\text{def}}{=} \{\psi \in L_2\big(T_0, T_1; \overset{\circ}{H}{}^m_{\text{loc}}(\overline{\Omega})\big) : \psi_t \in L_2(G),\ \psi(x, T_0) = 0,\ \psi(x, T_1) = 0$ для м.в. $x \in \Omega$, $\operatorname{supp}\ \psi$ — компакт в $\overline{G}\}$.

Лема 1. *Нехай* $R_* \ge 1$, $v \in L_2\big(T_0, T_1; \overset{\circ}{H}{}^m_{loc}(\overline{\Omega})\big) \cap L_{p(\,\cdot\,),loc}(\overline{G})$, $g_{\overline{0}} \in L_{p'(\,\cdot\,),loc}(\overline{G})$, $g_\alpha \in L_{2,loc}(\overline{G})$, $|\alpha| \le m$, *такі, що*

$$\iint\limits_G \big\{-v\psi_t + \sum_{|\alpha|\le m} g_\alpha D^\alpha \psi\big\}\, dx\, dt = 0 \tag{4}$$

для будь-яких $\psi \in \overset{\circ}{H}{}^{m,1}_c(G) \cap L_{p(\,\cdot\,)}(G)$, $supp\,\psi \subset \overline{G_{R_*}}$. *Тоді* $v \in C\big([T_0, T_1]; L_2(\Omega_R)\big)\ \forall\ R \in (0, R_*)$ *і для довільних функцій* $\theta \in C^1([T_0, T_1])$, $w \in C^m_c(\overline{\Omega})$, $supp\, w \subset \overline{\Omega_{R_*}}$, *та будь-яких чисел* t_0, t_1, $T_0 \le t_0 < t_1 \le T_1$, *правильна рівність*

$$\theta(t_1) \int\limits_\Omega |v(x, t_1)|^2\, w(x)\, dx \,-\, \theta(t_0) \int\limits_\Omega |v(x, t_0)|^2\, w(x)\, dx \,-$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_\Omega |v(x,t)|^2\, w(x)\, \theta'(t)\, dx\, dt \,+\, 2\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_\Omega \Big(\sum_{|\alpha|\le m} g_\alpha\, D^\alpha(v\, w)\Big)\theta\, dx\, dt \,= 0. \tag{5}$$

Доведення. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $T_0 = -T$, $T_1 = T$, де $T > 0$, тобто $[T_0, T_1] = [-T, T]$. Покладемо $\Omega_* \overset{\text{def}}{=} \Omega_{R_*}$, $G_* \overset{\text{def}}{=} G_{R_*}$. Нехай k — яке-небудь натуральне число. Зробимо в (4) заміну змінних: $t = \frac{s}{\lambda_k}$, де $\lambda_k \overset{\text{def}}{=} 1 + \frac{2}{kT} > 1$. У результаті, врахувавши, що $s \in [-\lambda_k T, \lambda_k T]$, отримаємо рівність

$$\int\limits_{-\lambda_k T}^{\lambda_k T}\int\limits_\Omega \Big\{-v(x, s/\lambda_k)\widetilde{\psi}_s(x, s) \,+\, \lambda_k{}^{-1} \sum_{|\alpha|\le m} g_\alpha(x, s/\lambda_k) D^\alpha \widetilde{\psi}(x, s)\Big\}\, dx\, ds \,=\, 0 \tag{6}$$

для будь-якої $\widetilde{\psi} \in \overset{\circ}{H}{}^{m,1}_{\text{c}}\Big(\Omega \times (-\lambda_k T, \lambda_k T)\Big) \cap L_{p(\,\cdot\,),\,\text{loc}}\Big(\Omega \times (-\lambda_k T, \lambda_k T)\Big)$, $\operatorname{supp} \widetilde{\psi} \subset \Omega_{R_*} \times (-\lambda_k T, \lambda_k T)$.

Нехай $\omega_1(z) = C_4\, e^{\frac{1}{z^2-1}}$, якщо $z \in (-1, 1)$, і $\omega_1(z) = 0$, якщо $z \le -1$ або $z \ge 1$, де $C_4 > 0$ — стала така, що $\int_{-\infty}^{+\infty} \omega_1(z)\, dz = 1$. Очевидно, що $\omega_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$. Покладемо

$\omega_\rho(z) = \rho^{-1}\omega_1(z/\rho)$, $z \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$. Відомо $\big([2]\big)$, що функції ω_ρ, $\rho > 0$, — так звані ядра усереднень.

Візьмемо в (6) $\widetilde{\psi}(x,s) = \widetilde{w}(x)\,\omega_{1/k}(s-\tau)$, $(x,s) \in \Omega \times \big(-\lambda_k T, \lambda_k T\big)$, де $\tau \in [-T,T]$, $\widetilde{w} \in C^m(\overline{\Omega}) \cap \overset{\circ}{H}{}^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $\operatorname{supp}\widetilde{w} \subset \overline{\Omega_{R_*}}$. У результаті отримаємо

$$\int\limits_{\Omega} \Big\{ \big(v_k(x,\tau)\big)_\tau \widetilde{w}(x) + \sum_{|\alpha|\le m} g_{\alpha,k}(x,\tau) D^\alpha \widetilde{w}(x) \Big\}\, dx = 0, \quad \tau \in [-T,T], \tag{7}$$

де $v_k(x,\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(x, s/\lambda_k)\,\omega_{1/k}(s-\tau)\,ds$, $g_{\alpha,k}(x,\tau) = \frac{1}{\lambda_k}\int_{-\infty}^{+\infty} g_\alpha(x,s/\lambda_k)\,\omega_{1/k}(s-\tau)\,ds$, $(x,\tau) \in \Omega \times [-T,T]$, $|\alpha| \le m$. Покажемо, що $v_k\big|_{G_*} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} v\big|_{G_*}$ в $L_{p(\cdot)}(G_*)$. Оскільки простір $C(\overline{G}_*)$ є щільним в $L_{p(\cdot)}(G_*)$, то існує послідовність $\{\widetilde{v}_l\}_{l=1}^\infty$ елементів простору $C(\overline{G}_*)$ така, що $\|v - \widetilde{v}_l\|_{L_{p(\cdot)}(G_*)} \to 0$ при $l \to +\infty$. Враховуючи це і використовуючи нерівність Гельдера, маємо таке:

$$\iint\limits_{G_*} |v_k(x,\tau) - v(x,\tau)|^{p(x)}\,dx\,d\tau = \iint\limits_{G_*} \Big| \int\limits_{|s-\tau|<\frac1k} v\Big(x, \frac{s}{\lambda_k}\Big)\,\omega_{1/k}(s-\tau)\,ds - v(x,\tau)\Big|^{p(x)} dx\,d\tau =$$

$$= \iint\limits_{G_*} \Big| \int\limits_{|s-\tau|<\frac1k} \Big[v\Big(x,\frac{s}{\lambda_k}\Big) - \widetilde{v}_l\Big(x,\frac{s}{\lambda_k}\Big)\Big]\,\omega_{1/k}(s-\tau)\,ds + \int\limits_{|s-\tau|<\frac1k} \Big[\widetilde{v}_l\Big(x,\frac{s}{\lambda_k}\Big) - \widetilde{v}_l\Big(x,\frac{\tau}{\lambda_k}\Big)\Big] \times$$

$$\times\, \omega_{1/k}(s-\tau)\,ds + \Big[\widetilde{v}_l\Big(x,\frac{\tau}{\lambda_k}\Big) - \widetilde{v}_l(x,\tau)\Big] + \big[\widetilde{v}_l(x,\tau) - v(x,\tau)\big]\Big|^{p(x)} dx\,d\tau \le$$

$$\le C_5 \iint\limits_{G_*} \Big\{ \Big| \int\limits_{|s-\tau|<\frac1k} \Big[v\Big(x,\frac{s}{\lambda_k}\Big) - \widetilde{v}_l\Big(x,\frac{s}{\lambda_k}\Big)\Big]\omega_{1/k}(s-\tau)ds\Big|^{p(x)} +$$

$$+ \Big| \int\limits_{|s-\tau|<\frac1k} \Big[\widetilde{v}_l\Big(x,\frac{s}{\lambda_k}\Big) - \widetilde{v}_l\Big(x,\frac{\tau}{\lambda_k}\Big)\Big]\omega_{1/k}(s-\tau)\,ds\Big|^{p(x)} +$$

$$+ \Big|\widetilde{v}_l\Big(x,\frac{\tau}{\lambda_k}\Big) - \widetilde{v}_l(x,\tau)\Big|^{p(x)} + \big|\widetilde{v}_l(x,\tau) - v(x,\tau)\big|^{p(x)} \Big\}\,dx\,d\tau \le$$

$$\le C_5 \Big\{ \iint\limits_{G_*} \Big(\int\limits_{|s-\tau|<\frac1k} \Big| v\Big(x,\frac{s}{\lambda_k}\Big) - \widetilde{v}_l\Big(x,\frac{s}{\lambda_k}\Big)\Big|^{p(x)} ds\Big) \Big(\int\limits_{|s-\tau|<\frac1k} \big|\omega_{1/k}(s-\tau)\big|^{p^*(x)}\,ds\Big)^{p(x)-1} dx\,d\tau +$$

$$+ \max_{i\in\{0;1\}} \Big(\max_{x,|s-\tau|<\frac1k} \Big| \widetilde{v}_l\Big(x,\frac{s}{\lambda_k}\Big) - \widetilde{v}_l\Big(x,\frac{\tau}{\lambda_k}\Big)\Big|\Big)^{p_i} \operatorname{mes} G_* + \max_{i\in\{0;1\}} \Big(\max_{x,\tau} \Big|\widetilde{v}_l\Big(x,\frac{\tau}{\lambda_k}\Big) - \widetilde{v}_l(x,\tau)\Big|\Big)^{p_i} \times$$

$$\times \operatorname{mes} G_* + \iint\limits_{G_*} \big|\widetilde{v}_l(x,\tau) - v(x,\tau)\big|^{p(x)}\,dx\,d\tau \Big\} \equiv C_5\,\{I_1 + I_2 + I_3 + I_4\}, \tag{8}$$

де $C_5 > 0$ — стала, яка від k і l не залежить.

Нехай $\varepsilon > 0$ — достатньо мале дійсне число. Покажемо, що для достатньо великих значень $k \in \mathbb{N}$ права частина нерівності (8) менша за ε. Маємо, врахувавши, що

$|\omega_{1/k}(z)| \le C_6\, k, \quad z \in \mathbb{R}$, де $C_6 > 0$ — стала, яка від k не залежить, такі оцінки:

$$I_1 = \iint\limits_{G_*} \Big(\int\limits_{|s-\tau|<\frac{1}{k}} \Big| v\Big(x, \frac{s}{\lambda_k}\Big) - \widetilde{v}_l\Big(x, \frac{s}{\lambda_k}\Big)\Big|^{p(x)} ds \Big) \Big(\int\limits_{|s-\tau|<\frac{1}{k}} \big|\omega_{1/k}(s-\tau)\big|^{p^*(x)} ds \Big)^{p(x)-1} dx\, d\tau \le$$

$$\le C_7\, k \iint\limits_{G_*} \Big(\int\limits_{|s-\tau|<\frac{1}{k}} \Big| v\Big(x, \frac{s}{\lambda_k}\Big) - \widetilde{v}_l\Big(x, \frac{s}{\lambda_k}\Big)\Big|^{p(x)} ds \Big) dx\, d\tau = \big[\ s-\tau = z,\ ds = dz\ \big] =$$

$$= C_7\, k \iint\limits_{G_*} \Big(\int\limits_{|z|<\frac{1}{k}} \big| v\big(x, (z+\tau)/\lambda_k\big) - \widetilde{v}_l\big(x, (z+\tau)/\lambda_k\big)\big|^{p(x)} dz \Big) dx\, d\tau =$$

$$= C_7\, k \int\limits_{|z|<\frac{1}{k}} dz \int\limits_{\Omega_*} dx \int\limits_{-T}^{T} \big| v\big(x, (z+\tau)/\lambda_k\big) - \widetilde{v}_l\big(x, (z+\tau)/\lambda_k\big)\big|^{p(x)} d\tau =$$

$$= \big[\ (z+\tau)/\lambda_k = t, \quad \tau = \lambda_k t - z, \quad d\tau = \lambda_k dt\ \big] \le$$

$$\le 2\, C_7\, \lambda_k \int\limits_{\Omega_*} dx \int\limits_{-T}^{T} \big| v(x,t) - \widetilde{v}_l(x,t)\big|^{p(x)} dt = 2\, C_7\, \lambda_k \iint\limits_{G_*} \big| v(x,t) - \widetilde{v}_l(x,t)\big|^{p(x)} dx\, dt,$$

де $C_7 > 0$ — стала, яка від k і l не залежить.

