УДК 517.526

Д. І. Боднар, В. Р. Гладун

ПРО СТІЙКІСТЬ ДО ЗБУРЕНЬ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ З КОМПЛЕКСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

D. I. Bodnar, V. R. Hladun. *On stability to perturbations of branched continued fractions with complex elements*, Matematychni Studii, **25** (2006) 207–212.

We consider the problems of the stability to perturbations of branched continued fractions (BCF) $a_0\left(b_0+\mathbf{D}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}\right)^{-1}$ with complex elements. We define the multidimensional sets of relative stability to perturbations of these fractions. We construct and investigate the sets in $\mathbb{C}^{N+1}$ of relative stability to perturbations of BCF or some sequences of its approximants in the assumption that the relative errors of the elements are uniformly bounded. Preliminarily, we establish that these sets are sets of convergence either of the BCF or corresponding sequences of its approximants. We obtain estimates of the relative errors of the approximants of the considered BCF.

Д. И. Боднар, В. Р. Гладун. *Об устойчивости к возмущениям ветвящихся цепных дробей с комплексными элементами* // Математичні Студії. – 2006. – Т.25, №2. – С.207–212.

Рассмотрены вопросы устойчивости к возмущениям ветвящихся цепных дробей (ВЦД) $a_0\left(b_0+\mathbf{D}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}\right)^{-1}$ с комплексными элементами. Определены многомерные множества относительной устойчивости этих дробей к возмущениям. Построены и исследованы множества в $\mathbb{C}^{N+1}$ относительной устойчивости к возмущениям ВЦД или некоторых последовательностей ее подходящих дробей, в предположении равномерной ограничености относительных погрешностей элементов. Предварительно установлено, что эти множества являются множествами сходимости ВЦД или соответствующих последовательностей ее подходящих дробей. Получены оценки относительных погрешностей подходящих дробей рассматриваемых ВЦД.

Оскільки розв'язки багатьох задач аналізу, обчислювальної математики, алгебри і теорії чисел можна подати у вигляді неперервних дробів чи їх узагальнень, а елементи цих дробів, взагалі кажучи, обчислюються наближено, то виникає питання дослідження стійкості побудованих роз'язків. Як показують обчислювальні експерименти, неперервні дроби та їх узагальнення мають властивість малого накопичення похибок в процесі обчислень їхніх підхідних дробів.

При аналізі похибок, що виникають при обчисленні підхідних дробів неперервних дробів та їх багатовимірних узагальнень — гіллястих ланцюгових дробів (ГЛД), встановлено, що вони залежать не тільки від похибок заокруглення їх елементів, похибок машинних операцій тощо, але і певним чином від самих елементів. У зв'язку з чим виникає задача встановлення множин стійкості неперервних дробів і ГЛД .

2000 *Mathematics Subject Classification:* 30E10, 40A15.

Першу відому авторам згадку про стійкість неперервних дробів та їх узагальнень, що виникала в технічних розрахунках, зустрічаємо в [16]. Питання обчислювальної стійкості неперервних дробів, в залежності від алгоритмів обчислення, розглядалося в [1], [2], [4], [3, 11]. У [8, 9] досліджувалась асимптотична стійкість гіллястих ланцюгових дробів (ГЛД), а в [5, 6, 15] отримано формули для відносних похибок підхідних дробів гіллястих ланцюгових дробів та встановлено оцінки цих похибок у випадках, коли елементами ГЛД є додатні числа, а також комплексні числа, що задовольняють умови багатовимірного аналогу теореми Ворпіцького. Обчислювальна стійкість ГЛД, елементи яких задовольняють умови типу Прінгсгейма, досліджувалась в [15], стійкість ГЛД, які є розв'язками систем лінійних алгебраїчних рівнянь, а також оцінки похибок підхідних дробів з урахуванням машинних операцій встановлювались в [13, 15], [12]. Абсолютні похибки при обчисленні підхідних дробів встановлювались та використовувались при дослідженні інтегральних ланцюгових дробів у [14]. Деякі аспекти стійкості неперервних дробів та окремих типів ГЛД розглянуто в [7]. У [10] авторами запропоновано поняття множин стійкості до збурень нескінченних ГЛД.

Використовуючи поняття множин значень залишків ГЛД, яке тісно пов'язане із поняттям множин значень, побудовано та досліджено множини відносної стійкості до збурень ГЛД.

