УДК 517.51

В. К. Маслюченко

ПРО НАРІЗНІ І СУКУПНІ МОДИФІКАЦІЇ НЕПЕРЕРВНОСТІ

V. K. Maslyuchenko. *On separate and joint modifications of continuity*, Matematychni Studii, **25** (2006) 213–218.

It is proved that every horizontal somewhat continuous and nearly somewhat continuous with respect to the second variable mapping of the product of a Baire space X and topological spaces Y with countable pseudobase in topological spaces Z is joint nearly somewhat continuous. Corollaries of this result, in particular, a theorem on the quasi-continuity of K_hK-functions are obtained.

В. К. Маслюченко. *О раздельных и совокупных модификациях непрерывности* // Математичні Студії. – 2006. – Т.25, №2. – С.213–218.

Доказано, что каждое горизонтально едва непрерывное и почти едва непрерывное относительно второй переменной отображение $f\colon X\times Y\to Z$ произведения бэровского пространства X и топологического пространсва Y с счетной псевдобазой в топологическое пространство Z, будет совокупно почти едва непрерывным, и получены следствия этого результата, в частности, теорему о квазинепрерывности K_hK-функций.

1. Відправним пунктом досліджень даної праці є такі результати.

Теорема А [1]. *Нехай X — берівський простір, Y — топологічний простір зі зліченною базою і Z — цілком регулярний простір. Тоді кожне нарізно ледь неперервне відображення $f\colon X\times Y\to Z$ буде майже ледь неперервним.*

Теорема Б [2,3]. *Нехай X — берівський простір, Y — топологічний простір зі зліченною псевдобазою і Z — метризовний простір. Тоді кожне горизонтально квазінеперервне відносно другої змінної відображення $f\colon X\times Y\to Z$ буде квазінеперервним.*

Теорема А давала відповідь на одне питання З.Пьотровського з огляду [4], а теорема Б розвивала деякі результати С.Кемпістого [5] і Н.Мартіна [6]. Доведення цих теорем були різними, хоча обидва використовували категорний метод і схожі класифікаційні процедури. Самі ж теореми А і Б не сприймалися як щось одне і в дисертації [3] були поміщені в різних розділах.

У процесі підготовки до своїх лекцій на третій літній математичній школі в Козьовій автор помітив, що можна однотипно встановити значно точніші теореми, наслідками яких будуть вказані результати. При цьому ми вводимо два нових поняття — горизонтальну ледь неперервність і змішану майже ледь неперервність (див. п. 3), а також аналізуємо з загальних позицій різні модифікації неперервності, розглядаючи $\mathcal{A}$ - неперервні і сильно $\mathcal{A}$-неперервні в точці відображення.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 54C05.

2. Різноманітні модифікації неперервності (про них див. праці [4, 7, 8] і вказану там літературу) підпадають під наступні дві абстрактні схеми.

Нехай X і Y — топологічні простори, $f\colon X \to Y$ — відображення, $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0)$ і $\mathcal{A}$ — деяка система множин в X. Ми кажемо, що відображення f є *$\mathcal{A}$-неперервним у точці* x_0, якщо для кожного околу V точки y_0 в просторі Y існує така множина $A \in \mathcal{A}$, що $f(A) \subseteq V$. Нехай $U \subseteq X$, $f_U = f|_U$ — звуження f на множину U і $\mathcal{A}_U = \{A \in \mathcal{A} : A \subseteq U\}$. Назовемо f *сильно $\mathcal{A}$-неперервним у точці* x_0, якщо для кожного околу U точки x_0 в X звуження f_U є $\mathcal{A}_U$-неперервним у точці x_0.