Звідси, оскільки $\|v - \widetilde{v}_l\|_{L_{p(\cdot)}(G_*)} \to 0$ при $l \to +\infty$, на підставі твердження 1 випливає існування $l_0 \in \mathbb{N}$ такого, що

$$I_1 \le 2\, C_7\, \lambda_k \iint\limits_{G_*} \big| v(x,t) - \widetilde{v}_{l_0}(x,t)\big|^{p(x)} dx\, dt < \frac{\varepsilon}{4C_5}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

$$I_4 = \iint\limits_{G_*} \big| \widetilde{v}_{l_0}(x,t) - v(x,t)\big|^{p(x)} dx\, d\tau < \frac{\varepsilon}{4C_5}. \tag{10}$$

Оскільки $\widetilde{v}_{l_0} \in C(\overline{G}_*)$ і $\overline{G}_*$ — компакт, а отже, функція $\widetilde{v}_{l_0}$ рівномірно неперервна на $\overline{G}_*$, то існує $k_0 \in \mathbb{N}$ таке, що для всіх $k > k_0$ виконується оцінка

$$I_2 \equiv \max_{i \in \{0;1\}} \Big(\max_{x, |s-\tau|<\frac{1}{k}} \big| \widetilde{v}_{l_0}(x, s/\lambda_k) - \widetilde{v}_{l_0}(x, \tau/\lambda_k)\big| \Big)^{p_i} \cdot \operatorname{mes} G_* < \frac{\varepsilon}{4C_5}, \tag{11}$$

$$I_3 \equiv \max_{i \in \{0;1\}} \Big(\max_{x,\tau} \big| \widetilde{v}_{l_0}(x, \tau/\lambda_k) - \widetilde{v}_{l_0}(x, \tau)\big| \Big)^{p_i} \cdot \operatorname{mes} G_* < \frac{\varepsilon}{4C_5}. \tag{12}$$

З (8), враховуючи (9) - (12), отримаємо $\iint\limits_{G_R} \big| v_k(x,t) - v(x,t)\big|^{p(x)} dx\, d\tau < \varepsilon \quad \forall k > k_0$. Оскільки $\varepsilon > 0$ — довільне число, то маємо те, що нам потрібно.

Аналогічно доводиться, що $v_k\big|_{G_*} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} v\big|_{G_*}$ в $L_2\big(-T,T; H^m(\Omega_*)\big)$, $g_{\overline{0},k}\big|_{G_*} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} g_{\overline{0}}\big|_{G_*}$ в $L_{p^*(\cdot)}(G_*)$, $g_{\alpha,k}\big|_{G_*} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} g_\alpha\big|_{G_*}$ в $L_2(G_*)$, $0 < |\alpha| \le m$.

Нехай k і l — довільні натуральні числа. Тоді з рівності (7) отримаємо

$$\int\limits_{\Omega} \Big\{ \big(v_{kl}(x,\tau)\big)_\tau \widetilde{w}(x) + \sum_{|\alpha|\le m} g_{\alpha,kl}(x,\tau) D^\alpha \widetilde{w}(x) \Big\} dx = 0, \quad \tau \in [-T,T], \tag{13}$$

де $v_{kl}(x,\tau)=v_k(x,\tau)-v_l(x,\tau)$, $\quad g_{\alpha,kl}(x,\tau)=g_{\alpha,k}(x,\tau)-g_{\alpha,l}(x,\tau)$, $\quad (x,\tau)\in G$.

Нехай $w\in C^m_{\mathrm{c}}(\overline{\Omega})$, $\operatorname{supp} w\subset\overline{\Omega_{R_*}}$. Для довільного $\tau\in[-T,T]$ покладемо в (13) $\widetilde{w}(x)=v_{kl}(x,\tau)\,w(x)$, $x\in\Omega$. В результаті отримаємо

$$\int\limits_{\Omega}\Big\{(v_{kl}(x,\tau))_\tau v_{kl}(x,\tau)\,w(x)+\sum_{|\alpha|\le m} g_{\alpha,kl}(x,\tau)D^\alpha\big(v_{kl}(x,\tau)\,w(x)\big)\Big\}\,dx\;=\;0,\quad \tau\in[-T,T]. \tag{14}$$

Нехай $\theta\in C^1\big([-T,T]\big)$. Для кожного $\tau\in[-T,T]$ домножимо (14) на $\theta(\tau)$ і проінтегруємо отриману рівність за τ від τ_1 до τ_2 $(-T\le\tau_1<\tau_2\le T)$. Тоді, застосувавши формулу інтегрування частинами, отримаємо $\frac12\int_{\tau_1}^{\tau_2}\theta(\tau)\,w(x)\frac{d}{d\tau}\Big(\int_\Omega|v_{kl}(x,\tau)|^2\,dx\Big)d\tau+\sum_{|\alpha|\le m}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega g_{\alpha,kl}(x,\tau)D^\alpha\big(v_{kl}(x,\tau)\,w(x)\big)\theta(\tau)\,dx\,d\tau=0$, звідки

$$\theta(\tau_2)\int\limits_\Omega|v_{kl}(x,\tau_2)|^2\,w(x)\,dx\;-\;\theta(\tau_1)\int\limits_\Omega|v_{kl}(x,\tau_1)|^2\,w(x)\,dx\,-$$

$$-\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega|v_{kl}(x,\tau)|^2\,w(x)\,\theta'(\tau)dx\,d\tau\;+\;2\sum_{|\alpha|\le m}\int\limits_\Omega\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}g_{\alpha,kl}(x,\tau)D^\alpha\big(v_{kl}(x,\tau)\,w(x)\big)\theta(\tau)dx\,d\tau=0. \tag{15}$$

Візьмемо в (15) $\theta(\tau)=1$, якщо $\tau\in[0,T]$, $\theta(-T)=0$ і $0\le\theta(\tau)\le1$, $|\theta'(\tau)|\le\frac{2}{T}$, якщо $\tau\in[-T;0)$, та $w(x)\ge0, x\in\Omega$, $w(x)=1$, якщо $x\in\Omega_R$, де $R\in(0,R_*)$ — фіксоване дійсне число, і $w(x)=0$, якщо $x\notin\Omega_{R_1}$, де $R_1=(R+R_*)/2$. Тоді з (15) (поклавши $\tau_1=-T,\tau_2=\tau\in[0,T]$) легко отримаємо нерівність

$$\max_{\tau\in[0,T]}\int\limits_{\Omega_R}|v_{kl}(x,\tau)|^2\,dx\;\le\;2\iint\limits_{G_{R_1}}\sum_{|\alpha|\le m}|g_{\alpha,kl}(x,\tau)|\Big|D^\alpha\big(v_{kl}(x,\tau)\,w(x)\big)\Big|\,dx\,d\tau+$$

$$+\frac{2}{T}\iint\limits_{G_{R_1}}|v_{kl}(x,\tau)|^2\,w(x)\,dx\,d\tau. \tag{16}$$

Аналогічно оцінюємо $\max\limits_{\tau\in[-T;0]}\int_{\Omega_R}|v_{kl}(x,\tau)|^2\,dx$ і в результаті отримуємо оцінку значення $\max\limits_{\tau\in[-T;T]}\int_{\Omega_R}|v_{kl}(x,\tau)|^2\,dx$ через праву частину нерівності (16). Оскільки права частина нерівності (16) прямує до нуля при $k,l\to+\infty$, то і ліва частина — теж. Отож, послідовність $\big\{v_k\big|_{G_R}\big\}_{k=1}^\infty$ елементів банахового простору $C\big([-T,T];L_2(\Omega_R)\big)$ є фундаментальною в цьому просторі, а отже, збіжною в ньому. Але оскільки $v_k\big|_{G_R}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}v\big|_{G_R}$ в $L_2(G_R)$, то $v_k\big|_{G_R}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}v\big|_{G_R}$ в $C\big([-T,T];L_2(\Omega_R)\big)$, а отже, $v\big|_{G_R}\in C\big([-T,T];L_2(\Omega_R)\big)$, де $R\in(0,R_*)$ — довільне число.

Тепер для довільного $\tau\in[-T,T]$ покладемо в (7) $\widetilde{w}(x)=v_k(x,\tau)\,w(x)\,\theta(\tau)$, $x\in\Omega$, де $w\in C^m_c(\overline{\Omega})$, $\operatorname{supp} w\subset\overline{\Omega_{R_*}}$, $\theta\in C^1\big([-T,T]\big)$. В результаті тих самих міркувань, що привели до (15), здобудемо рівність, подібну до (15), в якій замість kl стоїть k, $\tau_1=t_0$, $\tau_2=t_1$. Перейшовши в цій рівності до границі при $k\to\infty$, отримаємо (5). $\square$

Зауваження. Якщо виконується умова леми 1 і $v\big|_{G_{R_*}}\in L_2\big(T_0,T_1;\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega_{R_*})\big)$, то $v\in C\big([T_0,T_1];L_2(\Omega_{R_*})\big)$ і виконується рівність (5) з $w\equiv1$. Це легко випливає з доведення леми 1.

Лема 2. *Нехай $p \in \mathbb{P}^*$, $(a_\alpha) \in \mathbb{A}_p^*$ і для кожного $l \in \{1,2\}$ функції $(f_{\alpha,l}) \in \mathbb{F}_p$ і $u_l \in \mathbb{U}_p$ такі, що $u_1 - u_2 \in H^{m,0}_{\Sigma_{R_*}}(Q_{R_*})$ і*

$$\iint\limits_{Q_{R_*}} \Big\{ -u_l\psi_t + \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,t,\delta_M u_l) D^\alpha\psi \Big\}\, dx\, dt = \iint\limits_{Q_{R_*}} \sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha D^\alpha \psi\, dx\, dt \tag{17}$$

для будь-яких $\psi \in \overset{\circ}{H}{}^{m,1}_c(\overline{Q}) \cap L_{p(\,\cdot\,)}(Q)$, $\operatorname{supp}\psi \subset \overline{Q_{R_*}}$, де $R_* \ge 1$ — деяке число.