Розглянемо ГЛД з комплексними елементами $\{a_j, b_j\} \subset \mathbb{C}$

$$a_0 \left(b_0 + \mathop{\mathbf{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} \right)^{-1}, \tag{1}$$

де $i(k) = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ — мультиіндекс. Нехай $I_0 = \{0\}$, $I_k = \{\, i(k) : i_p \in \{1, 2, \ldots, N\}, p \in \{1, 2, \ldots, k\}\,\}$, $k \geq 1$. Гіллясті ланцюгові дроби $f^{(s)} = a_0 \left(b_0 + \mathbf{D}_{k=1}^{s} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} \right)^{-1}$, $Q_{i(p)}^{(s)} = b_{i(p)} + \mathbf{D}_{k=p+1}^{s} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}$, $i(p) \in I_p$, $p \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$, $s \geq 1$, називають відповідно s-м підхідним дробом ГЛД (1) і залишками s-го підхідного дробу відповідно, причому $Q_{i(s)}^{(s)} = b_{i(s)}$, $i(s) \in I_s$, $s \geq 0$. Позначимо

$$g_{i(p)}^{(s)} = a_{i(p)} \left(Q_{i(p-1)}^{(s)} Q_{i(p)}^{(s)} \right)^{-1}, \quad i(p) \in I_p, \quad p \in \{1, 2, \ldots, s\}, \quad s \geq 1.$$

Розглянемо також ГЛД

$$\widehat{a}_0 \left(\widehat{b}_0 + \mathop{\mathbf{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{\widehat{a}_{i(k)}}{\widehat{b}_{i(k)}} \right)^{-1}, \tag{2}$$

який вважатимемо наближенням до ГЛД (1). Нехай $\alpha_{i(k)}$, $\beta_{i(k)}$, $\varepsilon_{i(p)}^{(s)}$ — відносні похибки елементів $a_{i(k)}$, $b_{i(k)}$ ГЛД (1) і величин $Q_{i(p)}^{(s)}$ відповідно, тобто $\widehat{a}_{i(k)} = a_{i(k)} \left(1 + \alpha_{i(k)}\right)$, $\widehat{b}_{i(k)} = b_{i(k)} \left(1 + \beta_{i(k)}\right)$, $\widehat{Q}_{i(p)}^{(s)} = Q_{i(p)}^{(s)} \left(1 + \varepsilon_{i(p)}^{(s)}\right)$. Нехай величини $\widehat{\alpha}_{i(k)}$, $\widehat{\beta}_{i(k)}$, $\widehat{\varepsilon}_{i(p)}^{(s)}$ задаються співвідношеннями $a_{i(k)} = \widehat{a}_{i(k)} \left(1 + \widehat{\alpha}_{i(k)}\right)$, $b_{i(k)} = \widehat{b}_{i(k)} \left(1 + \widehat{\beta}_{i(k)}\right)$, $Q_{i(p)}^{(s)} = (1 + \widehat{\varepsilon}_{i(p)}^{(s)}) \widehat{Q}_{i(p)}^{(s)}$.

Для відносних похибок $\varepsilon_{i(p)}^{(s)}$ легко встановити такі рекурентні формули:

$$\varepsilon_{i(p-1)}^{(s)} = \left(1 - \sum_{i_p=1}^{N} g_{i(p)}^{(s)} \right) \beta_{i(p-1)} + \sum_{i_p=1}^{N} g_{i(p)}^{(s)} \alpha_{i(p)} (1 + \widehat{\varepsilon}_{i(p)}^{(s)}) + \sum_{i_p=1}^{N} g_{i(p)}^{(s)} \widehat{\varepsilon}_{i(p)}^{(s)},$$

$i(p-1) \in I_{p-1}, p \in \{1,2,\ldots,s\}, s \geq 1$, де $\varepsilon_{i(s)}^{(s)} = \beta_{i(s)}$,$\widehat{\varepsilon}_{i(s)}^{(s)} = \widehat{\beta}_{i(s)}$, $i(s) \in I_s, s \geq 0$. Такі ж формули встановлюються для величин $\widehat{\varepsilon}_{i(p)}^{(s)}$.