Розглянемо такі системи множин: $\mathcal{U}_{x_0}$ — система всіх околів точки x_0 у просторі X; $\overline{\mathcal{U}}_{x_0} = \{A \in 2^X : \overline{A} \in \mathcal{U}_{x_0}\}$; $\mathcal{S}$ — система всіх непорожніх відкритих множин у просторі X; $\overline{\mathcal{S}} = \{A \in 2^X : \operatorname{int} \overline{A} \neq \emptyset\}$ — система всіх десь щільних множин в X. Якщо за $\mathcal{A}$ взяти відповідно системи $\mathcal{U}_{x_0}$, $\overline{\mathcal{U}}_{x_0}$, $\mathcal{S}$ чи $\overline{\mathcal{S}}$, то $\mathcal{A}$-неперервне в точці x_0 відображення називають відповідно *неперервним , майже неперервним, ледь неперервним* чи *майже ледь неперервним у точці* x_0. Далі сильно /майже/ ледь неперервне в точці x_0 відображення — це не що інше як */майже/ квазінеперервне* в цій точці відображення.

Нехай α — відображення, яке ставить у відповідність кожній точці $x \in X$ деяку систему $\mathcal{A}_x = \alpha(x)$ підмножин простору X. Відображення $f\colon X \to Y$ назвемо *сильно α - неперервним*, якщо для кожного $x \in X$ відображення f є /сильно/ $\mathcal{A}_x$-неперервним у точці x. Якщо $\mathcal{A}_x = \mathcal{A}$ для кожного $x \in X$, то /сильно/ α-неперервне відображення називається просто */сильно/ $\mathcal{A}$-неперервним.* Якщо $\mathcal{A}_x = \mathcal{U}_x$ /$\mathcal{A}_x = \overline{\mathcal{U}}_x$/ для кожного $x \in X$, то α - неперервні відображення — це */майже/ неперервні відображення.* $\mathcal{S}$-неперервність /$\overline{\mathcal{S}}$-неперервність/ — це /майже/ ледь неперервність. Нарешті */майже/ квазінеперервність* — це сильна /майже/ ледь неперервність. Властивості /майже/ неперервності, /майже/ квазінеперервності чи /майже/ ледь неперервності позначаються відповідно літерами C /C_n/, K /K_n/ чи S /S_n/.

Теорема 1. *Нехай X — топологічний простір і Y — цілком регулярний простір. Відображення $f\colon X \to Y$ буде $\mathcal{A}$-неперервним у точці x_0 /сильно $\mathcal{A}$-неперервним у точці x_0, α-неперервним /тоді і тільки тоді, коли для кожної неперервної функції $g\colon Y \to \mathbb{R}$ функція $h = g \circ f\colon X \to \mathbb{R}$ буде $\mathcal{A}$-неперервною у точці x_0 /сильно $\mathcal{A}$-неперервною у точці x_0, α-неперервною/.*

Доведення. Нехай f — $\mathcal{A}$-неперервне у точці x_0 відображення, $g\colon Y \to Z$ — неперервне в точці $y_0 = f(x_0)$ відображення зі значеннями у деякому топологічному просторі Z і $h = g \circ f$. Тоді h — $\mathcal{A}$-неперервне у точці x_0. Справді, нехай W — окіл точки $z_0 = h(x_0) = g(y_0)$ у просторі Z. З неперервності g у точці y_0 випливає, що існує такий окіл V точки y_0 в просторі Y, що $g(V) \subseteq W$. Оскільки f є $\mathcal{A}$-неперервним у точці x_0, то існує така множина $A \in \mathcal{A}$, що $f(A) \subseteq V$. Тоді $h(A) = g(f(A)) \subseteq g(V) \subseteq W$, що і дає нам $\mathcal{A}$-неперервність h у точці x_0.

Нехай f не є $\mathcal{A}$-неперервним у точці x_0. Тоді існує такий окіл V точки $y_0 = f(x_0)$ у просторі Y, що $f(A) \not\subseteq V$ для кожного $A \in \mathcal{A}$. Оскільки простір Y цілком регулярний, то існує така неперервна функція $g_V\colon Y \to \mathbb{R}$, що $g_V(y_0) = 1$ і $g_V(y) = 0$ на $Y \setminus V$. Покладемо $h_V = g_V \circ f$. Множина $W = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ є околом точки $z_0 = h_V(x_0) = g_V(y_0) = 1$ і разом з тим $h_V(A) \not\subseteq W$ для кожного $A \in \mathcal{A}$, бо для кожного $A \in \mathcal{A}$ існує точка $x_A \in A$, для якої $f(x_A) \notin V$, отже, для неї $h_V(x_A) = 0 \notin W$.Таким чином, функція h_V не є $\mathcal{A}$-неперервною у точці x_0.

