УДК 517.518.6

Н. П. Гиря, С. Ю. Фаворов

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГОЛОМОРФНЫХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

S. Yu. Favorov, N. P. Girya. *Asymptotic properties of the holomorphic almost periodic functions*, Matematychni Studii, **25** (2006) 191–201.

We study asymptotic properties of holomorphic almost periodic functions in a tube domain with a cone in the base. In particular, we prove a simple relation between the P-indicator and the support function of the spectrum. We also have found a connection between the geometry of a spectrum and the existence of the limit of a function when the distance from a point to the vertex of the cone tends to infinity.

Н. П. Гиря, С. Ю. Фаворов. *Асимптотические свойства голоморфных почти периодических функций* // Математичнi Студiї. – 2006. – Т.25, №2. – С.191–201.

Рассматриваются асимптотические свойства голоморфных почти периодических функций в трубчатой области с конусом в основании. В частности, получено простое соотношение между P-индикатором и опорной функцией спектра, а также выяснена связь между существованием предела функции, когда расстояние от точки до вершины конуса стремится к бесконечности, и геометрией спектра функции.

Известно (см. [4], стр. 319–321), что почти периодическая функция $f(x)$ на вещественной оси $\mathbb{R}$ с ограниченным снизу спектром $\mathrm{sp}f$ непрерывно продолжается в верхнюю полуплоскость до голоморфной функции $f(z)$; при этом предел $\lim\limits_{y\to+\infty, x\in\mathbb{R}} f(x+iy)$ конечный, бесконечный или вовсе не существует в зависимости от того, является ли спектр неотрицательным, или $\inf \mathrm{sp}f$ отрицательный и достигается на спектре, или $\inf \mathrm{sp}f$ отрицательный и не достигается в точке спектра. Кроме того (см. [5], стр. 344), функция $f(z)$ имеет экспоненциальный тип в верхней полуплоскости и

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \overline{\lim_{y\to+\infty}} \frac{\ln|f(x+iy)|}{y} = -\inf \mathrm{sp}f. \tag{1}$$

Отметим также, что любая почти периодическая функция на $\mathbb{R}$, которая непрерывно продолжается в верхнюю полуплоскость до голоморфной ограниченной функции, имеет неотрицательный спектр (см. [4] стр. 320).

В случае почти периодических функций от m переменных ситуация сложнее, теперь спектр является счетным подмножеством в $\mathbb{R}^m$, а вместо полуплоскостей нужно рассматривать трубчатые области с выпуклым конусом в основании. Доказанный в работе

2000 *Mathematics Subject Classification:* 42A75, 30B50.

[2] многомерный аналог теоремы о голоморфном продолжении состоит в том, что почти периодическая функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^m$, со спектром в конусе Γ непрерывно и ограниченно продолжается до голоморфной функции в трубчатой области, основание которой — конус, сопряженный к Γ. Многомерный аналог соотношения (1) доказан в этой же работе только для почти периодических функций с ограниченным спектром; вместо индикатора рассматривается так называемый P-индикатор, а вместо $\inf \mathrm{sp} f$ — опорная функция для $\mathrm{sp} f$.

В настоящей работе эти результаты распространяются на почти периодические функции в $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, которые непрерывно продолжаются до голоморфной функции в трубчатой области в $\mathbb{C}^m$ с конусом в основании. Это позволяет провести полную классификацию поведения при $\operatorname{Im} z \to \infty$ такой функции в зависимости от расположения ее спектра. Метод доказательства отличен от используемого в [1], [2] и опирается на представление Герглотца неотрицательных гармонических функций в полуплоскости.

Необходимые определения. Координаты векторов $x \in \mathbb{R}^m$ или $z = x + iy \in \mathbb{C}^m$ будем обозначать через x_j или z_j соответственно, а скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^m$ или эрмитово при $z, w \in \mathbb{C}^m$ через $\langle x, y\rangle$ и $\langle z, w\rangle$. Через $|x|$ или $|z|$ будем обозначать евклидову норму в $\mathbb{R}^m$ или $\mathbb{C}^m$.

Конусом $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$ называется множество, замкнутое относительно операции умножения на положительное число, то есть удовлетворяющее условию $y \in \Gamma, t > 0 \Rightarrow ty \in \Gamma$. В настоящей работе всюду(если не оговорено противное) будут рассматриваться выпуклые замкнутые конусы с непустой внутренностью, удовлетворяющие дополнительному условию $\Gamma \cap (-\Gamma) = \{0\}$. Таким образом, конус не может содержать никакого конечномерного подпространства.

Через $\widehat{\Gamma}$ обозначается сопряженный конус к Γ, то есть $\widehat{\Gamma} = \{x \in \mathbb{R}^m : \langle x, y\rangle \geq 0$ $\forall y \in \Gamma\}$. Отметим, что $\widehat{\widehat{\Gamma}} = \Gamma$.

Через conv A будем обозначать выпуклую оболочку множестваA, через $\operatorname{Int} A$ будем обозначать внутренность множества A в $\mathbb{R}^m$ или $\mathbb{C}^m$. Запись $\Gamma' \subset \operatorname{Int}\Gamma$ для конусов Γ' и Γ означает, что $\Gamma' \subset \operatorname{Int}\Gamma \cup \{0\}$.

Опорной функцией множества $S \subset \mathbb{R}^m$ называется функция $H_S(\mu) := \sup\limits_{t \in S}\langle t, \mu\rangle$.

Через T_K будем обозначать трубчатое множество в $\mathbb{C}^m$ вида

$$T_K = \{z = x + iy : x \in \mathbb{R}^m, y \in K\},$$

где $K \subset \mathbb{R}^m$ — основание трубчатого множества.