Тоді для будь-яких чисел R_0, R, $0 < R_0 < R \le R_*, R \ge 1$, правильна нерівність

$$\max_{t\in[T-R_0,T]} \int\limits_{\Omega_{R_0}} \Big| u_1(x,t) - u_2(x,t) \Big|^2 dx + \iint\limits_{Q_{R_0}} \Big[\sum_{|\alpha|\in M_0} \Big| D^\alpha u_1(x,t) - D^\alpha u_2(x,t) \Big|^2 +$$
$$+ K_2 \Big| u_1(x,t) - u_2(x,t) \Big|^2 + \Big| u_1(x,t) - u_2(x,t) \Big|^{p(x)} \Big] dxdt \le \left(\frac{R}{R-R_0} \right)^{\varkappa} \Big[C_8\, R^{n+1-\frac{q}{q-2}} +$$
$$+ C_9 \iint\limits_{Q_R} \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M_0} \Big| f_{\alpha,1}(x,t) - f_{\alpha,2}(x,t) \Big|^2 + \Big| f_{\overline{0},1}(x,t) - f_{\overline{0},2}(x,t) \Big|^{p^*(x)} \Big\} dxdt \Big], \tag{18}$$

де q і $\varkappa$ такі ж, як в теоремі, а C_8 і C_9 — деякі сталі, які залежать тільки від B_1, B_2, K_1, K_2, K_3 (з умов **4**) *і* **5**) *), q, p_0, p_1, m, n та $\varkappa$.*

Доведення. Покладемо $v \overset{\text{def}}{=} u_1 - u_2$. З інтегральних тотожностей, отриманих з (17) відповідно для $l = 1$ і $l = 2$, дістанемо

$$\iint\limits_{Q_{R_*}} \Big\{ -v\,\psi_t + \sum_{|\alpha|\in M} \Big(a_\alpha(x,t,\delta_M u_1) - a_\alpha(x,t,\delta_M u_2) \Big) D^\alpha \psi \Big\}\, dx\, dt =$$
$$= \iint\limits_{Q_{R_*}} \sum_{|\alpha|\in M} (f_{\alpha,1} - f_{\alpha,2}) D^\alpha \psi\, dx\, dt \tag{19}$$

для будь-яких $\psi \in \overset{\circ}{H}{}^{m,1}_{\mathrm{c}}(Q) \cap L_{p(\,\cdot\,)}(Q)$, $\quad \operatorname{supp}\psi \subset \overline{Q_{R_*}}$. З (19) за лемою 1 дістанемо

$$\theta(t_1) \int\limits_{\Omega_{R_*}} |v(x,t_1)|^2\, w(x)\, dx \,-\, \theta(t_0) \int\limits_{\Omega_{R_*}} |v(x,t_0)|^2\, w(x)\, dx \,-\, \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{\Omega_{R_*}} |v(x,t)|^2\, w(x)\, \theta'(t)\, dxdt +$$
$$+ 2 \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{\Omega_{R_*}} \Big(\sum_{|\alpha|\in M} \big[a_\alpha(x,t,\delta_M u_1) - a_\alpha(x,t,\delta_M u_2) \big]\, D^\alpha(v\,w) \Big)\, \theta\, dx\, dt =$$
$$= 2 \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{\Omega_{R_*}} \sum_{|\alpha|\in M} (f_{\alpha,1} - f_{\alpha,2})\, D^\alpha(vw)\, \theta\, dx\, dt, \tag{20}$$

де $\theta \in C^1\big([T-R_*,T]\big)$, $\quad w \in C^m_{\mathrm{c}}(\overline{\Omega})$, $\quad \operatorname{supp} w \subset \overline{\Omega_{R_*}}$, $T - R_* \le t_0 < t_1 \le T$ — довільні.

Нехай R_0 і R — які-небудь числа такі, що $0 < R_0 < R \le R_*$, $R \ge 1$. Покладемо $\chi(t) = R - |t - T|$, якщо $t \in [T-R, T]$, і $\chi(t) = 0$, коли $t < T - R$; $\zeta(x) = \frac{1}{R}(R^2 - |x|^2)$, якщо $|x| \le R$, і $\zeta(x) = 0$, коли $|x| > R$ (див. [7]).

Візьмемо в (20) $t_0 = T - R$, $t_1 = \tau \in (T-R, T]$, $\theta = \chi^r$, $w = \zeta^s$, де $r > 0$, $s > 0$ — достатньо великі числа (їх значення уточнимо пізніше; очевидно, що при $r > 1$ та $s > m$ маємо $\chi^r \in C^1\big((-\infty, T]\big)$, $\zeta^s \in C^m(\overline{\Omega})$, $\operatorname{supp}\zeta^s \subset \overline{\Omega_R}$). У результаті отримаємо рівність

$$\chi^r(\tau)\int\limits_{\Omega_R} |v(x,\tau)|^2\zeta^s(x)\,dx + 2\iint\limits_{Q_R^\tau}\Big(\sum_{|\alpha|\in M}[a_\alpha(x,t,\delta_M u_1) - a_\alpha(x,t,\delta_M u_2)]\,D^\alpha(v\,\zeta^s)\Big)\,\chi^r\,dx\,dt =$$

$$= r\iint\limits_{Q_R^\tau}|v|^2\zeta^s\,\chi^{r-1}\,dx\,dt + 2\iint\limits_{Q_R^\tau}\sum_{|\alpha|\in M}(f_{\alpha,1} - f_{\alpha,2})\,D^\alpha(v\,\zeta^s)\,\chi^r\,dx\,dt, \tag{21}$$

де $Q_R^\tau = \Omega_R \times (T-R, \tau)$.

Тепер зауважимо таке. Нехай $\widetilde{v} \in \overset{\circ}{H}{}^m_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $g_\alpha \in L_{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$ для деякого $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$, $0 < |\alpha| \le m$. Очевидно, що

$$\int\limits_\Omega g_\alpha\,D^\alpha(\widetilde{v}\,\zeta^s)\,dx = \int\limits_\Omega g_\alpha\,(D^\alpha\widetilde{v})\,\zeta^s\,dx + \int\limits_\Omega g_\alpha\,\Big(D^\alpha(\widetilde{v}\,\zeta^s) - (D^\alpha\widetilde{v})\,\zeta^s\Big)dx. \tag{22}$$

З леми 3.1 роботи [7] випливає, що

$$\int\limits_\Omega g_\alpha\,\Big(D^\alpha(\widetilde{v}\,\zeta^s) - (D^\alpha\widetilde{v})\,\zeta^s\Big)dx \le \varepsilon\int\limits_\Omega |g_\alpha|^2\zeta^s\,dx + \varepsilon\int\limits_\Omega\Big(\sum_{|\beta|=|\alpha|}\Big|D^\beta\widetilde{v}\Big|^2\Big)\,\zeta^s\,dx +$$

$$+ C_\alpha(\varepsilon)\int\limits_\Omega |\widetilde{v}|^2\,\zeta^{s-2|\alpha|}\,dx, \tag{23}$$

де $\varepsilon > 0$ — довільне число, $C_\alpha(\varepsilon) > 0$ — стала, яка від R не залежить.

Отже, з (21), на підставі (22), (23), отримаємо

$$\chi^r(\tau)\int\limits_{\Omega_R}|v(x,\tau)|^2\zeta^s(x)\,dx + 2\iint\limits_{Q_R^\tau}\sum_{|\alpha|\in M}\Big(a_\alpha(x,t,\delta_M u_1) - a_\alpha(x,t,\delta_M u_2)\Big)\,D^\alpha v\,\zeta^s\,\chi^r\,dx\,dt \le$$

$$\le \varepsilon\iint\limits_{Q_R^\tau}\sum_{|\alpha|\in M_0}\Big|a_\alpha(x,t,\delta_M u_1) - a_\alpha(x,t,\delta_M u_2)\Big|^2\,\zeta^s\,\chi^r\,dx\,dt +$$

$$+ \varepsilon\iint\limits_{Q_R^\tau}\sum_{|\alpha|\in M_0}\Big|f_{\alpha,1} - f_{\alpha,2}\Big|^2\,\zeta^s\,\chi^r\,dx\,dt + \varepsilon\iint\limits_{Q_R^\tau}\Big(\sum_{|\alpha|\in M_0}|D^\alpha v|^2\Big)\,\zeta^s\,\chi^r\,dx\,dt + C_{10}(\varepsilon)\iint\limits_{Q_R^\tau}|v|^2\times$$

$$\times\Big(\sum_{i\in M_0}\zeta^{s-2i}\Big)\,\chi^r\,dx\,dt + r\iint\limits_{Q_R^\tau}|v|^2\,\zeta^s\,\chi^{r-1}\,dx\,dt + 2\iint\limits_{Q_R^\tau}\sum_{|\alpha|\in M}|f_{\alpha,1} - f_{\alpha,2}|\,|D^\alpha v|\,\zeta^s\,\chi^r\,dx\,dt, \tag{24}$$

де $\varepsilon > 0$ — довільне число, $C_{10}(\varepsilon) > 0$ — стала, яка від R не залежить.

Оцінимо члени нерівності (24). Виходячи з умови **5**), та пам'ятаючи, що $v = u_1 - u_2$, маємо

$$\iint\limits_{Q_R^\tau}\sum_{|\alpha|\in M}\Big(a_\alpha(x,t,\delta_M u_1) - a_\alpha(x,t,\delta_M u_2)\Big)\Big(D^\alpha u_1 - D^\alpha u_2\Big)\,\zeta^s\,\chi^r\,dx\,dt \ge$$

$$\geq \iint\limits_{Q_R^\tau} \Big[K_1 \sum_{|\alpha|\in M_0} |D^\alpha v(x,t)|^2 + K_2|v(x,t)|^2 + K_3|v(x,t)|^{p(x)}\Big]\zeta^s\chi^r\,dx\,dt. \qquad (25)$$

Використовуючи умову **4**), отримаємо

$$\iint\limits_{Q_R^\tau} \sum_{|\alpha|\in M_0} \big|a_\alpha(x,t,\delta_M u_1) - a_\alpha(x,t,\delta_M u_2)\big|^2 \zeta^s\chi^r\,dx\,dt \leq$$

$$\leq (N_M - 1)\iint\limits_{Q_R^\tau}\Big(B_1 \sum_{|\alpha|\in M_0} |D^\alpha v|^2 + B_2|v|^2\Big)\zeta^s\chi^r\,dx\,dt. \qquad (26)$$

Застосовуючи узагальнену нерівність Коші (з ε), отримаємо

$$\iint\limits_{Q_R^\tau} \sum_{|\alpha|\in M} (f_{\alpha,1} - f_{\alpha,2})\,(D^\alpha v)\,\zeta^s\chi^r\,dx\,dt \leq \iint\limits_{Q_R^\tau} |f_{\overline{0},1} - f_{\overline{0},2}|\,|v|\,\zeta^s\chi^r\,dx\,dt +$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}\iint\limits_{Q_R^\tau} \sum_{|\alpha|\in M_0} |D^\alpha v|^2\,\zeta^s\,\chi^r\,dx\,dt + \frac{1}{2\varepsilon}\iint\limits_{Q_R^\tau} \sum_{|\alpha|\in M_0} |f_{\alpha,1} - f_{\alpha,2}|^2\,\zeta^s\,\chi^r\,dx\,dt, \qquad (27)$$

де $\varepsilon > 0$ — довільне число.

Далі використовуватимемо нерівність Юнга

$$a\,b \leq \varepsilon a^\gamma + \varepsilon^{-\frac{1}{\gamma-1}}\varphi(\gamma)\,b^{\gamma'}, \qquad (28)$$

де $a \geq 0, b \geq 0, \varepsilon > 0, \gamma > 1, \gamma' = \frac{\gamma}{\gamma-1}$ $\Big($ тобто $\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma'} = 1\Big)$, $\varphi(\gamma) = \gamma^{-\frac{1}{1-\gamma}}(\gamma-1)$.

Зауважимо, що $\varphi'(\gamma) > 0$ при $\gamma > 1$, тобто функція φ — зростаюча на $(1,+\infty)$, а $\frac{d}{d\gamma}\,\varepsilon^{-\frac{1}{\gamma-1}} < 0$ для $\gamma > 1$, коли $0 < \varepsilon < 1$, тобто функція $\varepsilon^{-\frac{1}{\gamma-1}}$, $\gamma \in (1;+\infty)$, — спадна, якщо $0 < \varepsilon < 1$.

