УДК 517.5

Б. В. Винницький, Г. Д. Галелюк

ПРО УМОВИ НЕПОВНОТИ СИСТЕМ ЕКСПОНЕНТ З ВАГОЮ В $L^2(\mathbb{R})$

B. V. Vynnyts'kyi, G. D. Galelyuk. *On conditions of incompleteness of exponential systems with weight in* $L^2(\mathbb{R})$, Matematychni Studii, **25** (2006) 202–206.

New necessary conditions of incompleteness for exponential systems with weight in $L^2(\mathbb{R})$ are found.

Б. В. Винницкий, Г. Д. Галелюк. *Об условиях неполноты систем експонент с весом в* $L^2(\mathbb{R})$ // Математичні Студії. – 2006. – Т.25, №1. – С.202–206.

Найдены новые необходимые условия неполноты систем експонент с весом в $L^2(\mathbb{R})$.

Відомо [1], що система $\{t^n e^{-t} : n \in \mathbb{N}\}$ є повною у просторі $L^2(0;+\infty)$. В. Фукс [1] узагальнив це твердження, довівши, що якщо (λ_n) — послідовність додатних чисел таких, що

$$\lambda_n - \lambda_{n-1} \ge c_0 > 0, \qquad n \ge 2, \tag{1}$$

то система

$$\left\{t^{\lambda_n - 1/2} e^{-t} : n \in \mathbb{N}\right\} \tag{2}$$

не є повною в $L^2(0;+\infty)$ тоді і тільки тоді, коли

$$\int_1^\infty r^{-2} \exp\left(2 \sum_{1<\lambda_n\le r} \frac{1}{\lambda_n}\right) dr < +\infty. \tag{3}$$

Теорема В. Фукса неодноразово узагальнювалась (див., наприклад, [2–5]). При цьому з [3, 5] випливає, зокрема, що достатня частина теореми Фукса залишається справедливою, якщо замість (1) виконується більш загальна умова: $n = O(\lambda_n)$ $(n \to +\infty)$. Проте питання про знаходження критерію повноти системи (2) без додаткових апріорних умов залишається відкритим. У цій статті ми доведемо, що принаймні в достатній частині теореми Фукса умову (1) можна замінити умовою $\lambda_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$ (теорема 2). Твердження теореми 2 є наслідком теореми 1, що містить умови неповноти системи $\{\exp(t\lambda_n - \gamma(t)) : n \in \mathbb{N}\}$, де $\gamma\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ — деяка опукла і неспадна на $(-\infty,+\infty)$ функція така, що

$$t = o(\gamma(t)) \quad (t \to +\infty), \tag{4}$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 30D15.

© Б. В. Винницький, Г. Д. Галелюк, 2006

а також

$$(\exists c_1)(\exists t^* \in \mathbb{R})(\forall t \geq t^*) : \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} \geq c_1. \tag{5}$$

Тут і надалі через $c_1,\ c_2, \ldots$ позначаємо додатні сталі.

Теорема 1. *Нехай опукла і неспадна на $\mathbb{R}$ невід'ємна функція γ задовольняє умови (4) і (5), а (λ_n) — послідовність різних комплексних чисел із півплощини $\mathbb{C}_+ = \{z : \mathrm{Re}\, z > 0\}$. Тоді, якщо*

$$\sum_{|\lambda_n| \leq 1} \mathrm{Re}\ \lambda_n < +\infty \tag{6}$$

і для деякого $b \in \mathbb{R}$

$$\int\limits_1^\infty \frac{\gamma(2S(t) - b)}{t^2} dt < +\infty, \quad S(r) = \sum_{1 < |\lambda_n| \leq r} \left(\frac{\mathrm{Re}\ \lambda_n}{|\lambda_n|^2} - \frac{\mathrm{Re}\ \lambda_n}{r^2} \right), \tag{7}$$

то система

$$\{\exp(t\lambda_n - \gamma(t)) :\ n \in \mathbb{N}\} \tag{8}$$

не є повною в просторі $L^2(-\infty; +\infty)$.

Доведення теореми 1 випливатиме з двох лем.

Лема 1. *Нехай функція γ і послідовність (λ_n) задовольняють умови теореми 1. Тоді добуток*

$$H(z) = \prod_{|\lambda_n| \leq 1} \frac{z - \lambda_n}{z + \bar{\lambda}_n} \prod_{|\lambda_n| > 1} \frac{1 - z/\lambda_n}{1 + z/\bar{\lambda}_n} \exp\left(\frac{z}{\lambda_n} + \frac{z}{\bar{\lambda}_n} \right) \tag{9}$$

рівномірно збігається на кожному компакті із $\mathbb{C}_+$, H є аналітичною функцією у півплощині $\mathbb{C}_+$ і

$$(\exists c_2)(\forall z \in \mathbb{C}_+) : |H(z)| \leq c_2 \exp(2xS^*(r) + c_3 x), \tag{10}$$