Інші твердження теореми легко випливають з доведеного. □

3. Нехай X, Y і Z — топологічні простори. Для відображень $f\colon X \times Y \to Z$ неперервність та всі її модифікації стосуються топології добутку на $X \times Y$ і часто вирізняються прислівником "сукупно". Крім того, для таких відображень можна ввести і певні специфічні послаблення неперервності, беручи за зразок умову (A) з праці К.Беґеля [9].

Нехай $\mathcal{S}$ і $\overline{\mathcal{S}}$ — системи множин в X, які введені в п.2, і $\mathcal{H}$ — система всіх відкритих непорожніх множин у просторі Y. Покладемо

$$\mathcal{S}_h = \{G \times \{y\} : G \in \mathcal{S} \quad \text{і} \quad y \in Y\} \quad \text{і} \quad \mathcal{P}_{ns} = \{A \times V : A \in \overline{\mathcal{S}} \quad \text{і} \quad V \in \mathcal{H}\}.$$

Відображення $f\colon X \times Y \to Z$ ми називаємо *горизонтально ледь неперервним у точці* $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$, якщо воно є $\mathcal{S}_h$-неперервним у цій точці; $\mathcal{P}_{ns}$-неперервне у точці p_0 відображення f ми називаємо *змішано майже ледь неперервним* у цій точці. Сильно горизонтально ледь неперервні відображення називаються *горизонтально квазінеперервними.* Вони були введені в [2]. Властивості горизонтальної ледь неперервності, горизонтальної квазінеперервності і змішаної майже ледь неперервності ми позначимо відповідно символами S_h, K_h і P_{ns}.

Нам буде потрібна одна властивість горизонтально квазінеперервних відображень.

Теорема 2. *Нехай X, Y і Z — топологічні простори, U і V — відкриті множини в просторах X і Y відповідно, $A \subseteq X$, $U \subseteq \overline{A}$ і $f\colon X \times Y \to Z$ — горизонтально квазінеперервне відображення. Тоді $f(U \times V) \subseteq \overline{f(A \times V)}$.*

Доведення. Нехай $p_0 = (x_0, y_0) \in U \times V$, $z_0 = f(p_0)$ і W — окіл точки z_0 у просторі Z. Оскільки f горизонтально квазінеперервне в точці p_0, то існують відкрита непорожня множина G в X і точка $b \in V$, такі, що $G \subseteq U$ і $f(G \times \{b\}) \subseteq W$. Зрозуміло, що $G \cap A \neq \emptyset$, адже $G \subseteq U \subseteq \overline{A}$. Тому існує точка $a \in G \cap A$. В такому разі $f(a, b) \in W \cap f(A \times V)$, отже, $z_0 \in \overline{f(A \times V)}$. □

З цієї властивості легко вивести наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай X, Y і Z — топологічні простори, причому простір Z регулярний, і $f\colon X \times Y \to Z$ — горизонтально квазінеперервне і змішано майже ледь неперервне відображення. Тоді f буде сукупно ледь неперервним.*

Доведення. Нехай $p_0 \in X \times Y$ і W — замкнений окіл точки $z_0 = f(p_0)$ у просторі Z. Оскільки f змішано майже ледь неперервне в точці p_0, то існують такі відкриті непорожні множини U і V у просторах X і Y відповідно і множина $A \subseteq X$, що $U \subseteq \overline{A}$ і $f(A \times V) \subseteq W$. Тоді на основі теореми 2

$$f(U \times V) \subseteq \overline{f(A \times V)} \subseteq \overline{W} = W,$$

отже, f ледь неперервне в точці p_0, адже замкнені околи точки z_0 утворюють базу околів цієї точки в регулярному просторі Z. □

4. Перейдемо до розгляду основних результатів. Для властивості P відображень $f\colon X \to Y$ через $P(X, Y)$ ми позначаємо сукупність усіх відображень $f\colon X \to Y$, які мають властивість P. Символом S_hS_n позначається властивість відображення $f\colon X \times Y \to Z$ бути горизонтально ледь неперервним і майже ледь неперервним відносно другої змінної. Аналогічний зміст мають властивості S_hS, K_hK_n і K_hK.