Нехай $(x,t) \in Q_R$ — яка-небудь точка, така, що $v(x,t)$, $p(x)$ визначені і $p_0 \leq p(x) \leq p_1$. Покладемо в нерівності Юнга $a = |v(x,t)|^2\zeta^{s/\gamma}(x)\,\chi^{r/\gamma}(t)$, $b = \zeta^{s/\gamma'-2i}(x)\,\chi^{r/\gamma'}(t)$, $\gamma = \frac{p(x)}{2}, \gamma' = \frac{p(x)}{p(x)-2}$, $\varepsilon = \eta_1 \in (0;1)$, $i \in M_0$. У результаті одержимо

$$|v(x,t)|^2\,\zeta^{s-2i}(x)\,\chi^r(t) \leq \eta_1\,|v(x,t)|^{p(x)}\,\zeta^s(x)\chi^r(t) + \eta_1^{-\frac{2}{p(x)-2}}\,\varphi(p(x)/2)\,\zeta^{s-\frac{2i\,p(x)}{p(x)-2}}(x)\,\eta^r(t) \leq$$

$$\leq \eta_1\,|v(x,t)|^{p(x)}\,\zeta^s(x)\,\chi^r(t) + \eta_1^{-\frac{2}{p_0-2}}\,\varphi(p_1/2)\,\zeta^{s-\frac{2i\,p(x)}{p(x)-2}}(x)\,\eta^r(t)$$

для майже всіх $(x,t) \in Q_R$. Проінтегруємо її, припустивши, що $s > \frac{2m\,p(x)}{p(x)-2}$ для майже всіх $(x,t) \in Q_R$. У результаті отримаємо

$$\iint\limits_{Q_R^\tau} |v(x,t)|^2\,\zeta^{s-2i}(x)\,\chi^r(t)\,dx\,dt \leq \eta_1\iint\limits_{Q_R^\tau} |v(x,t)|^{p(x)}\,\zeta^s(x)\,\chi^r(t)\,dx\,dt +$$

$$+\eta_1^{-\frac{2}{p_0-2}}\,\varphi(p_1/2)\iint\limits_{Q_R^\tau} \zeta^{s-\frac{2ip(x)}{p(x)-2}}(x)\,\chi^r(t)\,dx\,dt, \qquad (29)$$

де $\eta_1 \in (0;1)$, $i \in M_0$.

Нехай $q \in (2, p_0]$. Очевидно, що $L_{p(\cdot)}(Q_R) \subset L_q(Q_R)$. Аналогічно до попереднього одержуємо

$$\iint\limits_{Q_R^\tau} |v(x,t)|^2 \,\zeta^{s-2i}(x)\,\chi^r(t)\,dx\,dt \le \eta_1 \iint\limits_{Q_R^\tau} |v(x,t)|^{p(x)}\,\zeta^s(x)\,\chi^r(t)\,dx\,dt +$$

$$+\,\eta_1^{-\frac{2}{q-2}}\,\varphi(q/2)\iint\limits_{Q_R^\tau} \zeta^{\,s-\frac{2i\,q}{q-2}}(x)\,\chi^r(t)\,dx\,dt, \tag{30}$$

де $\eta_1 > 0$, $i \in M_0$, $s > 2iq/(q-2)$.

Так само, припустивши, що $r > \frac{p(x)}{p(x)-2}$ для майже всіх $(x,t) \in Q_R$, отримаємо

$$\iint\limits_{Q_R^\tau} |v(x,t)|^2 \,\zeta^{s}(x)\,\chi^{r-1}(t)\,dx\,dt \le \eta_2 \iint\limits_{Q_R^\tau} |v(x,t)|^{p(x)}\,\zeta^s(x)\,\chi^r(t)\,dx\,dt +$$

$$+\,\eta_2^{-\frac{2}{p_0-2}}\,\varphi(p_1/2)\iint\limits_{Q_R^\tau} \zeta^{s}(x)\,\eta^{r-\frac{p(x)}{p(x)-2}}(t)\,dx\,dt, \tag{31}$$

$$\iint\limits_{Q_R^\tau} |v(x,t)|^2 \,\zeta^{s}(x)\,\chi^{r-1}(t)\,dx\,dt \le \eta_2 \iint\limits_{Q_R^\tau} |v(x,t)|^{q}\,\zeta^s(x)\,\chi^r(t)\,dx\,dt +$$

$$+\,\eta_2^{-\frac{2}{q-2}}\,\varphi(q/2)\iint\limits_{Q_R^\tau} \zeta^{s}(x)\,\chi^{r-\frac{q}{q-2}}(t)\,dx\,dt, \tag{32}$$

$$\iint\limits_{Q_R^\tau} \big|f_{\overline{0},1}(x,t) - f_{\overline{0},2}(x,t)\big|\,|v(x,t)|\,\zeta^s(x)\,\chi^r(t)\,dx\,dt \le \eta_3 \iint\limits_{Q_R^\tau} |v(x,t)|^{p(x)}\,\zeta^s(x)\,\chi^r(t)\,dx\,dt +$$

$$+\,\eta_3^{-\frac{1}{p_0-1}}\,\varphi(p_1)\iint\limits_{Q_R^\tau} \big|f_{\overline{0},1}(x,t) - f_{\overline{0},2}(x,t)\big|^{p^*(x)}\,\zeta^s(x)\,\chi^r(t)\,dx\,dt, \tag{33}$$

де $\eta_1 \in (0;1)$, $r > q/(q-2)$, $\eta_2 > 0$, $\eta_3 \in (0;1)$ — довільні сталі.

З (24) на підставі (25)–(27),(29),(31),(33) для достатньо малих значеннях $\varepsilon, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ отримаємо

$$\chi^r(\tau)\int\limits_{\Omega_R} |v(x,\tau)|^2\,\zeta^s\,dx \;+\; \iint\limits_{Q_R^\tau}\Big[K_1\sum_{|\alpha|\in M_0}|D^\alpha v(x,t)|^2 + (2K_2-\sigma)|v(x,t)|^2 +$$

$$+\,K_3|v(x,t)|^{p(x)}\Big]\,\zeta^s(x)\,\chi^r(t)\,dx\,dt \le C_{11}\sum_{i\in M_0}\iint\limits_{Q_R} \zeta^{s-\frac{2i\,p(x)}{p(x)-2}}(x)\,\eta^r(t)\,dx\,dt +$$

$$+\,C_{12}\iint\limits_{Q_R}\zeta^s(x)\,\eta^{r-\frac{p(x)}{p(x)-2}}(t)\,dx\,dt \;+\; C_{13}\iint\limits_{Q_R}\big|f_{\overline{0},1}(x,t)-f_{\overline{0},2}(x,t)\big|^{p^*(x)}\,\zeta^s(x)\,\chi^r(t)\,dx\,dt +$$

$$+\,C_{14}\iint\limits_{Q_R}\sum_{|\alpha|\in M_0}\big|f_{\alpha,1}(x,t)-f_{\alpha,2}(x,t)\big|^2\,\zeta^s(x)\,\chi^r(t)\,dx\,dt\,, \tag{34}$$

де $s > \frac{2m\,p_0}{p_0-2}$, $r > \frac{p_0}{p_0-2}$ — довільні сталі; $C_{11}, \dots, C_{14}$ — додатні сталі, які залежать тільки від $p_0, p_1, m, n, B_1, B_2, K_1, K_2, K_3, r, s$; $\sigma = 0$, якщо $B_2 = 0$, і $\sigma = K_2$, якщо $B_2 > 0$ (а отже, за нашим припущенням, $K_2 > 0$).

Зауважимо, що $\frac{2m\,p_0}{p_0-2} \geq \frac{2m\,p(x)}{p(x)-2} \geq \frac{2i\,p(x)}{p(x)-2} \geq \frac{2i\,p_1}{p_1-2} \geq \frac{p_1}{p_1-2}$, $\frac{p_0}{p_0-2} \geq \frac{p(x)}{p(x)-2} \geq \frac{p_1}{p_1-2}$ для майже всіх $(x,t) \in Q$, $i \in M_0$. Легко переконатися, що $0 \leq \zeta(x) \leq R$, коли $x \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq \eta(t) \leq R$, якщо $t \leq T$, та $\zeta(x) \geq R - R_0$ при $|x| \leq R_0$, $\eta(t) \geq R - R_0$, коли $|t-T| \leq R_0$. Враховуючи сказане і, зокрема, те, що $R \geq 1$, з (34) отримаємо

$$\max_{t\in[T-R_0,T]} \int\limits_{\Omega_{R_0}} |v(x,t)|^2\,dx + \iint\limits_{Q_{R_0}} \Big[K_1 \sum_{|\alpha|\in M_0} |D^\alpha v(x,t)|^2 + (2K_2 - \sigma)\,|v(x,t)|^2 +$$

$$+ K_3\,|v(x,t)|^{p(x)}\Big]\,dx\,dt \leq \left(\frac{R}{R-R_0}\right)^{r+s} \Big[C_{15}\,R^{n+1-\frac{p_1}{p_1-2}} +$$

$$+ C_{16} \iint\limits_{Q_R} \Big(\big|f_{\overline{0},1}(x,t) - f_{\overline{0},2}(x,t)\big|^{p^*(x)} + \sum_{|\alpha|\in M_0} \big|f_{\alpha,1}(x,t) - f_{\alpha,2}(x,t)\big|^2\Big)\,dx\,dt\Big], \tag{35}$$

де C_{15}, C_{16} — додатні сталі, які залежать тільки від $p_0, p_1, m, n, K_1, K_2, K_3, B_1, B_2, r$ та s.

З (35) легко отримаємо нерівність (18) з $q = p_1$. Звернемо увагу на те, що до цього часу ми припускали, що $K_2 \geq 0$.

Нехай $K_2 > 0$. Візьмемо яке-небудь $q \in (2, p_0]$. Безпосередньо переконуємося, що для довільної точки $(x,t) \in Q$ такої, що $v(x,t)$ і $p(x)$ визначені і $p_0 \leq p(x) \leq p_1$, правильна нерівність

$$K_2\,|v(x,t)|^2 + K_3\,|v(x,t)|^{p(x)} \geq K_4 |v(x,t)|^q, \tag{36}$$

де $K_4 = \min\{K_2, K_3\}$. Міркуючи подібно до того, як це робилося вище, з (24) на підставі (25)– (27), (30), (32), (33) і (36) одержимо (18) з $q \in (2, p_0]$. □

Наслідок з леми 2. *Нехай $p \in \mathbb{P}^*$, $(a_\alpha) \in \mathbb{A}^*_p$ і функції $(f_\alpha) \in \mathbb{F}_p$, $\Phi \in \mathbb{V}_p$, $w \in \mathbb{U}_p$ такі, що $w - \varphi \in \overset{\circ}{H}{}^{m,0}_{\Sigma_{R_*}}(Q_{R_*})$ $\forall\,\varphi \in \Phi$ і*

$$\iint\limits_{Q_{R_*}} \Big\{-w\psi_t + \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,t,\delta_M w) D^\alpha \psi\Big\}\,dx\,dt = \iint\limits_{Q_{R_*}} \sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha D^\alpha \psi\,dx\,dt \tag{37}$$

для будь-яких $\psi \in \overset{\circ}{H}{}^{m,1}_c(Q) \cap L_{p(\cdot)}(Q)$, $\operatorname{supp}\psi \subset \overline{Q_{R_*}}$, де $R_* \geq 1$ — деяке число.