Послідовно використовуючи співвідношення для $\varepsilon_{i(p)}^{(s)}$, $\widehat{\varepsilon}_{i(p)}^{(s)}$, отримуємо формулу для відносної похибки s-го підхідного дробу ГЛД (1):

$$\varepsilon^{(s)} = \alpha_0 + (1+\alpha_0)\left(1 - \sum_{i_1=1}^{N} q_{i(1)}^{(s)}\right)\beta_0' +$$

$$+ (1+\alpha_0)\sum_{l=1}^{s}\sum_{i_1=1}^{N} q_{i(1)}^{(s)} \sum_{i_2=1}^{N} q_{i(2)}^{(s)} \ldots \sum_{i_l=1}^{N} q_{i(l)}^{(s)} \left(\gamma_{i(l)} + \left(1 - \sum_{i_{l+1}=1}^{N} q_{i(l+1)}^{(s)}\right)\beta_{i(l)}'\right), \quad s \geq 0, \quad (3)$$

де $q_{i(s+1)}^{(s)} = 0$, $s \geq 0$, $q_{i(k)}^{(s)} = g_{i(k)}^{(s)}$, якщо $k = 2n$ і $q_{i(k)}^{(s)} = \widehat{g}_{i(k)}^{(s)}$, якщо $k = 2n+1$, $\gamma_{i(l)} = \alpha_{i(l)}\left(1+\varepsilon_{i(l)}^{(s)}\right)^{-1}$, $\beta_{i(l)}' = \widehat{\beta}_{i(l)}$, якщо $l = 2n$ і $\gamma_{i(l)} = \widehat{\alpha}_{i(l)}\left(1+\widehat{\varepsilon}_{i(l)}^{(s)}\right)^{-1}$, $\beta_{i(l)}' = \beta_{i(l)}$, якщо $l = 2n+1$.

Нехай $\left\{\Omega_{i(k)}\right\}$, $\varnothing \neq \Omega_{i(k)} \subset \mathbb{C}^{N+1}$, $i\,(k) \in I_k, k \geq 0,$ — послідовність багатовимірних множин елементів ГЛД (1), (2), тобто

$$\left(b_{i(k)}, a_{i(k)1}, \ldots, a_{i(k)N}\right) \in \Omega_{i(k)}, \left(\widehat{b}_{i(k)}, \widehat{a}_{i(k)1}, \ldots, \widehat{a}_{i(k)N}\right) \in \Omega_{i(k)}, i\,(k) \in I_k, k \geq 0. \quad (4)$$

Означення. Послідовність множин $\{\Omega_{i(k)}\}$, $i(k) \in I_k$, $k \geq 0$, назвемо *послідовністю багатовимірних множин відносної стійкості до збурень* ГЛД (1), якщо:

1) послідовність $\{\Omega_{i(k)}\}$ є послідовністю багатовимірних множин збіжності ГЛД (1), (2), тобто виконання умови (4) забезпечує збіжність відповідних ГЛД;
2) для кожного дійсного числа ε , $\varepsilon > 0$, існує таке дійсне число δ, $\delta > 0$, що для всіх $\left(b_{i(k)}, a_{i(k)1}, \ldots, a_{i(k)N}\right) \in \Omega_{i(k)}$, $b_{i(k)} \neq 0$, $a_{i(k)j} \neq 0$, $i(k) \in I_k$, $k \geq 0$, $j \in \{1,2,\ldots,N\}$, і всіх $\left(\widehat{b}_{i(k)}, \widehat{a}_{i(k)1}, \ldots, \widehat{a}_{i(k)N}\right) \in \Omega_{i(k)}$, $i(k) \in I_k$, $k \geq 0$, таких, що $\left|\widehat{a}_{i(k)j}/a_{i(k)j} - 1\right| < \delta$, $j \in \{1,2,\ldots,N\}$, $\left|\widehat{b}_{i(k)j}/b_{i(k)j} - 1\right| < \delta$, виконуються нерівності $\left|\widehat{f}^{(s)}/f^{(s)} - 1\right| < \varepsilon$, $s \geq 0$.

Зауваження. Подібно можна означити послідовності багатовимірних множин відносної стійкості до збурень підпослідовності підхідних дробів $\left\{f^{(s_l)}\right\}$ ГЛД (1).