Непрерывная функция $f(z)$, $z \in T_k$, называется *почти периодической на* T_K, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $l = l(\varepsilon)$, такое, что каждый m-мерный куб в $\mathbb{R}^m$ со стороной l содержит хотя бы одну точку τ (T_K, ε -почти-период для $f(z)$) со свойством

$$\sup_{z \in T_K} |f(z + \tau) - f(z)| < \varepsilon.$$

В частности, при $K = \{0\}$ получаем определение почти периодической в $\mathbb{R}^m$ функции.

Функция $f(z)$ в трубчатой области T_Ω, где Ω — область в $\mathbb{R}^m$, называется почти периодической в T_Ω, если ее сужение на любое трубчатое множество T_K, K — компакт в Ω, является почти периодической функцией в T_K.

Будем говорить, что $f(z) \to A$, $A \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, при $y \to \infty$ в T_Γ, если $f(z) \to A$ при $y \to \infty$, $y \in \Gamma$, равномерно по $x \in \mathbb{R}^m$.

В работе рассматриваются голоморфные почти периодические функции; такие функции аналитически продолжаются с T_Ω на $T_{\mathrm{conv}\Omega}$ (см.[3], стр.65), причем ввиду равенства $\sup\limits_{T_K}|g(z)| = \sup\limits_{T_{\mathrm{conv}K}}|g(z)|$, справедливого для любого $K \subset \Omega$ и любой голоморфной в T_Ω функции $g(z)$, продолжение на $T_{\mathrm{conv}\Omega}$ голоморфной почти периодической функции также является почти периодической функцией.

Спектром $\mathrm{sp}f$ почти периодической функции $f(z)$ в T_K называется множество векторов $\lambda \in \mathbb{R}^m$ таких, что величина

$$a_\lambda(y) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{(2T)^m}\int\limits_{|x_j|<T, j=1..m} f(x+iy)e^{-i\langle x,\lambda\rangle}dx \tag{2}$$

не равна тождественно нулю для $y \in K$. Спектр любой почти периодической функции не более чем счетен, поэтому каждой почти периодической функции можно сопоставить ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum a_n e^{i\langle x,\lambda^n\rangle},$$

где $a_n = a_n(y)$ — коэффициенты Фурье относительно $\lambda^n \in \mathrm{sp}f$.

Известно (см., [7], стр. 477), что для голоморфной почти периодической функции $f(z)$ в T_Ω величина $c_n(y) = a_n(y)e^{\langle y,\lambda_n\rangle}$ не зависит от y. Таким образом, в этом случае ряд Фурье может быть записан в виде ряда Дирихле от многих переменных

$$f(z) \sim \sum_{\lambda^n\in\mathbb{R}^n} c_n e^{i\langle z,\lambda^n\rangle}, c_n \in \mathbb{C}.$$

P- индикатором голоморфной в $\mathrm{Int}\,T_\Gamma$ функции $f(z)$ называется величина

$$h_f(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}^m}\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{1}{r}\ln|f(x+iry)|,\ \ y \in \mathrm{Int}\,T_\Gamma.$$

(см., например, [6], стр.275).

Основным результатом настоящей работы является следующая классификационная теорема:

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ — почти периодическая в $\mathbb{R}^m$ функция, $\mathrm{sp}f \subset \Lambda + \Gamma$ для некоторых $\Lambda \in \mathbb{R}^m$ и конуса $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$. Тогда функция $f(x)$ непрерывно продолжается до почти периодической в $T_{\widehat{\Gamma}}$ и голоморфной в $\mathrm{Int}\,T_{\widehat{\Gamma}}$ функции $f(z)$, причем возможны три варианта поведения функции $f(z)$ при $y \to \infty$:*

1. *Если $\mathrm{sp}f \subset \Gamma$, то $f(z)$ стремится к конечному пределу при $y \to \infty$ в $T_{\Gamma'}$ при любом $\Gamma' \subset \mathrm{Int}\,\Gamma$.*
2. *Если $\mathrm{sp}f \subset \Lambda^0 + \Gamma$ для некоторого $\Lambda^0 \in \mathrm{sp}f \setminus \Gamma$, то $f(z) \to 0$ при $y \to \infty$ в $T_{\Gamma'}$ при любом $\Gamma' \subset \mathrm{Int}\,(\widehat{\Gamma} \cap \{y : \langle y,\Lambda^0\rangle \ge 0\})$ и $f(z) \to \infty$ при $y \to \infty$ в $T_{\Gamma''}$ при любом $\Gamma'' \subset \mathrm{Int}\,(\widehat{\Gamma} \cap \{y : \langle y,\Lambda^0\rangle \le 0\})$.*
3. *Если $\mathrm{sp}f \setminus (\Lambda^0 + \Gamma) \ne \varnothing$ для любого $\Lambda^0 \in \mathrm{sp}f \cup \{0\}$, то функция $f(z)$ для любого $q < \infty$ на множестве T_{P_q}, где $P_q = \{y \in \mathrm{Int}\,\widehat{\Gamma} : |y| > q\}$, принимает значения, сколь угодно близкие к каждому числу в комплексной плоскости.*

Заметим, что если $\mathrm{sp}f \subset \Lambda^0 + \Gamma$ для некоторого конуса Γ и $\Lambda^0 \in \overline{\mathrm{sp}f} \setminus (\Gamma \cup \mathrm{sp}f)$, то выполнен случай 3.