де $r = |z|$, $z = x + iy$, S^* — неперервна, неспадна і невід'ємна на $[0; +\infty)$ функція така, що при деякому $b \in \mathbb{R}$

$$\int\limits_1^\infty \frac{\gamma(S^*(r) - b)}{r^2} dr < +\infty. \tag{11}$$

Доведення. Вважатимемо для простоти, що $t^* = 1$. Із (5) випливає, що $\ln \gamma(t) - \ln \gamma(1) \geq c_1 t$, $t \geq 1$, тобто $\gamma(t) \geq c_2 \exp(c_2 t)$ і тому для деякого c_2

$$\int\limits_1^\infty \frac{\exp(c_2 S(t))}{t^2} dt < +\infty.$$

Отже ([6, с. 62]), $\exp(c_2 S(r))/r \to 0$ при $r \to +\infty$. Тому, $S(r) = O(\ln r)$ $(r \to +\infty)$. Звідси ([7, 8]) добуток (9) є рівномірно збіжним на кожному компакті з $\mathbb{C}_+$ і функція

H є аналітичною в $\mathbb{C}_+$. Далі, проінтегрувавши частинами і врахувавши, що $(\gamma(2S(r)-b))/r \to 0$ при $r \to +\infty$, із (7) отримуємо

$$\int\limits_1^\infty \frac{\gamma'(2S(r)-b)}{r} dS(r) < +\infty.$$

Нехай $\beta^{-1}\colon [0;+\infty) \to [0;+\infty)$ — зростаюча і неперервна на $(0;+\infty)$ функція, визначена на проміжку $[1;\infty)$ рівністю

$$\beta^{-1}(r) = \left(\frac{16}{r} + \int\limits_r^{+\infty} \frac{\gamma'(2S(t)-b)}{\gamma(2S(t)-b)} \frac{dS(t)}{t} \right)^{-1}.$$

Тоді

$$\int\limits_1^\infty \frac{\gamma(2S(\beta(r))-b)}{r^2} dr = \int\limits_1^\infty \gamma'(2S(t)-b) \frac{dS(t)}{t} + \int\limits_1^\infty \gamma(2S(t)-b) \frac{16}{t^2} + c_2.$$

Звідси,

$$\int\limits_1^\infty \frac{\gamma(2S(\beta(r))-b)}{r^2} dr < +\infty. \tag{12}$$

Якщо $S(r) = O(1)$ при $r \in [1;+\infty)$, то H відрізняється ([7]) від добутку Бляшке для $\mathbb{C}_+$ лише множником $\exp(cz)$ і, отже, в цьому випадку нерівність (10) є очевидною. Нехай $S(r) \to +\infty$ $(r \to +\infty)$. Оскільки $\beta(r) \geq 16r$, то ([7]) для $z \in \mathbb{C}_+$ маємо

$$\left| \prod_{|\lambda_n| \leq 1} \frac{z-\lambda_n}{z+\bar{\lambda}_n} \right| \leq 1,$$

$$\ln \left| \frac{1-z/\lambda_n}{1+z/\bar{\lambda}_n} \exp\left(\frac{z}{\lambda_n} + \frac{z}{\bar{\lambda}_n} \right) \right| = \ln \left| \frac{1-z/\lambda_n}{1+z/\bar{\lambda}_n} \right| + \frac{2x \operatorname{Re} \lambda_n}{|\lambda_n|^2} \leq$$
$$\leq 2x \left(\frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{|\lambda_n|^2} - \frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{|\lambda_n + z|^2} \right) \leq 2x \left(\frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{|\lambda_n|^2} - \frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{\beta^2(r)} \right), \qquad |\lambda_n| \geq \frac{\beta(r)}{2}.$$

Тому, для $z \in \mathbb{C}_+$

$$\ln |H(z)| \leq \sum_{|\lambda_n| \leq \beta(r)/2} \left| \frac{z-\lambda_n}{z+\bar{\lambda}_n} \right| + \sum_{|\lambda_n| > \beta(r)/2} \left| \frac{1-z/\lambda_n}{1+z/\bar{\lambda}_n} \right| \leq 2xS(\beta(r)) +$$
$$+ c_3 xr \sum_{|\lambda_n| > \beta(r)/2} \frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{|\lambda_n|^3} \leq 2xS(\beta(r)) + c_3 x \sup_{t \geq 1} \left\{ \beta^{-1}(t) \int\limits_{t/2}^\infty \frac{ds(t)}{t^2} \right\}, s(t) = \sum_{1 < |\lambda_n| \leq t} \frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{|\lambda_n|}. \tag{13}$$

Доведемо скінченність останнього супремуму. Для кожного $t \geq t_0$ існує k таке, що $R_k \leq t < R_{k+1}$, де $R_k = 2^k$. Тоді

$$\beta^{-1}(t) \int\limits_{t/2}^\infty \frac{ds(t)}{t^2} \leq \beta^{-1}(R_{k+1}) \int\limits_{R_k}^\infty \frac{ds(t)}{t^2}. \tag{14}$$