Нехай $\left\{\Omega_{i(k)}\right\}$ — послідовність непорожніх багатовимірних множин елементів ГЛД (1). Послідовність $\left\{V_{i(k)}\right\}$, $\varnothing \neq V_{i(k)} \subset \mathbb{C}$, $i\,(k) \in I_k, k \geq 0$, назвемо *послідовністю множин значень* залишків ГЛД (1), якщо, для довільних $\left(b_{i(k)}, a_{i(k)1}, \ldots, a_{i(k)N}\right) \in \Omega_{i(k)}$, $i\,(k) \in I_k, k \geq 0$, і $v_{i(k+1)} \in V_{i(k+1)}$, $i\,(k) \in I_k, k \geq 0$, $i_{k+1} \in \{1,2,\ldots,N\}$, виконуються умови $b_{i(k)} + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{a_{i(k+1)}}{v_{i(k+1)}} \in V_{i(k)}$, $b_{i(k)} \in V_{i(k)}$.

Із наведеного означення випливає, що $Q_{i(p)}^{(s)} \in V_{i(p)},\ i\,(p) \in I_p,\ p \in \{0,1,\ldots,s\},\ s \geq 0$.

Теорема 1. *Нехай існують сталі* α, β , $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \beta < 1$, *такі, що*

$$\left|\alpha_{i(k)}\right| \leq \alpha, \quad \left|\beta_{i(k)}\right| \leq \beta, \quad i\,(k) \in I_k, \quad k \geq 0, \quad (5)$$

і нехай $\mu_{i(k)}$, $\rho_{i(k)}$, $i\,(k)\in I_k$, $k\ge 0$ — *задані дійсні додатні числа,* $\Gamma_{i(k)}$, $i\,(k)\in I_k$, $k\ge 0$ — *задані комплексні числа, такі що*

$$\left|\Gamma_{i(k)}\right|<\rho_{i(k)},\ i\,(k)\in I_k,\ k\ge 0. \tag{6}$$

Тоді сукупність непорожніх множин $\left\{\Omega_{i(k)}\right\}$, *де* $\Omega_{i(k)}=\Omega^{(1)}_{i(k)}\cap\Omega^{(2)}_{i(k)}$, $\Omega^{(j)}_{i(k)}=\{(y,x_1,\ldots,x_N)\in\mathbb{C}^{N+1}\}$, $j\in\{1,2\}$, *при цьому*

$$\Omega^{(1)}_{i(k)}=\left\{\left|y-\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{x_j\overline{\Gamma}_{i(k)j}}{\rho^2_{i(k)j}-\left|\Gamma_{i(k)j}\right|^2}+\Gamma_{i(k)}\right)\right|\ge\rho_{i(k)}+\sum_{j=1}^{N}\frac{|x_j|\,\rho_{i(k)j}}{\rho^2_{i(k)j}-\left|\Gamma_{i(k)j}\right|^2}\right\}, \tag{7}$$

$$\Omega^{(2)}_{i(k)}=\left\{\sum_{j=1}^{N}|x_j|\left(\rho_{i(k)j}-\left|\Gamma_{i(k)j}\right|\right)^{-1}\le\mu_{i(k)}\right\}, \tag{8}$$

є послідовністю багатовимірних множин відносної стійкості до збурень ГЛД (1), якщо збігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\prod_{l=0}^{k}\eta_l,\quad \eta_k=\max_{i(k)\in I_k}\left\{\mu_{i(k)}\left(\rho_{i(k)}-\left|\Gamma_{i(k)}\right|\right)^{-1}\right\},\quad k\ge 0, \tag{9}$$

і для відносної похибки s-го підхідного дробу ГЛД (1) справджується оцінка

$$\left|\varepsilon^{(s)}\right|\le|\alpha_0|+|1+\alpha_0|\left(\frac{\beta}{1-\beta}\left(\sum_{k=0}^{s-1}(1+\eta_k)\prod_{l=0}^{k-1}\eta_l+\prod_{l=0}^{s-1}\eta_l\right)+\frac{\alpha}{1-\alpha}\sum_{k=1}^{s}\prod_{l=0}^{k-1}\eta_l\right). \tag{10}$$

Доведення. Із збіжності ряду (9), випливає, що $\prod_{l=0}^{\infty}\eta_l=0$. Цього достатньо, щоб послідовність множин (7), (8) була послідовністю багатовимірних множин збіжності ГЛД (1), (2).