Утверждение пункта 1 этой теоремы получено в работе [2]:

Теорема A. *Пусть $f(x)$ — почти периодическая функция в $\mathbb{R}^m$. Если ее спектр лежит в конусе $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$, то $f(x)$ непрерывно продолжается до функции $F(z)$ голоморфной в $\operatorname{Int} T_{\widehat{\Gamma}}$ и ограниченной в $T_{\Gamma'}$ для каждого $\Gamma' \subset \operatorname{Int}\widehat{\Gamma}$. При этом $F(z) \to a_0(0)$ при $y \to \infty$ в $T_{\Gamma'}$, где $a_0(0)$ определяется формулой (2) с $\lambda = 0$, а функция $F(z)$ является почти периодической в $T_{\widehat{\Gamma}}$.*

Обратно, если $f(x)$ непрерывно продолжается до голоморфной в $\operatorname{Int} T_{\widehat{\Gamma}}$ и ограниченной в $T_{\widehat{\Gamma}}$ для каждого $\Gamma' \subset \operatorname{Int}\widehat{\Gamma}$ функции, то $\mathrm{sp}f \subset \Gamma$.

Утверждение пункта 2 теоремы 1 содержится в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть $f(x)$ — почти периодическая функция в $\mathbb{R}^m$, $\mathrm{sp}f \subset \Lambda + \Gamma$, Γ — конус в $\mathbb{R}^m$ и $\Lambda \in \mathrm{sp}f \setminus \Gamma$. Тогда $f(x)$ продолжается до почти периодической в $T_{\widehat{\Gamma}}$ и голоморфной в $\operatorname{Int} T_{\widehat{\Gamma}}$ функции $f(z)$, причем $f(z) \to 0$ при $y \to \infty$ в любой трубчатой области $T_{\Gamma'}$ с конусом $\Gamma' \subset \operatorname{Int}(\widehat{\Gamma} \cap \{y : \langle y, \Lambda\rangle \geq 0\})$ и $f(z) \to \infty$ при $y \to \infty$ в любой трубчатой области $T_{\Gamma''}$ с конусом $\Gamma'' \subset \operatorname{Int}(\widehat{\Gamma} \cap \{y : \langle y, \Lambda\rangle \leq 0\})$. В частности, если $\Lambda \in (-\Gamma) \setminus \{0\}$, то $f(z) \to \infty$ при $y \to \infty$ в $T_{\Gamma''}$ при любом $\Gamma'' \subset \operatorname{Int}\widehat{\Gamma}$.*

Обратно, если $f(x)$ непрерывно продолжается до голоморфной функции в трубчатую область $T_{\widehat{\Gamma}}$, причем $f(z) \to \infty$ при $y \to \infty$ в $T_{\widehat{\Gamma}}$ для всех $\Gamma' \subset \operatorname{Int}\widehat{\Gamma}$ и $f(z)$ ограничена в T_K для любого компакта $K \subset \operatorname{Int}\widehat{\Gamma}$, то $\mathrm{sp}f \subset (\Lambda + \Gamma)$ с некоторым $\Lambda \in \mathrm{sp}f \cap (-\Gamma) \setminus \{0\}$.

Доказательство прямого утверждения в теореме 2 немедленно следует из того, что к функции $f(x)e^{-i\langle x,\Lambda\rangle}$ применима теорема A о голоморфном продолжении, поэтому функция $f(x)$ продолжается до почти периодической в $T_{\widehat{\Gamma}}$ и голоморфной в $\operatorname{Int} T_{\widehat{\Gamma}}$ функции $f(z)$, причем функция $f(z)e^{-i\langle z,\Lambda\rangle} \to c_\Lambda$ при $y \to \infty$ в любом конусе $\widetilde{\Gamma} \subset \operatorname{Int}\widehat{\Gamma}$. Доказательство обратного утверждения существенно сложнее и будет приведено ниже.

Теперь для доказательства пункта 3 теоремы 1 достаточно заметить, что если функция $f(z)$ не принимает в P_q значения из некоторой окрестности точки w^0, то функция $g(z) = \frac{1}{f(z+iy^0)-w^0}$ при некотором $y^0 \in \widehat{\Gamma}$, $|y^0| > q$ ограничена в $T_{\operatorname{Int}\widehat{\Gamma}}$ и по теореме A имеет конечный предел при $y \to \infty$ в $T_{\Gamma'}$ при каждом $\Gamma' \subset \operatorname{Int}\widehat{\Gamma}$. Поэтому и функция $f(z)$ имеет при $y \to \infty$ в $T_{\Gamma'}$ конечный или бесконечный предел, что позволяет применить к ней теорему A или теорему 2, так что $\mathrm{sp}f \subset \Gamma$ или $\mathrm{sp}f \subset \Lambda^0 + \Gamma$ с некоторым $\Lambda^0 \in \mathrm{sp}f \cap (-\Gamma) \setminus \{0\}$. Отметим, что по теореме A функция $f(z)e^{-i\langle z,\Lambda\rangle}$ ограничена в любой трубчатой области $T_{\Gamma'}$ с конусом $\Gamma' \subset \operatorname{Int}\widehat{\Gamma}$, и поэтому $f(z)$ ограничена в T_K для любого компакта $K \subset \operatorname{Int}\widehat{\Gamma}$.