Тоді для будь-яких чисел R_0, R таких, що $0 < R_0 < R \leq R_*, R \geq 1$, справедлива нерівність, яка відрізняється від нерівності (3) тільки тим, що замість u стоїть w.

Доведення. Нехай $\varphi \in \Phi$. Тоді

$$\iint\limits_{Q_R} \Big\{-\varphi\,\psi_t + \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,t,\delta_M\varphi)\,D^\alpha\psi\Big\}\,dx\,dt = \iint\limits_{Q_R} \Big\{\varphi_t\,\psi + \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,t,\delta_M\varphi)\,D^\alpha\psi\Big\}\,dx\,dt \tag{38}$$

для будь-яких $\psi \in \overset{\circ}{H}{}^{m,1}_c(\overline{Q}) \cap L_{p(\cdot)}(Q)$.

З (37) і (38) на підставі леми 2 отримаємо

$$\max_{t\in[T-R_0,T]}\int\limits_{\Omega_{R_0}}\Big|w(x,t)-\varphi(x,t)\Big|^2 dx+\iint\limits_{Q_{R_0}}\Big[\sum_{|\alpha|\in M_0}\Big|D^\alpha w(x,t)-D^\alpha\varphi(x,t)\Big|^2+$$

$$+K_2\Big|w(x,t)-\varphi(x,t)\Big|^2+\Big|w(x,t)-\varphi(x,t)\Big|^{p(x)}\Big]\,dxdt\le\Big(\frac{R}{R-R_0}\Big)^{\varkappa}\Big[C_8\,R^{n+1-\frac{q}{q-2}}+$$

$$+C_9\iint\limits_{Q_R}\Big\{\sum_{|\alpha|\in M_0}\Big|f_\alpha(x,t)\,-\,a_\alpha\big(x,t,\delta_M\varphi(x,t)\big)\Big|^2+ \tag{39}$$

$$+\Big|f_{\overline{0}}(x,t)\,-\,\varphi_t(x,t)\,-\,a_{\overline{0}}\big(x,t,\delta_M\varphi(x,t)\big)\Big|^{p^*(x)}\Big\}\,dx\,dt.$$

Тепер зауважимо, що правильна нерівність

$$|a-b|^q\ge 2^{1-q}|a|^q\,-\,|b|^q \tag{40}$$

для будь-яких $a,b\in\mathbb{R}$ і $q\ge1$. Справді, для $q=1$ ця нерівність очевидна. Нехай $q>1$. Використавши нерівність Гельдера, отримаємо $|a|^q=|a-b+b|^q\le\big(|a-b|+|b|\big)^q\le 2^{q-1}\big(|a-b|^q+|b|^q\big)$, звідки випливає (40). На підставі (40) з (39) отримуємо потрібне. □

4. Побудова наближень розв'язків задачі FP$\big(\mathbb{A}_p^*,\ \mathbb{F}_p,\ \mathbb{V}_p,\ \mathbb{U}_p : p\in\mathbb{P}^*\big)$. Нехай $(a_\alpha)\in\mathbb{A}_p^*$, $(f_\alpha)\in\mathbb{F}_p$, $\Phi\in\mathbb{V}_p$ для деякого $p\in\mathbb{P}^*$ і k - яке-небудь натуральне число, а $\varphi\in\Phi$ — довільна функція. Виберемо функції φ_k і $(f_{\alpha,k})$ такими, щоб $\varphi_k\in H^{m,1}_{\rm loc}(\overline{Q})\cap L_{p(\,\cdot\,),{\rm loc}}(\overline{Q})$, $(f_{\alpha,k})\in\mathbb{F}_p$ і $\varphi_k=\varphi$, $f_{\alpha,k}=f_\alpha$ $(|\alpha|\in M)$ на $Q_{k-3/4}$ та $\varphi_k=0$, $f_{\alpha,k}=0$ $(|\alpha|\in M)$ на $Q\backslash Q_{k-1/2}$.

Шукатимемо функцію $u_k\in H^{m,0}(Q_k)\cap L_{p(\,\cdot\,)}(Q_k)\cap C\big([T-k,T];L_2(\Omega_k)\big)$ таку, що $u_k-\varphi_k\in\overset{\circ}{H}{}^{m,0}(Q_k)$, $u_k\big|_{t=T-k}=0$ і є правильною рівність

$$\iint\limits_{Q_k}\Big\{-u_k\psi_t+\sum_{|\alpha|\in M}a_\alpha(x,t,\delta_M u_k)D^\alpha\psi\Big\}\,dx\,dt=\iint\limits_{Q_k}\Big\{\sum_{|\alpha|\in M}f_{\alpha,k}D^\alpha\psi\Big\}\,dx\,dt \tag{41}$$

для будь-яких $\psi\in\overset{\circ}{H}{}^{m,0}(Q_k)\cap L_{p(\,\cdot\,)}(Q_k)$, $\quad\psi_t\in L_2(Q_k)$, $\quad\psi(\,\cdot\,,T-k)=\psi(\,\cdot\,,T)=0$.

Покажемо, що така функція існує, причому єдина. Для цього спочатку зробимо в рівності (41) заміну $u_k=v_k+\varphi_k$. В результаті, після очевидних перетворень, отримаємо

$$\iint\limits_{Q_k}\Big\{-v_k\psi_t+\sum_{|\alpha|\in M}\widetilde{a}_{\alpha,k}(x,t,\delta_M v_k)D^\alpha\psi\Big\}\,dx\,dt=\iint\limits_{Q_k}\Big\{\sum_{|\alpha|\in M}\widetilde{f}_{\alpha,k}D^\alpha\psi\Big\}\,dx\,dt, \tag{42}$$

де ψ така ж, як в (41),

$$\widetilde{a}_{\alpha,k}\big(x,t,\delta_M v_k(x,t)\big)\overset{\rm def}{=}a_\alpha\big(x,t,\delta_M v_k(x,t)+\delta_M\varphi_k(x,t)\big)-a_\alpha\big(x,t,\delta_M\varphi_k(x,t)\big),\quad |\alpha|\in M,$$

$$\widetilde{f}_{\overline{0},k}(x,t)\overset{\rm def}{=}f_{\overline{0},k}(x,t)-a_{\overline{0}}\big(x,t,\delta_M\varphi_k(x,t)\big)-\varphi_{k,t}(x,t),$$

$$\widetilde{f}_{\alpha,k}(x,t)\overset{\rm def}{=}f_{\alpha,k}(x,t)-a_\alpha\big(x,t,\delta_M\varphi_k(x,t)\big)\ \text{для майже всіх}\ \ (x,t)\in Q,\quad |\alpha|\in M_0.$$

Очевидно, що $(\widetilde{a}_{\alpha,k}) \in \mathbb{A}_p^*$ і $(\widetilde{f}_{\alpha,k}) \in \mathbb{F}_p$, причому

$$\sum_{|\alpha|\in M} \widetilde{a}_{\alpha,k}(x,t,\xi)\,\xi_\alpha \geq K_1 \sum_{|\alpha|\in M_0} |\xi_\alpha|^2 \,+\, K_2\,|\xi_{\overline{0}}|^2 + K_3\,|\xi_{\overline{0}}|^{p(x)}, \tag{43}$$

де K_1, K_2, K_3 ті ж самі, що і в **5**) для (a_α).

Існування функції $v_k \in \overset{\circ}{H}{}^{m,0}(Q_k) \cap L_{p(\,\cdot\,)}(Q_k) \cap C\big([T-k,T]; L_2(\Omega_k)\big)$, $v_k\big|_{t=T-k} = 0$, яка задовольняє тотожність (42), доводиться методом Гальоркіна. Єдиність функції типу u_k, а отже, функції v_k, легко довести, врахувавши зауваження після леми 1 та використавши умову **5**).

5. Доведення теореми.

Розв'язність задачі FP$\big(\mathbb{A}_p^*$, $\mathbb{F}_p$, $\mathbb{V}_p$, $\mathbb{U}_p : p \in \mathbb{P}^*\big)$. Нехай $(a_\alpha) \in \mathbb{A}_p^*$, $(f_\alpha) \in \mathbb{F}_p$, $\Phi \in \mathbb{V}_p$ для деякого $p \in \mathbb{P}^*$. Для кожного $k \in \mathbb{N}$ побудуємо функцію u_k, як в пункті 4, і продовжимо її нулем на Q, залишивши за цим продовженням позначення u_k. Покажемо, що послідовність $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ містить підпослідовність, яка збігається до $u \in \mathbf{SFP}\big((a_\alpha),(f_\alpha),\Phi\big)$.

Нехай k і l — довільні натуральні числа, причому $1 < k < l$; R_0, R — будь-які дійсні числа такі, що $0 < R_0 < R \leq k-1$, $R \geq 1$; q — дійсне число, яке задовольняє відповідні умови з формулювання теореми і таке, що $n+1-q/(q-2) < 0$. Тоді з леми 2, взявши $R_* = k-1$, отримаємо

$$\max_{t\in[T-R_0,T]} \int\limits_{\Omega_{R_0}} |u_k(x,t)-u_l(x,t)|^2\,dx + \iint\limits_{Q_{R_0}} \Big[\sum_{|\alpha|\in M_0} \Big|D^\alpha u_k(x,t) - D^\alpha u_l(x,t)\Big|^2 +$$

$$+\,|u_k(x,t)-u_l(x,t)|^{p(x)}\Big]\,dx\,dt \leq C_8 \left(\frac{R}{R-R_0}\right)^{\varkappa} R^{n+1-q/(q-2)}, \tag{44}$$

де $C_8 > 0$, $\varkappa > 0$ — сталі, які від k, l, R_0 та R не залежать.

Нехай $\varepsilon > 0$ — довільне число. Зафіксуємо довільне значення $R_0 > 0$ і виберемо $R \geq \max\{1; R_0\}$ настільки великим, щоб права частина нерівності (44) була меншою за ε. Тоді для будь-яких $k \geq R+1$ і $l > k$ ліва частина нерівності (44) менша за ε. Це означає, якщо врахувати інтерполяційну нерівність (I.2) на стор. 237 статті [7] (яка дає оцінку проміжних похідних через похідні нульового і найвищого порядків), що послідовність $\big\{u_k\big|_{Q_{R_0}}\big\}_{k=1}^\infty$ є фундаментальною в $H^{m,0}(Q_{R_0}) \cap L_{p(\,\cdot\,)}(Q_{R_0}) \cap C\big([T-R_0,T]; L_2(\Omega_{R_0})\big)$. Оскільки $R_0 > 0$ — довільне число, то звідси випливає існування функції $u \in H^{m,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap L_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap C\big((-\infty,T]; L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\big)$ такої, що

$$u_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{в} \quad H^{m,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap L_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap C\big((-\infty,T]; L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\big). \tag{45}$$

Тепер відмітимо (на підставі умови **4**) на (a_α)), що

$$\iint\limits_{Q_{R_0}} \Big[\sum_{|\alpha|\in M_0} \big|a_\alpha(x,t,\delta_M u_k) - a_\alpha(x,t,\delta_M u)\big|^2 \Big]\,dx\,dt \leq$$

$$\leq (N_M - 1) \iint\limits_{Q_{R_0}} \Big[B_1 \sum_{|\beta|\in M_0} \big|D^\beta(u_k - u)\big|^2 \,+\, B_2 |u_k - u|^2 \Big]\,dx\,dt, \quad R_0 > 0. \tag{46}$$

З (45) і (46), оскільки R_0 — довільне, випливає, що

$$a_\alpha\big(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\delta_M u_k(\,\cdot\,,\,\cdot\,)\big) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} a_\alpha\big(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\delta_M u(\,\cdot\,,\,\cdot\,)\big) \quad \text{в} \quad L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{Q}), \quad |\alpha| \in M_0. \tag{47}$$

Тепер доведемо, що існує підпослідовність $\{u_{k_j}\}_{j=1}^\infty$ послідовності $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ така, що

$$a_{\overline{0}}\big(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\delta_M u_{k_j}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)\big) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} a_{\overline{0}}\big(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\delta_M u(\,\cdot\,,\,\cdot\,)\big) \quad \text{слабо в} \quad L_{p^*(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{Q}). \tag{48}$$

Нехай $R_0 > 0$ — довільне число. З наслідку з леми 2 для будь-якого $k > R_0 + 1$ ($k \in \mathbb{N}$) маємо

$$\max_{t\in[T-R_0,T]} \int\limits_{\Omega_{R_0}} \big|u_k(x,t)\big|^2\,dx + \iint\limits_{Q_{R_0}} \Big[\sum_{|\alpha|\in M_0} \big|D^\alpha u_k(x,t)\big|^2 + |u_k(x,t)|^{p(x)}\Big]\,dx\,dt \le C_{17}(R_0), \tag{49}$$

де $C_{17}(R_0) > 0$ — стала, яка від k не залежить.