Розглянемо послідовність множин

$$V_{i(k)}=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z-\Gamma_{i(k)}\right|\ge\rho_{i(k)}\right\},\quad i\,(k)\in I_k,\quad k\ge 0. \tag{11}$$

Враховуючи умову (6), неважко перевірити, що

$$b_{i(k-1)}+\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}}{V_{i(k)}}=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z-\left(b_{i(k-1)}-\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}\overline{\Gamma}_{i(k)}}{\rho^2_{i(k)}-\left|\Gamma_{i(k)}\right|^2}\right)\right|\le\sum_{i_k=1}^{N}\frac{\left|a_{i(k)}\right|\rho_{i(k)}}{\rho^2_{i(k)}-\left|\Gamma_{i(k)}\right|^2}\right\}$$

і множини (11) є множинами значень залишків підхідних дробів ГЛД (1), якщо

$$\left|b_{i(k-1)}-\left(\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}\overline{\Gamma}_{i(k)}}{\rho^2_{i(k)}-\left|\Gamma_{i(k)}\right|^2}+\Gamma_{i(k-1)}\right)\right|\ge\rho_{i(k-1)}+\sum_{i_k=1}^{N}\frac{\left|a_{i(k)}\right|\rho_{i(k)}}{\rho^2_{i(k)}-\left|\Gamma_{i(k)}\right|^2},$$

$$\left|\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}\overline{\Gamma}_{i(k)}}{\rho^2_{i(k)}-\left|\Gamma_{i(k)}\right|^2}\right|\le\sum_{i_k=1}^{N}\frac{\left|a_{i(k)}\right|\rho_{i(k)}}{\rho^2_{i(k)}-\left|\Gamma_{i(k)}\right|^2}.$$

Виконання останньої нерівності випливає з умови (6).

Враховуючи оцінки $\sum_{i_k=1}^{N}\left|g^{(s)}_{i(k)}\right|\le\mu_{i(k)}\left(\rho_{i(k)}-\left|\Gamma_{i(k)}\right|\right)^{-1}\le\eta_{k-1}$ і такі ж оцінки для величин $\sum_{i_k=1}^{N}\left|\widehat{g}^{(s)}_{i(k)}\right|$, із формули (3) отримуємо оцінку (10), із якої випливає, що збіжність ряду (9) забезпечує виконання умови 2) означення послідовності багатовимірних множин відносної стійкості до збурень ГЛД (1). $\square$

Теорема 2. *Нехай відносні похибки елементів ГЛД (1) задовольняють умови (5), і нехай* $\mu_{i(k)}$, $\rho_{i(k)}$, $i(k) \in I_k$,$k \geq 0$, *— задані дійсні додатні числа,* $\Gamma_{i(k)}$ $i(k) \in I_k$, $k \geq 0$, *— задані комплексні числа, такі що* $\left|\Gamma_{i(2k+1)}\right| < \rho_{i(2k+1)}$, $\left|\Gamma_{i(2k)}\right| > \rho_{i(2k)}$. *Тоді сукупність непорожніх множин* $\left\{\Omega_{i(k)}\right\}$, *де* $\Omega_{i(k)} = \Omega^{(1)}_{i(k)} \cap \Omega^{(2)}_{i(k)}$, $\Omega^{(j)}_{i(k)} = \left\{(y, x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{C}^{N+1}\right\}$, $j \in \{1, 2\}$, *при цьому*

$$\Omega^{(1)}_{i(2k-1)} =$$

$$= \left\{ \left| y - \left(\Gamma_{i(2k-1)} - \sum_{j=1}^{N} \frac{x_j \overline{\Gamma}_{i(2k-1)j}}{\left|\Gamma_{i(2k-1)j}\right|^2 - \rho^2_{i(2k-1)j}} \right) \right| \geq \rho_{i(2k-1)} + \sum_{j=1}^{N} \frac{|x_j|\, \rho_{i(2k-1)j}}{\left|\Gamma_{i(2k-1)j}\right|^2 - \rho^2_{i(2k-1)j}} \right\},$$

$$\Omega^{(1)}_{i(2k)} = \left\{ \left| y - \left(\Gamma_{i(2k)} + \sum_{j=1}^{N} \frac{x_j \overline{\Gamma}_{i(2k)j}}{\rho^2_{i(2k)j} - \left|\Gamma_{i(2k)j}\right|^2} \right) \right| + \sum_{j=1}^{N} \frac{|x_j|\, \rho_{i(2k)j}}{\rho^2_{i(2k)j} - \left|\Gamma_{i(2k)j}\right|^2} \leq \rho_{i(2k)} \right\},$$

$$\Omega^{(2)}_{i(k)} = \left\{ \sum_{j=1}^{N} (-1)^k |x_j| \left(\rho_{i(k)j} - \left|\Gamma_{i(k)j}\right|\right)^{-1} \leq \mu_{i(k)} \right\},$$