Оскільки ([7]) $S(2r) \geq 3s(r)/4r$ і $S(r) = O(\ln r)$ при $r \to +\infty$, то останній інтеграл є збіжним. Нехай

$$x_k = \int\limits_{R_{k-1}}^{\infty} \frac{ds(t)}{t^2}, \qquad y_k = 1/\beta^{-1}(R_{k+1}).$$

Тоді

$$x_k - x_{k+1} = \int\limits_{R_{k-1}}^{R_k} \frac{ds(t)}{t^2} \leq \frac{1}{R_{k+2}^2}(s(R_k) - s(R_{k-1})),$$

$$y_k - y_{k+1} = \int\limits_{R_{k+1}}^{R_{k+2}} \frac{\gamma'(2S(t)-b)}{\gamma(2S(t)-b)} \frac{dS(t)}{t} \geq c_1 \int\limits_{R_{k+1}}^{R_{k+2}} \frac{dS(t)}{t} \geq \frac{c_1}{R_{k+2}}(S(R_{k+2}) - S(R_{k+1})).$$

Враховуючи, що $s(R_k) - s(R_{k-1}) \leq \dfrac{c_5}{R_{k+2}} \sum_{|\lambda_n| \leq R_k} \operatorname{Re} \lambda_n$ і ([7]) $S(R_{k+2}) - S(R_{k+1}) \geq \dfrac{c_4}{R_{k+2}^2} \sum_{|\lambda_n| \leq R_k} \operatorname{Re} \lambda_n$, отримуємо $\overline{\lim}_{k\to\infty}(x_k - x_{k+1})/(y_k - y_{k+1}) < +\infty$. Тому, за теоремою Штольца $\overline{\lim}_{k\to\infty} x_k/y_k < +\infty$. Звідси із (12) – (14) випливає твердження леми 1. $\square$

Лема 2. *Нехай (λ_n) — послідовність різних комплексних чисел із $\mathbb{C}_+$ є такою, що існує аналітична в $\mathbb{C}_+$ функція $H \not\equiv 0$, для якої (λ_n) є підпослідовністю нулів і для деякої неспадної функції S^* в $\mathbb{C}_+$ виконується нерівність (10). Тоді, якщо функція $\gamma\colon (-\infty; +\infty) \to (0; +\infty)$ є опуклою і виконуються умови (4) та (11), то система (8) не є повною в $L^2(-\infty; +\infty)$.*

Цю лему встановлено під час доведення леми 1 і з [5].

Твердження теореми 1 є очевидним наслідком з лем 1 і 2.

Теорема 2. *Якщо (λ_n) — довільна послідовність додатних чисел таких, що*

$$\sum_{\lambda_n \leq 1} \lambda_n < +\infty \tag{15}$$

і виконується (3), то система (2) не є повною в $L^2(0; +\infty)$.

Справді, із теореми 1 випливає, що система

$$\{\exp(-e^t + t\lambda_n) : \ n \in \mathbb{N}\} \tag{16}$$

є неповною в $L^2(-\infty; +\infty)$, якщо виконується (6) і

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\exp(2S(r))}{r^2} dr < +\infty.$$

Але

$$S(r) \leq \sum_{\lambda_n \leq r} 1/\lambda_n,$$

і система (16) є неповною в $L^2(-\infty; +\infty)$ тоді і тільки тоді, коли система (2) є неповною в $L^2(0; +\infty)$.

Питання про істотність умови (5) в теоремі 1 і питання про необхідність умови (7) в загальному випадку залишаються відкритими. На основі результатів із [1–5, 7–9] авторам не вдалось цього з'ясувати.

ЛІТЕРАТУРА

1. Fuchs W.H.J. *On the closure of* $\{e^{-t}t^{\alpha_\nu}\}$ // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1946. – V. 18, №2. – P. 91 – 105.
2. Malliavin P. *Sur quelques procedes d'extrapolation* // Acta Math. – 1955. – V. 93, № 3 – 4. – P. 179 – 255.
3. Винницкий Б.В., Шаповаловский А.В. *О полноте систем экспонент с весом* // Укр. мат. журн. – 1989. – Т. 41, №12. – С. 1695 – 1700.
4. Винницький Б.В. *Про нулі деяких класів функцій, аналітичних в півплощині* // Матем. студії. – 1996. – Вип. 6. – С. 67 – 72.
5. Винницький Б.В., Шаповаловський О.В. *Зауваження про повноту систем експонент з вагою в* $L^2(\mathbb{R})$ // Укр. мат. журн. – 2000. – Т. 52, №7. – С. 875 – 880.
6. Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 592 с.
7. Винницкий Б.В. *О нулях функций, аналитических в полуплоскости, и полноте систем экспонент* // Укр. мат. журн. – 1994. – Т. 46, №5. – С. 484 – 500.
8. Говоров Н.В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом. – М.: Наука, 1986. – 240 с.
9. Седлецкий А.М. *Преобразование Фурье быстро убывающих функций* // Матем. сб. – 1987. – Т. 61, №3. – С. 187 – 202.

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка
Інститут фізики, математики та інформатики

Надійшло 15.12.2005