Теорема 4. *Нехай X — берівський простір, Y — топологічний простір, який має зліченну псевдобазу $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ і Z — довільний топологічний простір. Тоді:*

(i) $S_hS_n(X \times Y, Z) \subseteq S_n(X \times Y, Z)$;

(ii) $S_hS(X \times Y, Z) \subseteq P_{ns}(X \times Y, Z)$;

(iii) $K_hK_n(X \times Y, Z) \subseteq K_n(X \times Y, Z)$;

(iv) $K_hK(X \times Y, Z) \subseteq K(X \times Y, Z)$, *якщо простір Z регулярний.*

Доведення. (i). Нехай $f \in S_hS_n(X \times Y, Z)$ і $p_0 \in X \times Y$. Доведемо, що f є майже ледь неперервним у точці p_0. Розглянемо відкритий окіл W точки $z_0 = f(p_0)$ у просторі Z. Оскільки f горизонтальне ледь неперервне у точці p_0, то існують відкрита непорожня множина G у просторі X і точка $b \in Y$, такі, що $f(G \times \{b\}) \subseteq W$.

Для кожного номера n покладемо

$$A_n = \{x \in G : (\exists B_{n,x})(B_{n,x} \subseteq V_n \subseteq \overline{B}_{n,x}) \quad \text{і} \quad f(\{x\} \times B_{n,x}) \subseteq W\}.$$

Покажемо, що $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = G$. Нехай $x \in G$. Оскільки $f(x, b) \in W$ і множини W відкрита, то W — окіл точки $f(x, b)$ в Z. За умовою відображення $f^x = f(x, \cdot)\colon Y \to Z$ майже ледь неперервне. Тому існує десь щільна в Y множина B_x, така, що $f(B_x) \subseteq W$. Множина $V = \operatorname{int} \overline{B_x}$ непорожня і відкрита в Y. Оскільки $\mathcal{V}$ — псевдобаза в Y, то існує такий номер n, що $V_n \subseteq V$. Покладемо $B_{n,x} = V_n \cap B_x$. Зрозуміло, що $V_n \subseteq \overline{B_{n,x}}$, адже $V_n \subseteq \overline{B_x}$ і множина V_n відкрита. Крім того, $f^x(B_{n,x}) \subseteq W$. Отже, $x \in A_n$.

За умовою простір X берівський, тобто в ньому кожна непорожня відкрита множина є множиною другої категорії. Тому G — множина другої категорії в X, отже, існує такий номер m, що множина A_m десь щільна в X, тобто $\operatorname{int} \overline{A_m} \neq \emptyset$. Покладемо $U = G \cap \operatorname{int} \overline{A_m}$, $A = U \cap A_m$ і $V = V_m$. Зрозуміло, що U — непорожня відкрита множина і $A \subseteq U \subseteq \overline{A}$. Таким чином, множина A десь щільна в X, а саме, щільна у відкритій непорожній множині U. Розглянемо множину

$$E = \bigcup_{x \in A} \{x\} \times B_{m,x}.$$

Оскільки $A \subseteq A_m$, то $V = V_m \subseteq \overline{B_{m,x}}$ для кожного $x \in A$. Крім того, $U \subseteq \overline{A}$. Тому $U \times V \subseteq \overline{E}$, отже, множина E десь щільна в $X \times Y$. До того ж

$$f(E) = \bigcup_{x \in A} f(\{x\} \times B_{m,x}) \subseteq W.$$

Таким чином, f є майже ледь неперервним у точці p_0, бо відкриті околи точки z_0 в Z утворюють базу околів цієї точки.