Для доказательства второй части теоремы 2 используется ряд вспомогательных утверждений, представляющих и самостоятельный интерес. Прежде всего отметим следующую теорему, доказанную в работе [2]:

Теорема B. *Спектр почти периодической в $\mathbb{R}^m$ функции $f(x)$ ограничен тогда и только тогда, когда $f(x)$ продолжается до целой функции экспоненциального типа в $\mathbb{C}^m$, при этом $F(z)$ — почти периодична в $\mathbb{C}^m$, а ее P-индикатор связан с опорной функцией спектра соотношением*

$$h_F(y) = H_{\mathrm{sp}f}(-y) \ \ \forall y \in \mathbb{R}^m.$$

Нам понадобиться распространение этой теоремы на почти периодические функции со спектром в конусе:

Теорема 3. *Пусть f — почти периодическая функция в $\mathbb{R}^m$, $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$ — некоторый конус. Для того, чтобы $f(x)$ непрерывно продолжалась до голоморфной в $\operatorname{Int} T_{\widehat{\Gamma}}$ функции $f(z)$ с оценкой роста*

$$\exists b < \infty\, \forall \Gamma' \subset \operatorname{Int} \widehat{\Gamma}\, \exists B(\Gamma')\, \forall z \in T_{\Gamma'}\ |f(z)| \le B(\Gamma') e^{b|y|}, \tag{3}$$

необходимо и достаточно, чтобы $\mathrm{sp} f \subset \Lambda + \Gamma$ для некоторого $\Lambda \in \mathbb{R}^m$. При этом для всех $y \in \operatorname{Int} \widehat{\Gamma}$

$$h_f(y) = H_{\mathrm{sp} f}(-y), \tag{4}$$

а функция $f(z)$ почти периодическая в $\operatorname{Int} T_{\widehat{\Gamma}}$.

Доказательство. Докажем достаточность. Пусть $\mathrm{sp} f \subset \Lambda + \Gamma$ для некоторого $\Lambda \in \mathbb{R}^m$. Тогда, как и выше, функция $f(x)$ непрерывно продолжается до почти периодической в $T_{\widehat{\Gamma}}$ и голоморфной в $\operatorname{Int} T_{\widehat{\Gamma}}$ функции $f(z)$, причем в $T_{\Gamma'}$ для любого конуса $\Gamma' \subset \operatorname{Int} \widehat{\Gamma}$ функция $f(z) e^{-i\langle z, \Lambda\rangle}$ ограничена, что дает неравенство (3).

Далее, поскольку для $\widetilde{f}(z) = f(z) e^{-i\langle z, \Lambda\rangle}$ имеем $\mathrm{sp} \widetilde{f} = \mathrm{sp} f - \Lambda$, $H_{\mathrm{sp} \widetilde{f}}(y) = H_{\mathrm{sp} f}(y) - \langle y, \Lambda\rangle$, $h_{\mathrm{sp} \widetilde{f}}(y) = h_{\mathrm{sp} f}(y) + \langle y, \Lambda\rangle$, то для доказательства равенства (4) достаточно рассмотреть случай $\Lambda = 0$.

Выберем $\varepsilon > 0$, $\mu \in -\operatorname{Int} \widehat{\Gamma}$, $|\mu| = 1$ и заметим, что из вложения $\mathrm{sp} f \subset \Gamma$ следует

$$H_{\mathrm{sp} f}(\mu) = -\inf_{\lambda' \in \mathrm{sp} f} \langle \lambda', -\mu\rangle \le 0.$$

Положим $f_\mu(z) = f(z) e^{-i[H_{\mathrm{sp} f}(\mu) + \varepsilon]\langle z, \mu\rangle}$. Проверим, что при некотором $\delta > 0$ выполнено включение

$$\mathrm{sp} f_\mu \subset \Gamma_{\delta, -\mu} = \{\nu \in \mathbb{R}^m : \langle \nu, -\mu\rangle \ge \delta |\nu|\}. \tag{5}$$

Прежде всего, из условия $-\mu \in \operatorname{Int} \widehat{\Gamma}$ следует, что для некоторого $\varkappa > 0$ и всех $\lambda \in \Gamma$ имеем

$$\langle \lambda, -\mu\rangle \ge \varkappa |\lambda|.$$

Пусть теперь $\rho \in \mathrm{sp} f_\mu$, тогда $\rho = \lambda - (H_{\mathrm{sp} f}(\mu) + \varepsilon)\mu$, $\lambda \in \mathrm{sp} f \subset \Gamma$. Если $|\rho| > 2(1 + \varkappa)|H_{\mathrm{sp} f}(\mu) + \varepsilon|/\varkappa$, то

$$\langle \rho, -\mu\rangle \ge \varkappa |\lambda| + H_{\mathrm{sp} f}(\mu) + \varepsilon \ge \varkappa |\rho| - (1 + \varkappa)|H_{\mathrm{sp} f}(\mu) + \varepsilon| \ge \frac{\varkappa}{2} \rho.$$

Если же $|\rho| < \frac{2(1+\varkappa)|H_{\mathrm{sp} f}(\mu) + \varepsilon|}{\varkappa}$, то

$$\langle \rho, -\mu\rangle \ge \langle \lambda, -\mu\rangle - \inf_{\lambda' \in \mathrm{sp} f} \langle \lambda', -\mu\rangle + \varepsilon \ge \varepsilon$$

и поэтому при всех $\rho \in \mathrm{sp} f_\mu$ имеем $\langle \rho, -\mu\rangle \ge \delta |\rho|$ с некоторым $\delta > 0$, то есть включение (5). Отсюда и из теоремы A теперь следует ограниченность функции $f_\mu(z)$ в любой трубчатой области $T_{\Gamma'}$, $\Gamma' \subset \operatorname{Int} \widehat{\Gamma}_{\delta, -\mu} = \{\nu : \langle \nu, -\mu\rangle \ \ge \sqrt{1 - \delta^2} |\nu|\}$. Таким образом, для $z \in T_{\Gamma'}$ имеем

$$|f(z)| \le C(\Gamma') e^{(H_{\mathrm{sp} f}(\mu) + \varepsilon)\langle y, -\mu\rangle}$$

и

$$h_f(y) \le (H_{\mathrm{sp} f}(\mu) + \varepsilon)\langle y, -\mu\rangle.$$

Для y таких, что $\frac{y}{|y|} = -\mu$, переходим к пределу при $\varepsilon \to 0$ и, воспользовавшись однородностью $H_{\mathrm{sp}f}(y)$ и $h_f(y)$, получим

$$h_f(y) \le H_{\mathrm{sp}f}(-y). \tag{6}$$

Для доказательства необходимости и обратного к (6) неравенства воспользуемся следующей леммой