є послідовністю багатовимірних множин відносної стійкості до збурень послідовності підхідних дробів $\left\{f^{(2s)}\right\}$ *ГЛД (1), якщо збігається ряд (9) з*

$$\eta_k = \max_{i(k)\in I_k} \left\{ (-1)^{k+1} \mu_{i(k)} \left(\rho_{i(k)} - \left|\Gamma_{i(k)}\right|\right)^{-1} \right\}, \quad k \geq 0,$$

і для відносної похибки $2s$*-го підхідного дробу ГЛД (1) справджується оцінка (10).*

Доведення. Як і у доведенні теореми 1, доводиться, що множини $\Omega_{i(k)}$ утворюють послідовність множин збіжності парних частин ГЛД (1), (2).

Нехай $V_{i(2k)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - \Gamma_{i(2k)}| \leq \rho_{i(2k)}\}$, $V_{i(2k+1)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - \Gamma_{i(2k+1)}| \geq \rho_{i(2k+1)}\}$. Оскільки $\left|\Gamma_{i(2k)}\right| > \rho_{i(2k)}$, то умова $b_{i(2k-1)} + \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(2k)}}{V_{i(2k)}} \subset V_{i(2k-1)}$ виконується, коли

$$\left| b_{i(2k-1)} - \left(\Gamma_{i(2k-1)} - \sum_{i_{2k}=1}^{N} \frac{a_{i(2k)} \overline{\Gamma}_{i(2k)}}{\left|\Gamma_{i(2k)}\right|^2 - \rho^2_{i(2k)}} \right) \right| \geq \rho_{i(2k-1)} + \sum_{i_{2k}=1}^{N} \frac{\left|a_{i(2k)}\right| \rho_{i(2k)}}{\left|\Gamma_{i(2k)}\right|^2 - \rho^2_{i(2k)}}.$$

Якщо ж $\left|\Gamma_{i(2k+1)}\right| < \rho_{i(2k+1)}$, то умови $b_{i(2k)} + \sum_{i_{2k+1}=1}^{N} \frac{a_{i(2k+1)}}{V_{i(2k+1)}} \subset V_{i(2k)}$, $b_{i(2k)} \in V_{i(2k)}$ виконуються, коли

$$\left| b_{i(2k)} - \left(\Gamma_{i(2k)} + \sum_{i_{2k+1}=1}^{N} \frac{a_{i(2k+1)} \overline{\Gamma}_{i(2k+1)}}{\rho^2_{i(2k+1)} - \left|\Gamma_{i(2k+1)}\right|^2} \right) \right| \leq \rho_{i(2k)} - \sum_{i_{2k+1}=1}^{N} \frac{\left|a_{i(2k+1)}\right| \rho_{i(2k+1)}}{\rho^2_{i(2k+1)} - \left|\Gamma_{i(2k+1)}\right|^2},$$

$$\left| \sum_{i_{2k+1}=1}^{N} \frac{a_{i(2k+1)} \overline{\Gamma}_{i(2k+1)}}{\rho^2_{i(2k+1)} - \left|\Gamma_{i(2k+1)}\right|^2} \right| \leq \sum_{i_k=1}^{N} \frac{\left|a_{i(k)}\right| \rho_{i(k)}}{\rho^2_{i(2k+1)} - \left|\Gamma_{i(2k+1)}\right|^2}.$$

Виконання останньої нерівності випливає з нерівності $\left|\Gamma_{i(2k+1)}\right| < \rho_{i(2k+1)}$. Отже, послідовність множин $\left\{V_{i(k)}\right\}$ є послідовністю множин значень залишків $Q^{(2s)}_{i(k)}$.