На підставі умови **2**) і нерівності Гельдера, врахувавши (49), маємо

$$\iint\limits_{Q_{R_0}} \Big|a_{\overline{0}}\big(x,t,\delta_M u_k(x,t)\big)\Big|^{p^*(x)}\,dx\,dt \le$$

$$\le \iint\limits_{Q_{R_0}} \Big|h_{\overline{0}}(x,t)\Big(|\delta_M u_k(x,t)|^{2/p^*(x)} + |u_k(x,t)|^{p(x)-1}\Big) + g_{\overline{0}}(x,t)\Big|^{p^*(x)}\,dx\,dt \le \tag{50}$$

$$\le \iint\limits_{Q_{R_0}} \Big(2\,\big|h_{\overline{0}}(x,t)\big|^{p(x)} + 1\Big)^{\frac{p^*(x)}{p(x)}} \Big(|\delta_M u_k(x,t)|^2 + |u_k(x,t)|^{p(x)} + |g_{\overline{0}}(x,t)|^{p^*(x)}\Big)dxdt \le C_{18}(R_0),$$

де $C_{18}(R_0) > 0$ — стала, яка від k не залежить, але може залежати від R_0.

На підставі (45), (50) і умови **1**), врахувавши рефлексивність простору $L_{p(\,\cdot\,)}(Q_{R_0})$, можна зробити висновок про існування підпослідовності $\{u_{k_j}\}_{j=1}^\infty$ послідовності $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ та функції $\chi_{\overline{0}} \in L_{p^*(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ таких, що

$$u_{k_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u, \quad a_{\overline{0}}\big(\cdot,\cdot,\delta_M u_{k_j}(\cdot,\cdot)\big) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} a_{\overline{0}}\big(\cdot,\cdot,\delta_M u(\cdot,\cdot)\big) \quad \text{майже скрізь на} \quad Q, \tag{51}$$

$$a_{\overline{0}}\big(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\delta_M u_{k_j}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)\big) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \chi_{\overline{0}}(\,\cdot\,,\,\cdot\,) \quad \text{слабо в} \quad L_{p^*(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{Q}). \tag{52}$$

З (51), (52) та леми 1.3 роботи [3; ст.25] отримаємо, що

$$\chi_{\overline{0}}(\,\cdot\,,\,\cdot\,) = a_{\overline{0}}\big(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\delta_M u(\,\cdot\,,\,\cdot\,)\big). \tag{53}$$

Нехай $\psi \in \overset{\circ}{H}{}^{m,1}_{\mathrm{c}}(\overline{Q}) \cap L_{p(\,\cdot\,)}(Q)$. Для кожного $j \ge j_0$, де $j_0 \in \mathbb{N}$ таке, що $\operatorname{supp}\psi \subset \overline{Q_{k_{j_0}}}$, з означення u_{k_j} маємо

$$\iint\limits_{Q} \Big\{-u_{k_j}\psi_t + \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,t,\delta_M u_{k_j}) D^\alpha\psi\Big\}\,dx\,dt = \iint\limits_{Q} \Big\{\sum_{|\alpha|\in M} f_{\alpha,k_j}\, D^\alpha\psi\Big\}\,dx\,dt. \tag{54}$$

Перейдемо в (54) до границі при $j \to +\infty$, врахувавши (45), (47), (52), (53), а також те, що $f_{\alpha,k_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} f$ в $\mathbb{F}_p$. В результаті отримаємо (2) для заданої функції ψ. Оскільки ψ — довільна функція, і $u_{k_j} - \varphi_{k_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u - \varphi$ в $\overset{\circ}{H}{}^{m,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, то ми довели, що $u \in \mathbf{SFP}\big((a_\alpha), (f_\alpha), \Phi\big)$.

Однозначність задачі $\mathbf{FP}\big(\mathbb{A}^*_p,\ \mathbb{F}_p,\ \mathbb{V}_p,\ \mathbb{U}_p\ :\ p \in \mathbb{P}^*\big)$. Нехай $(a_\alpha) \in \mathbb{A}^*_p$, $(f_\alpha) \in \mathbb{F}_p$, $\Phi \in \mathbb{V}_p$ для деякого $p \in \mathbb{P}^*$. Доведемо, що множина $\mathbf{SFP}\big((a_\alpha), (f_\alpha), \Phi\big)$ містить не більше одного елемента. Припустимо протилежне. Нехай u_1, u_2 — (різні) елементи множини $\mathbf{SFP}\big((a_\alpha), (f_\alpha), \Phi\big)$. З леми 2 ($R_*$ — довільне число) маємо

$$\max_{t\in[T-R_0,T]} \int\limits_{\Omega_{R_0}} |u_1(x,t) - u_2(x,t)|^2\, dx \le C_8 \cdot \left(\frac{R}{R-R_0}\right)^{\varkappa} \cdot R^{n+1-q/(q-2)}, \tag{55}$$

де R_0, R — довільні сталі такі, що $0 < R_0 < R$, $R \ge 1$, $q > 0$ — таке, що $n+1-q/(q-2) < 0$, а $C_8 > 0$, $\varkappa$ — сталі, які від R_0 і R не залежать.

Зафіксуємо $R_0 > 0$ і перейдемо в (55) до границі при $R \to +\infty$. В результаті отримаємо, що $u_1 = u_2$ на Q_{R_0}. Оскільки $R_0 > 0$ — довільне число, то звідси маємо, що $u_1 = u_2$ майже скрізь на Q.

Коректність задач $\mathbf{FP}\big(\mathbb{A}^*_p,\ \mathbb{F}_p,\ \overset{\circ}{\mathbb{V}}_p,\ \mathbb{U}_p : p \in \mathbb{P}^*\big)$ і $\mathbf{FP}\big(\mathbb{A}^{**}_p,\ \mathbb{F}_p,\ \mathbb{V}_p,\ \mathbb{U}_p : p \in \mathbb{P}^*\big)$. Задачі $\mathbf{FP}\big(\mathbb{A}^*_p, \mathbb{F}_p, \overset{\circ}{\mathbb{V}}_p, \mathbb{U}_p : p \in \mathbb{P}^*\big)$ і $\mathbf{FP}\big(\mathbb{A}^{**}_p, \mathbb{F}_p, \mathbb{V}_p, \mathbb{U}_p : p \in \mathbb{P}^*\big)$ є частковими випадками задачі $\mathbf{FP}\big(\mathbb{A}^*_p, \mathbb{F}_p, \mathbb{V}_p, \mathbb{U}_p : p \in \mathbb{P}^*\big)$, а тому їх однозначна розв'язність випливає з однозначної розв'язності задачі $\mathbf{FP}\big(\mathbb{A}^*_p, \mathbb{F}_p, \mathbb{V}_p, \mathbb{U}_p : p \in \mathbb{P}^*\big)$.

Розглянемо спочатку задачу $\mathbf{FP}\big(\mathbb{A}^{**}_p,\ \mathbb{F}_p,\ \mathbb{V}_p,\ \mathbb{U}_p\ :\ p \in \mathbb{P}^*\big)$. Нехай $(a_{\alpha,k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} (a_\alpha)$ в $\mathbb{A}^{**}_p$, $(f_{\alpha,k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} (f_\alpha)$ в $\mathbb{F}_p$, $\Phi_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \Phi$ в $\mathbb{V}_p$ і $u_k \in \mathbf{SFP}\big((a_{\alpha,k}), (f_{\alpha,k}), \Phi_k\big)$, $k \in \mathbb{N}$, та $u \in \mathbf{SFP}\big((a_\alpha), (f_\alpha), \Phi\big)$. Виберемо функцію φ та послідовність $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ такі, що $\varphi \in \Phi$, $\varphi_k \in \Phi_k$, $k \in \mathbb{N}$, і $\varphi_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \varphi$ в $H^{m,1}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap L_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$. З означення функцій $u_k, k \in \mathbb{N}$, та u маємо

$$\iint\limits_Q \Big\{-v\,\psi_t + \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha\big(x,t,\delta_M\varphi{+}\delta_M v\big) D^\alpha\psi\Big\}\, dx\, dt = \iint\limits_Q \Big\{\sum_{|\alpha|\in M_0} f_\alpha D^\alpha\,\psi + (f_{\overline{0}}{-}\varphi_t)\,\psi\Big\}\, dx\, dt, \tag{56}$$

$$\iint\limits_Q \Big\{-v_k\psi_t\ +\ \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha\big(x,t,\delta_M\varphi + \delta_M\, v_k\big) D^\alpha\psi\Big\}\, dx\, dt =$$

$$= \iint\limits_Q \Big\{\sum_{|\alpha|\in M_0} \Big(f_{\alpha,k}\ +\ a_\alpha\big(x,t,\delta_M\varphi + \delta_M\, v_k\big) -\ a_{\alpha,k}\big(x,t,\delta_M\varphi_k + \delta_M\, v_k\big)\Big) D^\alpha\psi\, +$$

$$+\Big(f_{\overline{0},k} + a_{\overline{0}}\big(x,t,\delta_M\varphi + \delta_M\, v_k\big) -\ a_{\overline{0},k}\big(x,t,\delta_M\varphi_k + \delta_M\, v_k\big) -\ \varphi_{k,t}\Big)\psi\Big\}\, dx\, dt, \tag{57}$$

де $v \overset{\mathrm{def}}{=} u - \varphi$, $v_k \overset{\mathrm{def}}{=} u_k - \varphi_k\ \forall\ k \in \mathbb{N}$, ψ — довільна функція з $\overset{\circ}{H}{}^{m,1}_{\mathrm{c}}(\overline{Q}) \cap L_{p(\cdot)}(Q)$. Нехай R_0 і R — довільні сталі такі, що $0 < R_0 < R$, $R \ge 1$.

З (56) і (57) на підставі леми 2 маємо

$$\max_{t\in[T-R_0,T]}\int\limits_{\Omega_{R_0}}|v_k(x,t)-v(x,t)|^2\,dx+\iint\limits_{Q_{R_0}}\Big[\sum_{|\alpha|\in M_0}\Big|D^\alpha v_k(x,t)-D^\alpha v(x,t)\Big|^2+$$

$$+|v_k(x,t)-v(x,t)|^{p(x)}\Big]\,dx\,dt\le\left(\frac{R}{R-R_0}\right)^{\varkappa}\Big[C_8\,R^{n+1-q/(q-2)}+$$

$$+C_9\iint\limits_{Q_R}\Big\{\sum_{|\alpha|\in M_0}\Big|f_{\alpha,k}-\ f_\alpha\ +\ a_\alpha\big(x,t,\delta_M\varphi+\delta_M v_k\big)-a_{\alpha,k}\big(x,t,\delta_M\varphi_k+\delta_M v_k\big)\Big|^2+$$

$$+\Big|f_{\overline{0},k}-\ f_{\overline{0}}+\ a_{\overline{0}}\big(x,t,\delta_M\varphi+\delta_M v_k\big)-a_{\overline{0},k}\big(x,t,\delta_M\varphi_k+\delta_M v_k\big)-\varphi_{k,t}+\ \varphi_t\Big|^{p^*(x)}\Big\}\,dx\,dt,\quad(58)$$

де C_8, C_9, $\varkappa$, q — сталі, які від R_0 та R не залежать, причому $n+1-q/(q-2)<0$.