Лемма 1. *Пусть f голоморфна в $\operatorname{Int} T_\Gamma$ и имеет там рост не выше экспоненциального типа, непрерывна в $T_{\operatorname{Int}\Gamma \cup \{0\}}$ и при этом $f(x)$ ограничена на $\mathbb{R}^m$. Тогда для всех $z \in T_{\operatorname{Int}\Gamma}$*

$$|f(z)| \le \sup_{\mathbb{R}^m} |f(x)| e^{h_f(y)}.$$

Доказательство. Для фиксированного $z = x + iy \in T_{\operatorname{Int}\Gamma}$ положим $\varphi(w) = f(x + wy)$, $w \in \mathbb{C}$, и применим к этой функции вариант теоремы Фрагмена-Линделефа для полуплоскости $\mathbb{C}^+$ (см. [8],стр.28). Тогда

$$|\varphi(w)| \le \left(\sup_{\operatorname{Im} w = 0} |\varphi(w)| \right) e^{A \operatorname{Im} w} \le \sup_{\mathbb{R}^m} |f(x)| e^{A \operatorname{Im} w},$$

где $A = \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{\ln |\varphi(it)|}{t}$. Так как $A \le h_f(y)$, то осталось взять $w = i$. □

Продолжим доказательство теоремы 3. Так как почти периодическая функция $f(z)$ ограничена на $\mathbb{R}^m$ и выполнено (3), то применима лемма 1. Таким образом, для любого $z \in \operatorname{Int} T_{\widehat{\Gamma}}$

$$|f(z)| \le M e^{h_f(y)}.$$

Эта же лемма, примененная к разности $f(z+\tau) - f(z)$, доказывает почти периодичность функции $f(z)$ в $\operatorname{Int} T_{\widehat{\Gamma}}$. Далее, для любого $\lambda \in \mathbb{R}^m$ и $y \in \operatorname{Int} \widehat{\Gamma}$ по формуле (2) для коэффициентов Фурье

$$|a_\lambda(y)| \le M e^{h_f(y)}$$

и

$$|a_\lambda(y) e^{\langle y, \lambda \rangle}| \le M e^{h_f(y) + \langle y, \lambda \rangle}. \tag{7}$$

Если для какого-нибудь $y_0 \in \operatorname{Int} \widehat{\Gamma}$ выполняется неравенство $h_f(y_0) < H_{\mathrm{sp}f}(-y_0)$, то для некоторых $\varepsilon > 0$ и $\lambda \in \mathrm{sp}f$ имеем $h_f(y_0) < \langle -y_0, \lambda \rangle - \varepsilon$ и поэтому при $t \to +\infty$ имеем $h_f(ty_0) + \langle ty_0, \lambda \rangle \to -\infty$, что противоречит (7), так как левая часть не зависит от y и отлична от 0. Таким образом, для всех $y \in \operatorname{Int} \widehat{\Gamma}$

$$h_f(y) \ge H_{\mathrm{sp}f}(-y).$$

Отсюда и из условия (3) следует, что $H_{\mathrm{sp}f}(-y) \le h_f(y) \le b$ при $y \in \operatorname{Int} \widehat{\Gamma}$, $|y| = 1$. Выберем теперь $\Lambda \in \operatorname{Int}(-\Gamma)$ так, чтобы $\langle -\Lambda, y \rangle \ge b$ для всех таких y. Таким образом, для всех $\lambda \in \mathrm{sp}f$ имеем при $y \in \operatorname{Int} \widehat{\Gamma}$, $|y| = 1$

$$\langle \lambda - \Lambda, y \rangle = -\langle \lambda, -y \rangle - \langle \Lambda, y \rangle \ge -H_{\mathrm{sp}f}(-y) + b \ge 0,$$

то есть $\lambda \in (\Lambda + \Gamma)$. □

Теорема 4. *Пусть $f(z)$ — голоморфная функция в $\operatorname{Int} T_\Gamma$, ограниченная на любом множестве вида T_K, где $K \subset \operatorname{Int}\Gamma \cup \{0\}$ — компакт, при этом $f(z) \to \infty$ при $y \to \infty$ в $T_{\Gamma'}$ для любого $\Gamma' \subset \operatorname{Int}\Gamma$. Тогда P-индикатор*

$$h_f(y) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|f(x+iry)|}{r}$$

конечен и линеен в $\operatorname{Int}\Gamma$, а функция f удовлетворяет условию (3) для всех $\Gamma' \subset \operatorname{Int}\Gamma$.

Доказательство. Достаточно показать, что $h_f(y)$ линейна на любом конусе $\Gamma' \subset \operatorname{Int}\Gamma$. Зафиксируем такой конус. Тогда существует $y^0 \in \Gamma'$ такое, что при $y \in \Gamma' + y^0$ имеем $|f(z)| \geq 1$. Будем вначале считать, что Γ' содержит внутри себя конус
$\mathbb{R}^m_+ = \{y = (y_1, ..., y_m) \in \mathbb{R}^m : y_j \geq 0 \forall j\}$.