(ii). Нехай $f \in S_hS(X \times Y, Z)$ і $p_0 \in X \times Y$. Доведемо, що f є змішано майже ледь неперервним у точці p_0. Як і в доведенні першого включення візьмемо відкритий окіл W точки $z_0 = f(p_0)$ в Z і знайдемо відкриту непорожню множину G в X і точку $b \in Y$, такі, що $f(G \times \{b\}) \subseteq W$. Для кожного номера n покладемо

$$A_n = \{x \in G : f^x(V_n) \subseteq W\}.$$

Оскільки для кожного $x \in X$ відображення f^x ледь неперервне, то $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = G$. Як і раніше існує такий номер m, що $U = G \cap \operatorname{int} \overline{A_m} \neq \emptyset$ і для множини $A = U \cap A_m$ будемо мати $A \subseteq U \subseteq \overline{A}$. Покладаючи $V = V_m$ ми отримаємо, що $f(A \times V) \subseteq W$, що і треба було довести.

(iii). Нехай $f \in K_hK_n(X \times Y, Z)$ і $p_o = (x_o, y_o) \in X \times Y$. Доведемо, що f майже квазінеперервне в точці p_o за сукупністю змінних. Для цього розглянемо довільний відкритий окіл U точки x_o в X і довільний відкритий окіл V точки y_o в Y. Досить з'ясувати, що звуження $g = f|_{U\times V}$ буде майже ледь неперервним. Але зрозуміло, що $g \in S_hS_n(U \times V, Z)$. При цьому відкритий підпростір U берівського простору X сам буде берівським, а підпростір V простору Y так само, як і Y, має зліченну псевдобазу. Тому за твердженням (i) отримуємо, що $g \in S_n(U \times V, Z)$, що було й треба.

(iv). Нехай $f \in K_hK(X\times Y, Z)$ і $p_o = (x_o, y_o) \in X\times Y$. Доведемо, що f квазінеперервне в точці p_o. Як і в доведенні твердження (iii) для цього досить довести, що звуження $g = f|_{U\times V}$ ледь неперервне для довільних відкритих околів U і V точок x_o і y_o у просторах X і Y відповідно. Оскільки $g \in S_hS(U \times V, Z)$, то за твердженням (ii) відображення g змішано майже ледь неперервне. Але g горизонтально квазінеперервне і простір Z регулярний. Тому g ледь неперервне за теоремою 3. $\square$

Ми бачимо, що твердження (i) значно підсилює теорему А, а твердження (ii) її уточнює. Твердження (iv) покращує теорему Б і, як ми бачили, негайно випливає з твердження (ii) і теореми 3.

ЛІТЕРАТУРА

1. Вітренко О., Маслюченко В. *Про нарізно ледь неперервні функції* // Мат. студії. – 1996. – Т. 6. – С. 113–118.
2. Маслюченко В.К., Нестеренко В.В. *Сукупна неперервність і квазінеперервність горизонтально квазінеперервних функцій* // Укр. мат. журнал – 2000. – Т. 52, №12. – С. 1711–1714.
3. Маслюченко В.К. Нарізно неперервні відображення і простори Кете. Дис. ... докт. фіз.-мат.наук. – Чернівці, 1999. – 345 с.
4. Piotrowski Z. *A survey of results concerning generalized continuity on topological spaces* // Acta Math. Univ. Comen. – 1987–1988. – V. 52. – V. 53. – P. 91–110.
5. Kempisty S. *Sur les fonctions quasicontinues* // Fund. Math. – 1932. – V. 19. – P. 184–197.
6. Martin N.F.G. *Quasi-continuous functions on product spaces* // Duke Math. J. – 1961. – V. 28. – P. 30–44.
7. Neubrunn T. *Quasi-continuity* // Real Anal. Exch. – 1988–1989. – V. 14, №3. – P. 259–306.

8. Natkaniez T. Almost continuity. – Bydgoszcz: Wyzcza Szkola Pedagogiczna w Bydgozczy, 1992. – 132 p.

9. Bögel K. *Über partiell differenzierbare Funktionen* // Math. Z. – 1926. – V. 25. – S. 490–498.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
vmaslyuchenko@ukr.net

Надійшло 20.12.2005