Для α таких, що $|\alpha|\in M_0$, зробимо такі оцінки:

$$\iint\limits_{Q_R}\Big|f_{\alpha,k}-\ f_\alpha\ +\ a_\alpha\big(x,t,\delta_M\varphi+\delta_M v_k\big)-a_{\alpha,k}\big(x,t,\delta_M\varphi_k+\delta_M v_k\big)\Big|^2\,dx\,dt\le\qquad(59)$$

$$\le 2\Big[\iint\limits_{Q_R}\big|f_{\alpha,k}-f_\alpha\big|^2\,dx\,dt+\iint\limits_{Q_R}\Big|a_{\alpha,k}\big(x,t,\delta_M\varphi_k+\delta_M v_k\big)-a_\alpha\big(x,t,\delta_M\varphi+\delta_M v_k\big)\Big|^2\,dx\,dt\Big],$$

$$\iint\limits_{Q_R}\Big|a_{\alpha,k}\big(x,t,\delta_M\varphi_k+\delta_M v_k\big)-a_\alpha\big(x,t,\delta_M\varphi+\delta_M v_k\big)\Big|^2\,dx\,dt\le$$

$$\le 2\iint\limits_{Q_R}\Big|a_{\alpha,k}\big(x,t,\delta_M\varphi_k+\delta_M v_k\big)-a_\alpha\big(x,t,\delta_M\varphi_k+\delta_M v_k\big)\Big|^2\,dx\,dt+$$

$$+2\iint\limits_{Q_R}\Big|a_\alpha\big(x,t,\delta_M\varphi_k+\delta_M v_k\big)-a_\alpha\big(x,t,\delta_M\varphi+\delta_M v_k\big)\Big|^2\,dx\,dt,\qquad(60)$$

$$\iint\limits_{Q_R}\Big|a_{\alpha,k}\big(x,t,\delta_M\varphi_k+\delta_M v_k\big)-a_\alpha\big(x,t,\delta_M\varphi_k+\delta_M v_k\big)\Big|^2\,dx\,dt\le$$

$$\le\iint\limits_{Q_R}\left(\sup_{\xi\in\mathbb{R}^{N_M}}\frac{\big|a_{\alpha,k}(x,t,\xi)-a_\alpha(x,t,\xi)\big|^2}{\big(1+\ |\xi|\big)^2}\right)\big(1+\ |\delta_M u_k|\big)^2\,dx\,dt\le$$

$$\le\ 2\left(\operatorname*{ess\,sup}_{(x,t)\in Q_R}\ \sup_{\xi\in\mathbb{R}^{N_M}}\frac{\big|a_{\alpha,k}(x,t,\xi)-a_\alpha(x,t,\xi)\big|}{1+\ |\xi|}\right)^2\iint\limits_{Q_R}\big(1+\ |\delta_M u_k|^2\big)\,dx\,dt.\qquad(61)$$

На підставі умови **4**) маємо

$$\iint\limits_{Q_R}\Big|a_\alpha\big(x,t,\delta_M\varphi_k+\delta_M v_k\big)-a_\alpha\big(x,t,\delta_M\varphi+\delta_M v_k\big)\Big|^2\,dx\,dt\le$$

$$\le\max\big\{B_1,B_2\big\}\iint\limits_{Q_R}\big|\delta_M\varphi_k-\delta_M\varphi\big|^2\,dx\,dt,\quad |\alpha|\in M_0\,.\qquad(62)$$

З (59)-(62) випливає, що

$$\iint\limits_{Q_R} \sum_{|\alpha|\in M_0} \Big| f_{\alpha,k} - f_\alpha + a_\alpha\big(x,t,\delta_M\varphi + \delta_M v_k\big) - a_{\alpha,k}\big(x,t,\delta_M\varphi_k + \delta_M v_k\big)\Big|^2 dx\,dt \le$$

$$\le 2\iint\limits_{Q_R} \sum_{|\alpha|\in M_0} \big|f_{\alpha,k} - f_\alpha\big|^2 dx\,dt + C_{19}\Bigg[\Bigg(\operatorname{ess}\sup_{(x,t)\in Q_R}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^{N_M}} \frac{\big|a_{\alpha,k}(x,t,\xi) - a_\alpha(x,t,\xi)\big|}{1+|\xi|}\Bigg)^2 \times$$

$$\times \iint\limits_{Q_R} \big(1 + |\delta_M u_k|^2\big)\,dx\,dt \quad + \iint\limits_{Q_R} \big|\delta_M\varphi_k - \delta_M\varphi\big|^2 dx\,dt\Bigg], \tag{63}$$

де $C_{19} > 0$ — стала, яка від k не залежить.
З наслідку леми 2 випливає, що для будь-якого $R > 0$ маємо

$$\iint\limits_{Q_R} \Big(\big|\delta_M u_k(x,t)\big|^2 + \big|u_k(x,t)\big|^{p(x)}\Big)\,dx\,dt \le C_{20}(R), \tag{64}$$

де $C_{20}(R) > 0$ — стала, яка від $k \in \mathbb{N}$ не залежить.

З (63) і (64) на підставі припущень стосовно $\{(a_{\alpha,k})\}_{k=1}^\infty$, $\{(f_{\alpha,k})\}_{k=1}^\infty$, $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ випливає, що для будь-якого фіксованого $R > 0$ ліва частина нерівності (63) прямує до нуля при $k \to \infty$.

Тепер, використовуючи нерівність Гельдера, зробимо такі оцінки:

$$\iint\limits_{Q_R} \Big| f_{\overline{0},k}(x,t) - f_{\overline{0}}(x,t) + a_{\overline{0}}\big(x,t,\delta_M\varphi(x,t) + \delta_M v_k(x,t)\big) -$$

$$- a_{\overline{0},k}\big(x,t,\delta_M\varphi_k(x,t) + \delta_M v_k(x,t)\big) - \varphi_{k,t}(x,t) + \varphi_t(x,t)\Big|^{p^*(x)} dx\,dt \le$$

$$\le 3^{\frac{1}{p_0-1}}\Bigg[\iint\limits_{Q_R} \big|f_{\overline{0},k}(x,t) - f_{\overline{0}}(x,t)\big|^{p^*(x)} dx\,dt + \iint\limits_{Q_R} \big|\varphi_{k,t}(x,t) - \varphi_t(x,t)\big|^{p^*(x)} dx\,dt + \tag{65}$$

$$+ \iint\limits_{Q_R} \Big|a_{\overline{0},k}\big(x,t,\delta_M\varphi_k(x,t) + \delta_M v_k(x,t)\big) - a_{\overline{0}}\big(x,t,\delta_M\varphi(x,t) + \delta_M v_k(x,t)\big)\Big|^{p^*(x)} dx\,dt\Bigg],$$

$$\iint\limits_{Q_R} \Big|a_{\overline{0},k}\big(x,t,\delta_M\varphi_k(x,t) + \delta_M v_k(x,t)\big) - a_{\overline{0}}\big(x,t,\delta_M\varphi(x,t) + \delta_M v_k(x,t)\big)\Big|^{p^*(x)} dx\,dt \le$$

$$\le 2^{\frac{1}{p_0-1}}\Bigg[\iint\limits_{Q_R} \Big|a_{\overline{0},k}\big(x,t,\delta_M\varphi_k(x,t) + \delta_M v_k(x,t)\big) - a_{\overline{0}}\big(x,t,\delta_M\varphi_k(x,t) + \delta_M v_k(x,t)\big)\Big|^{p^*(x)} dx\,dt +$$

$$+ \iint\limits_{Q_R} \Big|a_{\overline{0}}\big(x,t,\delta_M\varphi_k(x,t) + \delta_M v_k(x,t)\big) - a_{\overline{0}}\big(x,t,\delta_M\varphi(x,t) + \delta_M v_k(x,t)\big)\Big|^{p^*(x)} dx\,dt\Bigg], \tag{66}$$

$$\iint\limits_{Q_R} \Big|a_{\overline{0},k}\big(x,t,\delta_M\varphi_k(x,t) + \delta_M v_k(x,t)\big) - a_{\overline{0}}\big(x,t,\delta_M\varphi_k(x,t) + \delta_M v_k(x,t)\big)\Big|^{p^*(x)} dx\,dt \le$$

$$\le \iint\limits_{Q_R} \Bigg(\sup_{\xi\in\mathbb{R}^{N_M}} \frac{\big|a_{\overline{0},k}(x,t,\xi) - a_{\overline{0}}(x,t,\xi)\big|}{1 + |\xi|^{2/p^*(x)} + |\xi_{\overline{0}}|^{p(x)-1}}\Bigg)^{p^*(x)} \times$$

$$\times\Big(1+\big|\delta_M u_k(x,t)\big|^{2/p^*(x)}++\big|u_k(x,t)\big|^{p(x)-1}\Big)^{p^*(x)}dxdt\le$$

$$\le 3^{\frac{1}{p_0-1}}\max_{l\in\{0,1\}}\Bigg(\operatorname{ess}\sup_{(x,t)\in Q_R}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^{N_M}}\frac{\big|a_{\overline{0},k}(x,t,\xi)-a_{\overline{0}}(x,t,\xi)\big|}{1+|\xi|^{2/p^*(x)}+|\xi_{\overline{0}}|^{p(x)-1}}\Bigg)^{p_l/(p_l-1)}\times$$
$$\times\iint\limits_{Q_R}\Big(1+\big|\delta_M u_k(x,t)\big|^2+\big|u_k(x,t)\big|^{p(x)}\Big)\,dx\,dt. \tag{67}$$

На підставі умови **6**) отримаємо

$$\iint\limits_{Q_R}\Big|a_{\overline{0}}\big(x,t,\delta_M\varphi_k(x,t)+\delta_M v_k(x,t)\big)-a_{\overline{0}}\big(x,t,\delta_M\varphi(x,t)+\delta_M v_k(x,t)\big)\Big|^{p^*(x)}dx\,dt\le$$
$$\le\iint\limits_{Q_R}\big|\widetilde{h}_{\overline{0}}(x,t)\big|^{p^*(x)}\Big|\Big(\big|\delta_M\varphi_k(x,t)+\delta_M v_k(x,t)\big|+\big|\delta_M\varphi(x,t)+\delta_M v_k(x,t)\big|\Big)^{(p(x)-2)/p(x)}\times$$
$$\times\big|\delta_M\varphi_k(x,t)-\delta_M\varphi(x,t)\big|+\Big(\big|\varphi_k(x,t)+v_k(x,t)\big|+\big|\varphi(x,t)+v_k(x,t)\big|\Big)^{p(x)-2}\times$$
$$\times\big|\varphi_k(x,t)-\varphi(x,t)\big|\Big|^{p^*(x)}dx\,dt\le C_{21}(R)\iint\limits_{Q_R}\Big\{\Big(\big|\delta_M\varphi_k(x,t)\big|+\big|\delta_M\varphi(x,t)\big|+ \tag{68}$$
$$+\big|\delta_M v_k(x,t)\big|\Big)^{(p(x)-2)/(p(x)-1)}\cdot\big|\delta_M\varphi_k(x,t)-\delta_M\varphi(x,t)\big|^{p(x)/(p(x)-1)}+$$
$$+\Big(\big|\varphi_k(x,t)\big|+\big|\varphi(x,t)\big|+\big|v_k(x,t)\big|\Big)^{p(x)(p(x)-2)/(p(x)-1)}\cdot\big|\varphi_k(x,t)-\varphi(x,t)\big|^{p(x)/(p(x)-1)}\Big\}\,dx\,dt.$$