Положим $f_1(z) = f(z + iy^0)$. Заметим, что функция $\ln|f_1(x+iy)|$ неотрицательная и плюригармоническая в $\operatorname{Int} T_\Gamma$, и она сама и все ее производные ограничены на любом множестве вида T_K, где K — компакт в $\operatorname{Int}\Gamma \cup \{0\}$. Пользуясь представлением Герглотца (см., например, [8], стр. 41) по переменным $z_1 = x_1 + iy_1$ в полуплоскости $y_1 \geq 0$, имеем

$$\ln|f_1(x+iy)| = \frac{y_1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|f_1(t_1,' x + i'y)|}{(t_1 - x_1)^2 + y_1^2} dt_1 + \sigma('x,' y) y_1, \tag{8}$$

где $\sigma('x,' y)$ — дифференцируемая функция по каждой переменной.
(Здесь символами $'x$ и $'y$ обозначены $(m-1)$-мерные векторы $(x_2, \dots, x_m)$ и $(y_2, \dots, y_m)$ соответственно).

Покажем, что $\sigma('x,' y)$ не зависит от $'x$ и $'y$. Прежде всего, для каждого $k \in \{2, \dots, m\}$ имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial y_1} \ln|f_1(x+iy)| = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial y_1} \left(\frac{y_1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|f_1(t_1,' x + i'y)|}{(t_1 - x_1)^2 + y_1^2} dt_1 \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \sigma('x,' y). \tag{9}$$

Функция $\ln|f_1(t_1,' x + i'y)|$ и ее производные ограничены при $t_1 \in \mathbb{R}$ и $'x + i'y \in T_K$, где K — любой компакт в $\operatorname{Int}\Gamma \cup \{0\}$, поэтому

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial y_1} \left(\frac{y_1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|f_1(t_1,' x + i'y)|}{(t_1 - x_1)^2 + y_1^2} dt_1 \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_k} \ln|f_1(t_1,' x + i'y)| \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{y_1}{(t_1 - x_1)^2 + y_1^2} \right) dt_1.$$

После дифференцирования и замены $t' = \frac{t_1}{y_1} - \frac{x_1}{y_1}$ получим

$$\frac{1}{\pi y_1} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \ln|f_1(t' y_1 + x_1,' x + i'y)| \right] \frac{t'^2 - 1}{(t'^2 + 1)^2} dt'.$$

Так как выражение в квадратных скобках ограничено, то при $y_1 \to +\infty$ первое слагаемое правой части равенства (9) стремится к 0. Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \sigma('x,' y) = \lim_{y_1 \to \infty} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial y_1} \ln|f_1(x+iy)|.$$

Ввиду плюригармоничности $\ln|f_1(x+iy)|$ имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial y_1}\ln|f_1(x+iy)| = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_k}\ln|f_1(x+iy)|.$$

С другой стороны

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_k}\ln|f_1(x+iy)| = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial y_k}\ln|f_1(t_1,'x+i'y)|\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{y_1}{(t_1-x_1)^2+y_1^2}\right)dt_1+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\sigma('x,'y)\right). \qquad (10)$$

После замены $t'=\frac{t_1}{y_1}-\frac{x_1}{y_1}$ первое слагаемое правой части равенства (10) принимает вид

$$\frac{1}{\pi y_1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial y_k}\ln|f_1(t'y_1+x_1,'x+i'y)|\frac{2t'}{(t'^2+1)^2}dt' \qquad (11)$$

и стремится к нулю при $y_1\to+\infty$. Второе слагаемое, очевидно, равно нулю, поэтому

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\sigma('x,'y)=0,\ k\in\{2,\dots,m\}.$$

Подобным образом доказывается и то, что функция $\sigma('x,'y)$ не зависит от y_k, $k\in\{2,\dots,m\}$. Для этого надо продифференцировать равенство (8) по переменным y_k и y_1 и воспользоваться вытекающим из плюригармоничности $\ln|f_1(x+iy)|$ равенством:

$$\frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_1}\ln|f_1(x+iy)| = -\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_1}\ln|f_1(x+iy)|.$$

Таким образом, $\sigma('x,'y)=\sigma_1$ — константа и равенство (8) принимает вид

$$\ln|f_1(x+iy)| = \frac{y_1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|f_1(t_1,'x+i'y)|}{(t_1-x_1)^2+y_1^2}dt_1+\sigma_1 y_1,\quad \sigma_1\in\mathbb{R}. \qquad (12)$$

Проведя аналогичные рассуждения для функции $\ln|f_1(t_1,'x+i'y)|$ как функции от $z_2=x_2+iy_2$, получим представление

$$\ln|f_1(t_1,'x+i'y)| = \frac{y_2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|f_1(t_1,t_2,''x+i''y)|}{(t_2-x_2)^2+y_2^2}dt_2+\sigma_2 y_2,$$

где $''x=(x_3,\dots,x_m)$, $''y=(y_3,\dots,y_m)$. Подставляя это в равенство (12), получим

$$\ln|f_1(x+iy)| = \frac{y_1 y_2}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|f_1(t_1,t_2,''x+i''y)|}{((t_1-x_1)^2+y_1^2)((t_2-x_2)^2+y_2^2)}dt_1dt_2+$$

$$+\sigma_1 y_1+\sigma_2 y_2.$$

Повторяя аналогичные рассуждения для остальных переменных и возвращаясь к функции $f(z) = f_1(z - iy_0)$, придем к равенству, верному при всех $y \in \mathbb{R}^m_+$:

$$\ln|f(x+iy)| = \frac{\prod\limits_{k=1}^{m}(y_k - y_k^0)}{\pi^m} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|f(t+iy^0)|}{\prod\limits_{k=1}^{m}((t_k - x_k)^2 + (y_k - y_k^0)^2)} dt + \sum_{k=1}^{m} \sigma_k(y_k - y_k^0), \quad (13)$$

где $t = (t_1, \dots, t_m)$.

Так как первое слагаемое правой части ограничено равномерно по $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^m_+$, то для $z \in T_{\mathbb{R}^m_+}$ выполняется (3) и, кроме того,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} \ln|f(x+iry)| = \sum_{k=1}^{m} \sigma_k y_k = \langle \sigma, y \rangle, \quad (14)$$

то есть $h_f(y)$ линейна в $\mathbb{R}^m_+$.