Враховуючи оцінки $\sum_{i_{2k}=1}^{N} \left|g^{(2s)}_{i(2k)}\right| \leq \eta_{2k-1}, \sum_{i_{2k+1}=1}^{N} \left|\widehat{g}^{(2s)}_{i(2k+1)}\right| \leq \eta_{2k}$, як і в доведенні попередньої теореми, отримуємо, що збіжність ряду (9) забезпечує виконання умови 2) означення послідовності багатовимірних множин відносної стійкості до збурень підпослідовності підхідних дробів ГЛД (1). □

Зауваження. Якщо в теоремі 2 прийняти $\Omega_{i(k)} = \Omega^{(2)}_{i(k)} \cap \Omega^{(3)}_{i(k)}$, де $\Omega^{(3)}_{i(2k)} = \Omega^{(1)}_{i(2k)}$, $\Omega^{(3)}_{i(2k-1)} = \Omega^{(1)}_{i(2k-1)} \cap \Omega'_{i(2k-1)}$, $\Omega'_{i(2k-1)} = \left\{(y, x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{C}^{N+1} : \left|y - \Gamma_{i(2k-1)}\right| \geq \rho_{i(2k-1)}\right\}$, то, використовуючи методику запропоновану в теоремах 1 і 2, можна довести, що сукупність множин $\left\{\Omega_{i(k)}\right\}$ є послідовністю множин відносної стійкості до збурень ГЛД (1), якщо збігається ряд (9).

ЛІТЕРАТУРА

1. Blanch G. *Numerical evaluation of continued fractions.* – SIAM Rev., 1964. – P. 383–421.
2. Gautschi W. *Computational aspects of three-term recurrence relations.* – SIAM Rev., 1967. – P. 24–82.
3. Jones W.B., Thton W.J. *Numerical stability in evaluating continued fractions* // Math. Comp. – 1974. – V. 28. – P. 795–810.
4. Macon N., Baskervill M. *On the generation of errors in the digital evaluation of continued fractions* . – J. Assoc. Comp. Mach. – 1956. – V. 5. – P. 211–221.
5. Боднар Д. И. Ветвящиеся цепные дроби. – Киев: Наук. думка. – 1986. – 176 с.
6. Боднар Д. И. *Оценка погрешности вычисления ветвящихся цепных дробей.* – Докл. АН УССР. Сер. А. – 1975. – №12. – С. 1059–1062.
7. Боднар Д. І., Воделанд Х., Кучмінська Х. Й., Сусь О.М. *Про стійкість гіллястих ланцюгових дробів.* – Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1994. – Т. 37., №– С. 3–7.
8. Боднарчук П. И., Иванел В. К., Дзюбка Б. Е., Пустомельников И. П., Слоневский Р. В. *Вычислительная устойчивость цепных и ветвящихся цепных дробей.* В кн.:Цепные дроби и их прим. – К:ИМ АН УССР, 1976. – С. 12–14.
9. Боднарчук П.І., Скоробогатько В.Я. Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування. – К.: Наук. думка. – 1974. – 272 с.
10. Боднар Д., Гладун В. *Достатні умови стійкості до збурень гіллястих ланцюгових дробів з додатними елементами.* – Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – Т. 45, №1. – С. 16–21.
11. Джоунс У., Трон В. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – М.: Мир. – 1985. – 414 с.
12. Иванов В. В., Бесараб П.Н., Данильченко Л.С. и др. *Оценки погрешностей округления для цепных и ветвящихся цепных дробей.* В кн.: Цепные дроби и их применения. – К.: ИМ АН УССР, 1976. – С. 20–24.
13. Недашковский Н. А. *О сходимости и вычислительной устойчивости ветвящихся цепных дробей некоторых типов.* – Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1984. – Вып. 20. – С. 27–31.
14. Одноволова (Антонова) Т. Н. Некоторые оценки погрешности вычисления интегральных цепных дробей. – Докл. АН УССР. Сер А. – 1984. – №7. – С. 19–22.
15. Скоробогатько В.Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вы-чис-лительной математике. – М.: Наука. 1983. – 312 с.
16. Терских В.П. Метод цепных дробей в применении к исследованию колебаний механических систем: В 2 т. - Л.: Судпромгиз, 1955. – Т. 1. – 376 с.; Т. 2. – 332 с.

Тернопільський державний економічний університет,
Національний університет “Львівська політехніка”

Надійшло 23.09.2005