Застосувавши нерівність Гельдера ([14]) з $r(x)=2(p(x)-1)/(p(x)-2)$, $r^*(x)=2(p(x)-1)/p(x)$, $x\in\Omega$, та використавши твердження 1, отримаємо

$$\iint\limits_{Q_R}\Big(\big|\delta_M\varphi_k(x,t)\big|+\big|\delta_M\varphi(x,t)\big|+\big|\delta_M v_k(x,t)\big|\Big)^{(p(x)-2)/(p(x)-1)}\times$$
$$\times\big|\delta_M\varphi_k(x,t)-\delta_M\varphi(x,t)\big|^{p(x)/(p(x)-1)}\,dx\,dt\le$$

$$\le C_{22}(R)\Big\|\Big(\big|\delta_M\varphi_k(\cdot,\cdot)\big|+\big|\delta_M\varphi(\cdot,\cdot)\big|+\big|\delta_M v_k(\cdot,\cdot)\big|\Big)^{(p(\cdot)-2)/(p(\cdot)-1)}\Big\|_{L_{r(\cdot)}(Q_R)}\times$$
$$\times\Big\|\big|\delta_M\varphi_k(\cdot,\cdot)-\delta_M\varphi(\cdot,\cdot)\big|^{p(\cdot)/(p(\cdot)-1)}\Big\|_{L_{r^*(\cdot)}(Q_R)}\le \tag{69}$$
$$\le C_{22}(R)\cdot\,\mathbf{S}_{\frac{p-2}{2(p-1)}}\Big(\big\|\,|\delta_M\varphi_k|+|\delta_M\varphi|+|\delta_M v_k|\,\big\|^2_{L_2(Q_R)}\Big)\cdot\,\mathbf{S}_{\frac{p}{2(p-1)}}\Big(\big\|\delta_M\varphi_k-\delta_M\varphi\big\|^2_{L_2(Q_R)}\Big),$$

де $\mathbf{S}_q$ визначено в твердженні 1, $C_{22}(R)>0$ — стала, яка від k не залежить.

Тепер використаємо нерівність Гельдера з $r(x)=(p(x)-1)/(p(x)-2)$, $r^*(x)=p(x)-1$, $x\in\Omega$, і твердження 1. Тоді

$$\iint\limits_{Q_R}\Big(\big|\varphi_k(x,t)\big|+\big|\varphi(x,t)\big|+\big|v_k(x,t)\big|\Big)^{(p(x)-2)p(x)/(p(x)-1)}\cdot\big|\varphi_k(x,t)-\varphi(x,t)\big|^{p(x)/(p(x)-1)}\,dx\,dt\le$$

$$\le C_{23}(R)\Big\|\Big(\big|\varphi_k(\,\cdot\,,\,\cdot\,)\big| + \big|\varphi(\,\cdot\,,\,\cdot\,)\big| + \big|v_k(\,\cdot\,,\,\cdot\,)\big|\Big)^{(p(\,\cdot\,)-2)p(\,\cdot\,)/(p(\,\cdot\,)-1)}\Big\|_{L_{r(\,\cdot\,)}(Q_R)}\times$$
$$\times\Big\|\big|\varphi_k(\,\cdot\,,\,\cdot\,) - \varphi(\,\cdot\,,\,\cdot\,)\big|^{p(\,\cdot\,)/(p(\,\cdot\,)-1)}\Big\|_{L_{r^*(\,\cdot\,)}(Q_R)} \le \tag{70}$$
$$\le C_{24}(R)\cdot\ \mathbf{S}_{\frac{p-2}{p-1}}\Big(\iint\limits_{Q_R}\Big(\big|\varphi_k(x,t)\big| + \big|\varphi(x,t)\big| + \big|v_k(x,t)\big|\Big)^{p(x)}dx\,dt\Big)\times$$
$$\times\mathbf{S}_{\frac{1}{p-1}}\Big(\iint\limits_{Q_R}\big|\varphi_k(x,t) - \varphi(x,t)\big|^{p(x)}dx\,dt\Big) \le$$
$$\le C_{25}(R)\,\mathbf{S}_{\frac{p-2}{p-1}}\Big(\,\mathbf{S}_p\,\big(\big\|\,|\varphi_k| + |\varphi| + |v_k|\,\big\|_{L_{p(\,\cdot\,)}(Q_R)}\big)\Big)\cdot\mathbf{S}_{\frac{1}{p-1}}\Big(\,\mathbf{S}_p\,\big(\big\|\varphi_k - \varphi\big\|_{L_{p(\,\cdot\,)}(Q_R)}\big)\Big).$$

Враховуючи те, що

$$\big\|\,|\delta_M\varphi_k| + |\delta_M\varphi| + |\delta_M v_k|\,\big\|^2_{L_2(Q_R)} \le C_{26}(R),\quad \big\|\,|\varphi_k| + |\varphi| + |v_k|\,\big\|_{L_{p(\,\cdot\,)}(Q_R)} \le C_{27}(R),$$

де $C_{26}(R)$, $C_{27}(R)$ — сталі, які від k не залежать, і те, що $\sum_{|\alpha|\in M_0}\big\|f_{\alpha,k} - f_\alpha\big\|_{L_2(Q_R)}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0$, $\big\|f_{\overline{0},k} - f_{\overline{0}}\big\|_{L_{p^*(\,\cdot\,)}(Q_R)}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0$, $\big\|\varphi_k - \varphi\big\|_{L_{p(\,\cdot\,)}(Q_R)}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0$, $\big\|\delta_M\varphi_k - \delta_M\varphi\big\|_{L_2(Q_R)}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0$, $\big\|\varphi_{k,t} - \varphi_t\big\|_{L_{p^*(\,\cdot\,)}(Q_R)}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0$, з (66)–(70) отримаємо, що ліва частина нерівності (65) прямує до нуля при $k\to\infty$.

Нехай $\varepsilon > 0$ — довільне число. Зафіксуємо довільно вибране $R_0 > 0$ і виберемо $R \ge \max\{1; 2R_0\}$ настільки великим, щоб

$$C_8\left(\frac{R}{R-R_0}\right)^{\varkappa}R^{n+1-q/(q-2)} < \frac{\varepsilon}{2}\,, \tag{71}$$

і зафіксуємо це значення.

Оскільки $\frac{R}{R-R_0} \le 1 + \frac{R}{R-R_0} \le 2$, то зі сказаного вище випливає існування $k_0\in\mathbb{N}$ такого, що для будь-яких $k \ge k_0$

$$C_9\left(\frac{R}{R-R_0}\right)^{\varkappa}\iint\limits_{Q_R}\Big\{\sum_{|\alpha|\in M_0}\Big|f_{\alpha,k} - f_\alpha + a_\alpha\big(x,t,\delta_M\varphi + \delta_M v_k\big) - a_{\alpha,k}\big(x,t,\delta_M\varphi_k + \delta_M v_k\big)\Big|^2 +$$
$$+\Big|f_{\overline{0},k} - f_{\overline{0}} + a_{\overline{0}}\big(x,t,\delta_M\varphi+\delta_M v_k\big) - a_{\overline{0},k}\big(x,t,\delta_M\varphi_k+\delta_M v_k\big) - \varphi_{k,t} + \varphi_k\Big|^{p^*(x)}\Big\}\,dx\,dt < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{72}$$

З (58), врахувавши (71) і (72), для будь-яких $k \ge k_0$ отримаємо

$$\max_{t\in[T-R_0,T]}\int\limits_{\Omega_{R_0}}|v_k(x,t) - v(x,t)|\,dx + \iint\limits_{Q_{R_0}}\Big[\sum_{|\alpha|\in M_0}\Big|D^\alpha v_k(x,t) - D^\alpha v(x,t)\Big|^2 +$$
$$+\,|v_k(x,t) - v(x,t)|^{p(x)}\Big]\,dx\,dt \le \varepsilon.$$

Звідси випливає, що $u_k\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}u$ в $\mathbb{U}_p$. Отже, ми довели коректність задачі $\mathbf{FP}\big(\mathbb{A}^{**}_p,\mathbb{F}_p,\mathbb{V}_p,\,\mathbb{U}_p : p\in\mathbb{P}^*\big)$.

Розглянемо тепер задачу $\mathbf{FP}\big(\mathbb{A}^*_p,\,\mathbb{F}_p,\,\overset{\circ}{\mathbb{V}}_p,\,\mathbb{U}_p : p\in\mathbb{P}^*\big)$. Використовуючи подібні до проведених вище міркування і врахувавши при цьому, що $\varphi = 0$, $\varphi_k = 0$, $k\in\mathbb{N}$ (а отже, зробивши відповідні зміни, зокрема, пропускаючи нерівності типу (60), (62), (66), (68)–(70)), отримаємо потрібне. $\square$

ЛІТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н. *Теоремы единственности для уравнения теплопроводности* // Мат. сб. – 1935. – Т. 42, №2. – С.199–216.
2. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
3. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 608 с.
4. Бокало Н.М. *О единственности решения задачи Фурье для квазилинейных уравнений типа нестационарной фильтрации* // УМН. – 1984. – Т.39, Вып.2. – С.139–140.
5. Brezis H. *Semilinear equations in* $\mathbb{R}^N$ *without conditions at infinity* // Appl. Math. Optim. – 1984. – №12. – P.271–282.
6. Di Benedetto E., Herero M.A. *On the Caushy problem and initial traces for a degenerate parabolic equation* // Translation of the AMS. – 1989. – V.314, №1. – P.187–224.
7. Bernis F. *Elliptic and parabolic semilinear problems without conditions at infinity* // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1989. – V.106, №3. – P.217–241.
8. Бокало Н.М. *О задаче без начальних условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений* // Труды семинара им. И.Г.Петровского. – 1989. – Вып.14. – С.3–44.
9. Бокало Н.М. *Задача Фурье для полулинейных параболических уравнений произвольного порядка в неограниченных областях* // Нелинейные граничные задачи. – 2000. – Вып.10. – С.9–15.
10. Лавренюк С.П., Процах Н.П. *Задача Фур'є для ультрапараболічного рівняння* // Нелинейные граничные задачи. – 2002. – №12. – С.128–139.
11. Domans'ka G.P., Lavrenyuk S.P. *The initial-boundery value problem for nonlinear pseudoparabolic system* . – Математичні студії. – 2002. – Т.17, №2. – С.175–188.
12. Gladkov A., Guedda M. *Diffusion-absorption equation without growth restridtions on the data at infinity* // J. Math. Anal. Appl. – 2002. – V.269, №1. – P.16–37.
13. Бугрій О.М. *Параболічні варіаційні нерівності в узагальнених просторах Лебега* // Наукові записки Вінницького державного педагогічного ун-ту ім.М.Коцюбинського. Серія фіз.-мат. – 2002. – Вип.1. – С.310–321.
14. Kováčik O., Rákosníc J. *On spaces* $L^{p(x)}(\Omega)$ *and* $W^{1,p(x)}$ // Czechosl. Math. J. – 1991. – V.41, №4. – P.592–618.

Львівський національний університет імені Івана Франка
mm_bokalo@franko.lviv.ua

Надійшло 4.01.2006