Пусть теперь Γ — произвольный конус и пусть $A: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — невырожденный линейный оператор, переводящий некоторый конус $\Gamma' \subset \operatorname{Int}\Gamma$ в конус $\mathbb{R}^m_+$. Функция $f_2(z) = f(A^{-1}z)$ является голоморфной в $T_{\mathbb{R}^m_+}$. Применяя к функции $f_2(z)$ доказанное выше утверждение, найдем вектор $\widetilde{\sigma} = (\widetilde{\sigma}_1, ..., \widetilde{\sigma}_m)$ такой, что для любого $y' \in \mathbb{R}^m_+$

$$h_{f_2}(y') = \langle \widetilde{\sigma}, y' \rangle.$$

Возвращаясь к переменной y и пользуясь тем, что $h_{f_2}(Ay) = h_f(y)$, получаем

$$h_f(y) = \langle \widetilde{\sigma}, Ay \rangle = \langle A^*\widetilde{\sigma}, y \rangle.$$

для любого $y \in \Gamma'$. Тем самым, функция $h_f(y)$ линейна на Γ'. Поскольку в качестве Γ' может быть конус, во внутренности которого лежит любая наперед заданная точка $y \in \operatorname{Int}\Gamma$, это утверждение верно сразу для всех $y \in \operatorname{Int}\Gamma$. Неравенства (3) для функции f получается из (13) после замены $z = A^{-1}z'$. □

Теорема 5. *Пусть $f(z)$ — голоморфная почти периодическая функция в $\operatorname{Int} T_{\widehat{\Gamma}}$, причем для некоторого $y^0 \in \operatorname{Int}\widehat{\Gamma}$ имеем $f(x + ity^0) \to \infty$ при $t \to +\infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^m$. Тогда для любого $\Lambda \in \overline{\operatorname{sp} f} \setminus \operatorname{sp} f$ имеем $\operatorname{sp} f \nsubseteq (\Gamma + \Lambda)$.*

Доказательство. Пусть утверждение теоремы неверно и $\operatorname{sp} f \subset (\Gamma + \Lambda)$ для некоторого $\Lambda \in \overline{\operatorname{sp} f} \setminus \operatorname{sp} f$. Рассмотрим последовательность $\Lambda^n \in \operatorname{sp} f$ таких, что $\Lambda^n \to \Lambda$ при $n \to \infty$. Из (2) следует, что коэффициенты Фурье $a(\Lambda_n, y)$ функции f удовлетворяют неравенству

$$|a(\Lambda^n, f)| \le \sup_{x\in\mathbb{R}^m} |f(x+iy)|,$$

а так как величина $c_n = a(\Lambda^n, y)e^{\langle \Lambda^n, y\rangle}$ не зависит от y и не равна 0, то для всех $y \in \operatorname{Int}\widehat{\Gamma}$

$$-\langle \Lambda^n, y \rangle \le \sup_{x\in\mathbb{R}^m} \ln|f(x+iy)| - \ln|c_n|. \quad (15)$$

Выберем $t^0 > 0$ так, чтобы $|f(x + ity_0)| \ge 1$ для всех $x \in \mathbb{R}^m$, $t \ge t^0$. Рассмотрим функцию $\varphi(w) = \ln|f(x + it^0y^0 + wy^0)|$, $w = u + iv \in \mathbb{C}$. Эта функция неотрицательна и гармоническая в $\mathbb{C}^+$. Согласно представлению Герглотца (см. [8], стр. 41) имеем:

$$\varphi(w) = \frac{v}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)dt}{(u-t)^2 + v^2} + Av, A \ge 0,$$

и для $0 < v^1 < v$

$$\varphi(w) = \frac{v}{v^1}(\frac{v^1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)dt}{(u-t)^2+v^2} + Av^1) \le \frac{v}{v^1}\varphi(u+iv^1).$$

Таким образом, из (15) при $y = t^0y^0 + vy^0$ следует, что

$$-\langle \Lambda^n, (t^0+v)y^0\rangle \le \frac{v}{v^1}\sup_{x\in\mathbb{R}^m, u\in\mathbb{R}} \ln|f(x+uy^0+i(t^0+v^1)y^0| - \ln|c_n|. \tag{16}$$

Заметим, что спектр функции $f_\Lambda(z) = f(z)e^{-i\langle z,\Lambda\rangle}$ лежит в Γ, причем $0\overline{\in}\mathrm{sp}f_\Lambda$, поэтому по теореме A имеем $f_\Lambda(z) \to 0$ при $y \to \infty$ в $T_{\Gamma'}$ для любого $\Gamma' \subset \mathrm{Int}\,\widehat{\Gamma}$. Будем считать v^1 столь большим, чтобы $|f_\Lambda(x+i(t^0+v^1)y^0)| < e^{\langle t^0y^0,\Lambda\rangle-1}$ при всех $x \in \mathbb{R}^m$. Тогда из неравенства (16) следует

$$-\langle \Lambda^n, (t^0+v)y^0\rangle \le \frac{v}{v^1}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}^m}\ln|f_\Lambda(x+i(t^0+v^1)y^0)| - \langle \Lambda, (t^0+v^1)y^0\rangle\right) - \ln|c_n| \le$$

$$\le -v\langle\Lambda, y^0\rangle - \ln|c_n| - \frac{v}{v^1}$$

или

$$\langle \Lambda - \Lambda^n, y^0\rangle \le \frac{\langle \Lambda^n, t^0y^0\rangle - \ln|c_n|}{v} - \frac{1}{v^1}.$$

Переходя к пределу сначала при $v \to +\infty$, а затем при $n \to \infty$, приходим к противоречию. □

Нам также понадобится следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть* Γ — *конус в* $\mathbb{R}^m$, S —*подмножество в* $\mathbb{R}^m$. *Для того, чтобы опорная функция* $H_S(y)$ *была линейной на* $-\widehat{\Gamma}$, *необходимо и достаточно, чтобы* $S \subset (\Gamma + \lambda')$ *для некоторого* $\lambda' \in \overline{S}$.

Доказательство. Докажем достаточность. Рассмотрим $y \in -\widehat{\Gamma}, |y| = 1$ и опорную гиперплоскость $\{x : \langle x, y\rangle = H_S(y)\}$. Имеем $H_S(y) = \sup\limits_{x\in S}\langle x, y\rangle \le \sup\limits_{\gamma\in\Gamma}\langle\lambda' + \gamma, y\rangle =$
$= \langle\lambda', y\rangle + \sup\limits_{\gamma\in\Gamma}\langle\gamma, y\rangle \le \langle\lambda', y\rangle$. С другой стороны, так как $\lambda' \in \overline{S}$, то $H_S(y) = \sup\limits_{x\in S}\langle x, y\rangle =$
$= \sup\limits_{x\in\overline{S}}\langle x, y\rangle \ge \langle\lambda', y\rangle$. Поэтому $H_S(y) = \langle\lambda', y\rangle$ для всех $y \in -\widehat{\Gamma}$.

Докажем необходимость. Если функция $H_S(y)$ линейна на $-\widehat{\Gamma}$, то для любого $y \in -\widehat{\Gamma}$ она представима в виде $H_S(y) = \langle\lambda', y\rangle$ при некотором $\lambda' \in \mathbb{R}^m$. По определению опорной функции

$$\forall\lambda \in S\ \forall y \in -\widehat{\Gamma}\ : \langle\lambda, y\rangle \le \langle\lambda', y\rangle,$$

поэтому $\langle\lambda - \lambda', y\rangle \le 0$, то есть $\lambda - \lambda' \in \Gamma$, а поскольку λ произвольная точка S, то $S \subset (\Gamma + \lambda')$. Предположим, что $\lambda'\overline{\in}\overline{S}$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что $|\lambda - \lambda'| \ge \delta$ при всех $\lambda \in S$. Рассмотрим произвольное $y \in \mathrm{Int}\,(-\widehat{\Gamma}), |y| = 1$. Тогда $\langle y, \nu\rangle \ge 0$ при любом $\nu \in -\Gamma$ и, в частности, $\langle y, \nu\rangle \ge M$ с некоторой константой $M > 0$ при $\nu \in -\Gamma, |\nu| = 1$. Следовательно, $\langle y, \mu\rangle \ge M|\mu|$, при всех $\mu \in (-\Gamma)$, и при всех $\lambda \in S \subset \lambda' + \Gamma$ выполнено неравенство

$$\langle\lambda' - \lambda, y\rangle \ge M|\lambda' - \lambda| \ge \delta M.$$

Это неравенство противоречит тому, что $\langle\lambda', y\rangle = H_S(y) = \sup\limits_{\lambda\in S}\langle\lambda, y\rangle$ для всех $y \in -\widehat{\Gamma}$. □

Окончание доказательства теоремы 2. Пусть $f(x)$ — почти периодическая функция в $\mathbb{R}^m$, которая непрерывно продолжается до голоморфной функции $f(z)$ в $\operatorname{Int} T_{\widehat{\Gamma}}$ так, что $f(z) \to \infty$ при $|y| \to \infty$ в $T_{\widehat{\Gamma}}$ для всех $\Gamma' \subset \operatorname{Int} \widehat{\Gamma}$ и $f(z)$ ограничена на всех множествах вида T_K, где K — компакт в $\operatorname{Int} \widehat{\Gamma} \cup \{0\}$. По теореме 4 P-индикатор $h_f(y)$ конечен и линеен в $\operatorname{Int} \widehat{\Gamma}$ и функция $f(z)$ удовлетворяет (3) для всех $\Gamma' \subset \operatorname{Int} \widehat{\Gamma}$. По теореме 3 функция $f(z)$ почти периодическая в $\operatorname{Int} \widehat{\Gamma}$ и $h_f(y) = H_{\mathrm{sp} f}(-y)$ для $y \in \operatorname{Int} \widehat{\Gamma}$, поэтому по лемме 2 $\mathrm{sp} f \subset \Gamma + \Lambda$ при некотором $\Lambda \in \overline{\mathrm{sp} f}$. Для завершения доказательства осталось использовать теорему 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bohr H. Contribution to the theory of analytic almost periodic functions. Kobenhaven, 1943. – 126 p.
2. Favorov S., Udodova O. *Almost periodic functions in finite-dimensional space with the spectrum in a cone*, Matematicheskaya fizika, analiz, geometriya. – V. 9, №. 3, 2002. – P. 456–477.
3. Хёрмандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. – М: Мир. – 1968. – 279 с.
4. Левитан Б.М. Почти-периодические функции. – Гос. изд-во тех.-теор. литературы, Москва. – 1953. – 396 с.
5. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. – М.: Гостехиздат, 1956. – 632 с.
6. Ронкин Л.И. Элементы теории аналитических функций многих переменных. – М.:Наука, 1971. – 432 с.
7. Ронкин Л.И. *CR-функции и голоморфные почти-периодические функции с целой базой*, Мат. физика, анализ, геометрия. – Т.4, №4 ,1997. – С. 472–490.
8. Koosis P. The logarithmic integral. – Cambrige univ.press. – 1988. – 606 p.

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
sfavorov@assa.kharkov.ua, n_girya@mail.ru.

Поступило 15.11.2005